

Eisenstein series for Siegel modular groups

東工大・理 水本信一郎 (Shin-ichiro Mizumoto)

1. Results

$m \in \mathbb{Z}_{>0}$ を以下固定し、 H_m を Siegel upper half space of degree m とする。

$k \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $z \in H_m$, $s \in \mathbb{C}$ に対して

$$E_k^{(m)}(z, s) := \det(I_m(z))^s \sum_{\begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\} \setminus Sp(m, \mathbb{Z})} \det(cz+d)^{-k} / |\det(cz+d)|^{-2s}$$

とおく。右辺の和は $\left\{ (z, s) \mid z \in H_m, \operatorname{Re}(s) > \frac{m+1-k}{2} \right\}$

で absolutely and uniformly convergent. これを

Eisenstein series (of weight k) for $Sp(m, \mathbb{Z}) = Sp_{2m}(\mathbb{Z})$

とよぶ。

次の性質はよく知られている：

Fundamental Theorem [La, Kal]

(1) 各 $z \in H_m$ に対して、 $E_k^{(m)}(z, s)$ は s の関数として

全平面に meromorphic に解析接続され、次の functional equation をみたす :

$$\Gamma_m(s) := \prod_{j=0}^{m-1} \Gamma\left(s - \frac{j}{2}\right), \quad \xi(s) := \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) \\ (= \xi(1-s))$$

と、

$$E_{\mathbb{R}}^{(m)}(z, s) := \frac{\Gamma_m\left(s + \frac{\mathbb{R}}{2}\right)}{\Gamma_m(s)} \cdot \xi(2s) \prod_{j=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \xi(4s - 2j) E_{\mathbb{R}}^{(m)}\left(z, s - \frac{\mathbb{R}}{2}\right)$$

と、 $\lfloor \cdot \rfloor$ は Gauss symbol

$$E_{\mathbb{R}}^{(m)}(z, s) = E_{\mathbb{R}}^{(m)}\left(z, \frac{m+1}{2} - s\right).$$

(2) Poles の location は z に independent . i.e.

$z = x + iy$ (x, y : real matrices) と、 $\mathbb{R} < \mathbb{R} < \mathbb{R}$.

$\forall s_0 \in \mathbb{C}$ と $\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}$, $\exists l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$:

$$E_{\mathbb{R}}^{(m)}(z, s) = \frac{(C^\infty\text{-fcn in } (x, y, s))}{(s - s_0)^l} \quad \text{for } |s - s_0| < \delta.$$

(3) $E_{\mathbb{R}}^{(m)}(z, s)$ は z の fcn として slowly increasing .

(3) について : Rankin - Selberg method の automorphic

L-fcn's の応用について

$$\mathcal{D} E_{\mathbb{R}}^{(m)}(z, s) \Big| H_{m_1} \times \cdots \times H_{m_r} \quad (\star)$$

の type の fcn として知られる (e.g. [Bö2], [BSY], [Mi]).

τ は $Sp(m, \mathbb{Z})$ に關しては必ずしも invariant τ ではない differential operator (である, $(\star)$ の形の fcn が $Sp(m_1, \mathbb{Z}) \times \cdots \times Sp(m_r, \mathbb{Z})$ に關して保型性をもつもの) である。(このようは differential operator の一般的構成法は [Ib] にある。)

このとき $R-S$ integral の convergence を示すためには
 $(\star)$ も slowly increasing か?

という問題を解決しなければならぬ (Böcherer 氏がこの点、
 1990年9月頃、筆者に指摘した)。

今回得られたことを述べる:

Main result

(i) Fundamental Theorem に、Fourier expansion を用いた elementary proof がつく。

($m=2$ のとき [Kau].)

(ii) $E_k^{(m)}(z, s)$ の $\forall$ partial derivative in the entries of (x, y) は slowly increasing (locally uniformly in s): すぐわかる:

(i) により, $\forall s_0 \in \mathbb{C}$ に対し $\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}, \exists l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

s.t. $(s-s_0)^l E_k^{(m)}(z, s)$: holom. in s for $|s-s_0| < \delta$,
 C^∞ in (x, y) .

