

擬等角写像と $\hat{C} \setminus \{0\}$ の p 葉非有界被覆面のミニマルなマルチン境界

大同工大 (Daido Institute of Technology) 瀬川 重男 (Shigeo Segawa)

京都産大 (Kyoto Sangyo University) 正岡 弘照 (Hiroaki Masaoka)

§1. R を $\hat{C} \setminus \{0\}$ の p 葉非有界被覆面とし, π を R から $\hat{C} \setminus \{0\}$ の上への射影とする (cf. [AS], [F] etc.). R の Martin コンパクト化 R^* を考察する. R の Martin 境界を Δ^R で表すことにする. また R のミニマルな Martin 境界 (すなわち, すべての Δ^R のミニマルな点の全体) を Δ_1^R で表すことにする. 次の結果はよく知られている.

- (i) $(\hat{C} \setminus \{0\})^*$, $\Delta^{\hat{C} \setminus \{0\}}$ 及び $\Delta_1^{\hat{C} \setminus \{0\}}$ はそれぞれ, $\hat{C}$, $\{0\}$ 及び $\{0\}$ と同一視される.
- (ii) 射影 π は一意に R^* 上に連続的に拡張される (この拡張を同じ文字 π で書くことにする). さらに, $\pi(R^*) = \hat{C}$ をみたとす.

主定理. $p = 2, 3$ とする. R 及び R' を p 葉非有界被覆面とし, f を R から R' の上への擬等角写像とする. このとき, $\|\Delta_1^R\| = \|\Delta_1^{R'}\|$ がなりたつ. ここで, $\|\Delta_1^R\|$ は Δ_1^R の濃度である.

§2. この節では, いくつかの既知の結果を与える.

R, Δ^R, Δ_1^R 及び π を §1 で用いた記号と同じものを表すものとする. $D_0 = \{z \in \mathbb{C} | 0 < |z| < 1\}$ 及び $R_0 = \pi^{-1}(D_0)$ とおく. Δ^{R_0} 及び $\Delta_1^{R_0}$ がそれぞれ, $\Delta^R \cup \partial D$ 及び $\Delta_1^R \cup \partial D$ と同一視されることは, よく知られた事実である. ここで, $\partial D = \{|z| = 1\}$ は $D = \{|z| < 1\}$ の境界である. それゆえ, 以下では, $\hat{C} \setminus \{0\}$ 及び R の代わりに, それぞれ, D_0 及び R_0 を考えることにする. g_0 を D 上の 0 で極をもつ Green 関数とする.

定義 2.1(cf. [B]). もし ${}^D\hat{R}_{g_0}^E \neq g_0$ がなりたつならば, D_0 の部分集合 E が 0 で thin であるという. ここで, ${}^D\hat{R}_{g_0}^E$ は g_0 の E 及び D に関する掃散 (balayage) である.

E が D の閉部分集合であるときは, E が $0 \in \partial(D \setminus E)$ で thin であることと 0 が Dirichlet 問題の意味で, $D \setminus E$ の非正則境界点であることは互いに必要十分であることが知られている.

定義 2.2. $a_{k,i}$ ($k, i \in \{1, 2\}$) を $\mathbb{C}$ 上の実数値可測関数とする. 線形偏微分作用素 $L = \sum_{i,k=1}^2 \partial_k(a_{k,i}\partial_i)$ が一様楕円型であるとは 2 つの正定数 κ_1 及び κ_2 がとれて, すべての $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ に対して,

$$\kappa_1 \sum_{i=1}^2 v_i^2 \leq \sum_{i,k=1}^2 a_{k,i} v_k v_i \leq \kappa_2 \sum_{i=1}^2 v_i^2$$

がなりたつことである.

次の定理は [LSW] から導かれる.

定理 2.1. V を $\mathbb{C}$ の部分領域とし, ζ を V の境界点とし, $L = \sum_{i,k=1}^2 \partial_k(a_{k,i}\partial_i)$ を一様楕円型線形偏微分作用素とする. このとき, ζ が通常の Dirichlet 問題の意味で, V の非正則境界点であることと ζ が線形偏微分作用素 L に関する Dirichlet 問題の意味で, V の非正則境界点であることが互いに必要十分である.

定義 2.3. D の部分集合 U が 0 を含むとする. このとき, もし $D \setminus U$ が 0 で thin であるならば, U は 0 の細近傍 (fine neighborhood) という.

k_ζ を R_0 上の $\zeta \in \Delta^R$ で極をもつ Martin 関数とする.

定義 2.4. ζ を Δ_1^R の一点とし, E を R_0 の部分集合とする. もし $R_0 \hat{R}_{k_\zeta}^E \neq k_\zeta$ がなりたつならば, E は ζ で minimally thin であるという.

定義 2.5. ζ を Δ_1^R の一点とし, U を R_0 の部分集合とする. もし $R_0 \setminus U$ が ζ で minimally thin であるならば, $U \cup \{\zeta\}$ は ζ の minimal fine neighborhood であるという.