このとき $\forall \rho \in \mathbb{R}_{>0}, \forall N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$: given 1 に対し

$\exists A, B \in \mathbb{R}_{>0}$: depending only on $m, k, s_0, \delta, \ell, \rho, N$

s. t.

$$\left| (s-s_0)^\ell \mathbb{D} E_k^{(m)}(z, s) \right| \leq A \cdot \det(I_m(z))^B$$

for $I_m(z) \geq \rho \cdot 1_m$, $|s-s_0| < \delta$. $\Rightarrow z'' \mathbb{D}$ is

$\forall$ monomial of degree N in $\frac{\partial}{\partial z_{ij}}$'s and $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{ij}}$'s ($1 \leq i \leq$

$$z = (z_{ij})$$

(特には, $\forall$ "slowly increasing" differential operator

" R-S integral " apply できる.)

補足 $E_k^{(m)}(z, s)$ is Fundamental Theorem (1) での def

と一致している。

(1°) s の pole について 次を知らなければならない:

(1) $E_0^{(m)}(z, s)$ の possible poles は

$$\left\{ \frac{j}{4} \mid j \in \mathbb{Z}, 0 \leq j \leq 2m+2 \right\}$$

にある [Kal]。

(2) $k > 0$ ならば $E_k^{(m)}(z, s)$ は entire [Mi, p.599]。

(2°) 講演の際, "pole はすべて simple pole か?" との

質問に対し筆者は「高々 double pole しかない」と答えた。

これは思い違っていた。正確な解答は次の通りである:

(i) $E_0^{(m)}(z, s)$ の pole については $s = \frac{m+1}{2}$ (resp. $s=0$)

が simple pole, residue = $\prod_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \xi(2j+1)$ (resp. $-\prod_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \xi(2j+1)$) であることが知られている [Kal] である。

他の possible poles は、実際に pole なのかな、order は " < 0 "

なのかなからだよ。

(ii) もとの $E_k^{(m)}(z, s)$ の pole は $\zeta(s)$ の zeros にも関係してくるから複雑である。

(3°) 結局、Eisenstein series の pole の様子が筆者にはまだよくわからないうちだよ、もう少し調べてみるよ、と思ってゐる。 ┘

2. Outline of Proof

$z = x + iy \in H_m$ (x, y : real) とする。[Ma] により、 $\operatorname{Re}(s) > \frac{m+1}{2}$ なら、 $E_k^{(m)}(z, s)$ の Fourier exp. は次のようになる：

$$E_k^{(m)}(z, s) = \det(y)^s + \det(y)^s \sum_{v=1}^m \sum_{h \in \Lambda_v} \sum_{g \in \mathbb{Z}_{\text{prim}}^{(m,v)} / GL_v(\mathbb{Z})} S_v(h, 2s+k) \xi_v(y[g], h; s+k, s) \cdot e(\sigma(h[tg]x)). \quad (*)$$

ここで

$$e(s) := e^{2\pi i s}, \quad \sigma := \text{trace},$$

$$\Lambda_v := \{ \text{half-integral matrix of size } v \},$$

$$\mathbb{Z}_{\text{prim}}^{(m,v)} := \{ m \times v \text{ integral matrix, primitive } \},$$

$$S_\nu(h, s) := \sum_{r = {}^t r \in \mathbb{Q}^{(\nu)} \bmod 1} n(r)^{-s} e(\sigma(hr)) : \begin{array}{l} \text{singular series} \\ \text{(Siegel series)} \end{array}$$

with

$n(r) :=$ product of denominators of elementary divisors of r .

$\mathfrak{f} \vdash g > 0$: size ν , $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$: $\mathfrak{f} \nmid \mathfrak{c}$.

$$\xi_\nu(g, h; \alpha, \beta) := \int_{{}^t x = x^{(\nu)}} e(-\sigma(hx)) \det(x+ig)^{-\alpha} \det(x-ig)^{-\beta} dx.$$

($\operatorname{Re}(\alpha + \beta) > \nu$: convergent) : confluent hypergeometric fcn [Sh 1].

Remarks

- (1) $(*)$: $\nu \leftrightarrow$ rank of c in $\det(cz+d)^{-k}$.
- (2) $m \geq 3$ or $\mathfrak{f} \nmid \mathfrak{c}$, $(*)$: divergent for $\operatorname{Re}(s) < \frac{m-k}{2}$.
- $(*)$: h is Λ_ν or $\mathfrak{f} \nmid \mathfrak{c}$ or rank of element $\mathfrak{c}$ is $< \nu$. $\mathfrak{c} = {}^t c$, $\lambda = \operatorname{rank}(h)$ or $\mathfrak{f} \nmid \mathfrak{c}$, $\operatorname{Re}(s) > m$ or $\mathfrak{c} = {}^t c$ $(*)$ is rearrange $\mathfrak{f} \nmid \mathfrak{c}$ and $\mathfrak{c} = {}^t c$:

$$E_k^{(m)}(z, s) = \sum_{0 \leq \lambda \leq \nu \leq m} F_{k, \nu, \lambda}^{(m)}(z, s),$$

$\lambda = 0$ (constant terms)

$$F_{k, \nu, 0}^{(m)}(z, s) = \gamma(s) \zeta(s) \det(y)^s \zeta_\nu^{(m)}(2y, 2s+k-\frac{\nu+1}{2}).$$

$\gamma(s)$ = Gamma factor, $Zeta(s)$ = Riemann zeta factor,

$$1 \leq \nu \leq m, \quad y^{(m)} > 0 \quad \text{for}$$

$$\zeta_{\nu}^{(m)}(y, s) := \sum_{a \in \mathbb{Z}_{\text{prim}}^{(m, \nu)} / GL_{\nu}(\mathbb{Z})} \det(y[a])^{-s}.$$

$$(y[a] := {}^t a y a)$$

これは $\text{Re}(s) > \frac{m}{2}$ で convergent, 全 s -平面に merom.
 である [Ma] (Epstein zeta fcn, or Eisenstein series for GL_m).

$$\zeta_0^{(m)} := 1 \quad (\text{by def. } \zeta_0^{(0)} := 1).$$

$$\underline{\lambda > 0} \quad \Delta_{\lambda}^{(m)} := \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0^{(m-\lambda, \lambda)} & * \end{pmatrix} \in GL_m(\mathbb{Z}) \right\} \quad \text{とすると}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_{\text{prim}}^{(m, \lambda)} / GL_{\lambda}(\mathbb{Z}) & \xleftrightarrow{1:1} & GL_m(\mathbb{Z}) / \Delta_{\lambda}^{(m)} \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\ x & \xrightarrow{\quad} & u_x = \begin{pmatrix} x \\ * \end{pmatrix}. \end{array}$$

各 u_x に対して $g(y, u_x) > 0$: size $m - \lambda$ と

$$y[u_x] = \begin{pmatrix} y[x] & 0 \\ 0 & g(y, u_x) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1_{\lambda} & * \\ 0 & 1_{m-\lambda} \end{bmatrix}$$

(Jacobi decomposition)

で決まる。すると

$$F_{\mathfrak{h}, \nu, \lambda}^{(m)}(z, s) = \gamma(s) \text{Zeta}(s) \det(y)^s \sum_{\substack{\mathfrak{h} \in \Delta_\lambda \\ \det(\mathfrak{h}) \neq 0}} \sum_{u_r \in GL_m(\mathbb{Z})/\Delta_\lambda^{(m)}}$$

$$S_\lambda(\mathfrak{h}, 2s + \mathfrak{k} - \nu + \lambda) \xi_\lambda^*(y[r], \mathfrak{h}; s + \mathfrak{k} - \frac{\nu - \lambda}{2}, s - \frac{\nu - \lambda}{2})$$

$$\cdot \zeta_{\nu - \lambda}^{(m - \lambda)}(2g(y, u_r), 2s + \mathfrak{k} - \frac{\nu + 1}{2}) \cdot e(\sigma(\mathfrak{h}[r]x)) \quad (**)$$

ここで ξ_λ^* は ξ_λ を少し modify してある。

この形にしておくと Fourier series (**) は (適当に $(s - s_0)^2$ をかけると) $\forall s_0 \in \mathbb{C}$ の nbd. で z に対して convergent で、 z に対して何回でも (x, y) に対して differentiable とある。(証明には [Sh 1] [Ki] [Bö 1] の結果を使う。) このことから、① $E_\mathfrak{g}^{(m)}(z, s)$ の meromorphy, ② poles の location が z に independent なこと, ③ $\forall$ partial derivative が slowly increasing なることが出る。

Remark

(**) で、 $\zeta_{\nu - \lambda}^{(m - \lambda)}$ が infinite series としてあらわされるのは $m - \lambda > \nu - \lambda > 0$, すなわち $m \geq 3$ のときである。

3. Proof of functional equation

上の $F_{\mathfrak{h}, \nu, \lambda}^{(m)}(z, s)$ を次のように書く。

$\lambda > 0$ のとき

$$\frac{\Gamma_m(s + \frac{k}{2})}{\Gamma_m(s)} \cdot \xi(2s) \prod_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \xi(4s - 2j) \theta_{k, \nu, \lambda}^{(m)}(h[\tau], y, s - \frac{k}{2})$$

$$(s, \nu) \mapsto \left(\frac{m+1}{2} - s, m + \lambda - \nu \right) \tau \text{ invariant.}$$

$$[\quad] := \tau \text{ empty product} := 1. \quad \text{etc. } \Gamma_0(s) := 1.]$$

Proof. $(m, \lambda) \in \mathbb{P}(\mathbb{F})$ is a twofold induction.

$$\underline{C(0,0)} : \quad \text{is } \xi(2s) = \xi(2(\frac{1}{2} - s)) \text{ is } \tau \text{ inv. OK.}$$

$$\underline{C(\lambda, \lambda) \text{ for } \lambda < m \Rightarrow C(m, \lambda)} : \quad \text{is } \tau \text{ inv.}$$

$$\text{relation } \circledast \text{ is } \sum_{\nu=\lambda}^{(m-\lambda)} \text{ a few eq. is OK.}$$

is, ? is not "is" :

$$\underline{C(m, \lambda), \forall \lambda < m \Rightarrow C(m, m)}.$$

$$G(z, s) := E_k^{(m)}(z, s) - E_k^{(m)}(z, \frac{m+1}{2} - s)$$

$$\text{is } \tau \text{ inv. } (E_k^{(m)} \text{ is } \S 1 \text{ a Fundamental Theorem (1)})$$

τ def. is "completed Eisenstein series".)

Induction assumption is "is"

$$G(z, s) = \text{sum over } \{ h \in \Lambda_m \mid \det(h) \neq 0 \}.$$

is, ? (Fourier coeff. is estimate is "is")

$G(z, s) : \text{rapidly decreasing } C^\infty\text{-modular form of weight } k.$

よ、? Rankin - Selberg method 1: 5"

$$(G(x, s), E_k^{(m)}(x, \bar{s}')) = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \forall s' \text{ with} \\ \operatorname{Re}(s') > \frac{m+1-k}{2} \end{array} \right).$$

このことから $(G, G) = 0$, $G = 0$. $k < 1$:

$C(m, m)$ は $\mathbb{Z}$ 上 $\mathbb{Z}$ である。 $\square$

Remark $m = 2$ のときは $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ である。上の pf は [Kan] のそれと異なる (上のものは singular series の fcn eq と confluent hypergeometric fcn の fcn eq とは異なる)。

References

[Bö 1] Böcherer, S.: Über die Fourierreihen der Siegelischen Eisensteinreihen. Manuscripta math., 45, 273 - 288 (1984).

[Bö 2] Böcherer, S.: Siegel modular forms and theta series. Proc. Symp. Pure Math., 49, Part 2, 3 - 17 (1989).

[BSY] Böcherer, S., Satoh, T., Yamazaki, T.: On the pullback of a differential operator and its application to vector valued Eisenstein series. Commentarii Math. Univ. St. Pauli, 42, 1 - 22 (1992).

- [Ib] Ibukiyama, T.: On differential operators on automorphic forms and invariant pluri-harmonic polynomials. Preprint (1991).
- [Kal] Kalinin, V. L.: Eisenstein series on the symplectic group. Math. USSR Sbornik, 32, 449 - 476 (1977).
- [Kau] Kaufhold, G.: Dirichletsche Reihe mit Funktionalgleichung in der Theorie der Modulfunktion 2. Grades. Math. Ann., 137, 454 - 476 (1959).
- [Ki] Kitaoka, Y.: Dirichlet series in the theory of Siegel modular forms. Nagoya Math. J., 95, 73-84 (1984).
- [La] Langlands, R. P.: On the Functional Equations Satisfied by Eisenstein Series. Lect. Notes in Math., vol. 544. Springer 1976.
- [Ma] Maass, H.: Siegel's Modular Forms and Dirichlet Series. Lect. Notes in Math., vol. 216. Springer 1971.
- [Mi] Mizumoto, S.: Poles and residues of standard L-functions attached to Siegel modular forms. Math. Ann., 289, 589 - 612 (1991).

[Sh 1] Shimura, G.: Confluent hypergeometric functions on tube domains. Math. Ann., 260, 269 - 302 (1982).

[Sh 2] Shimura, G.: On Eisenstein series. Duke Math. J., 50, 417 - 476 (1983).