次の定理により, $\#\Delta_1^R$ は細位相によって, 特徴づけられる.

定理 2.2([MS]). $\mathcal{M} = \{M | M \text{ は } D_0 \text{ の部分領域であって, } M \cup \{0\} \text{ は } z = 0 \text{ の細近傍である}\}$ とおく. このとき,

$$\#\Delta_1^R = \max_{M \in \mathcal{M}} n_R(M).$$

ここで, $n_R(M)$ は $\pi^{-1}(M)$ の成分の個数であり, π は R から $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ の上への射影である.

§3. $p = 2$ の場合の主定理の証明.

この節では, $p = 2$ の場合の主定理の証明を与える. R, R' 及び f を主定理の記号と同じ記号を表すものとする. [H1] より, $1 \leq \#\Delta_1^R, \#\Delta_1^{R'} \leq 2$ がなりたつ. よって, $\#\Delta_1^R = 2$ と $\#\Delta_1^{R'} = 2$ とが互いに必要十分であることを証明すれば, 十分である. このことを示すためには, f^{-1} が R' から R の上への擬等角写像であるので, $\#\Delta_1^R = 2$ のとき, $\#\Delta_1^{R'} = 2$ を示せば, 十分である. $\#\Delta_1^R = 2$ の場合を考察する. 定理 2.2 を用いると, 適当な D_0 の部分領域 U がとれて, 各 $\partial U \setminus \{0\}$ の成分が滑らかな Jordan 閉曲線からなり, $D_0 \setminus U$ が 0 で thin で, $f(\pi^{-1}(U))$ は R'_0 の部分集合であって, $n_R(U) = 2$ がなりたつようにできる. U_j ($j = 1, 2$) を $\pi^{-1}(U)$ の成分とすると, 各 U_j は U のコピーと考えられる. $g_w^{f(U_j)}$ ($j = 1, 2$) を $f(U_j)$ 上の w で極をもつ Green 関数とする. 以後の議論では, 各 U_j に対して, U_j と U とを同一視して, U_j は $\mathbb{C}$ の中に埋め込まれているものとする. この $\mathbb{C}$ を $\mathbb{C}_j$ と記すことにする. $x \in \mathbb{C}_j$ に対して,

$$L_j = L_{j,x} = \begin{cases} \sum_{i,k=1}^2 \partial_k(J_f(x)(f'(x)^{-1}f'(x)^{-1*})_{k,i}\partial_i), & f'(x), f'(x)^{-1} \text{ が共に存在するとき} \\ \sum_{i=1}^2 \partial_i^2, & \text{上の場合以外するとき} \end{cases}$$

とおく. ここで, f は各 U_j ($j = 1, 2$) に制限して, 各 U_j を $\mathbb{R}^2$ 内の領域と見なすことにより, $f'(x)$ は $\mathbb{R}^2$ 内の部分領域 U_j から $\mathbb{R}^2$ の中への写像とみなされる f の点 (x_1, x_2) ($x =$

$x_1 + ix_2$, ($x_k \in \mathbf{R}$, $k = 1, 2$)) における微分を表わし, $f'(x)^{-1*}$ は $f'(x)$ の逆行列 $f'(x)^{-1}$ の転置行列であり, $(f'(x)^{-1}f'(x)^{-1*})_{k,i}$ は $f'(x)^{-1}f'(x)^{-1*}$ の (k, i) -成分である. また, $J_f(x)$ は f の (x_1, x_2) における $f'(x)$ の行列式である. f が擬等角であるので, この線形偏微分作用素 L_j は一様楕円型である. 一方, $g_z^{f(U_j)} \circ f$ ($j = 1, 2$) は U_j ($j = 1, 2$) 上の $f^{-1}(z)$ で極をもつ線形偏微分作用素 L_j に関する Green 関数である. 0 が通常の Dirichlet 問題の意味で, U_j の非正則境界点であるので, L_j の一様楕円型であることと定理 2.1 を用いると, 0 が L_j に関する Dirichlet 問題の意味で, U_j の非正則境界点であることがわかる. 一方, 以下の事実に注意しよう.

- L_j によって導かれる harmonic sheaf $\mathcal{H}$ を有する C_j は Brelot 空間 (Brelot の意味の調和空間) になる ([He 1] 及び [He 2] より, したがう).
- C_j 上の通常の細位相と C_j 上の L_j に関する細位相が同一である (定理 2.1 より, したがう).

よって, $x \mapsto g_{f(x)}^{f(U_j)} \circ f(y)$ ($y \in U_j$) は $U_j \setminus \{y\}$ 上の L_j に関する正值調和関数であり, 任意の y の閉近傍 $U(y) \subset U_j$ が対して, $x \mapsto g_{f(x)}^{f(U_j)} \circ f(y)$ は $U_j \setminus U(y)$ 上で, 有界であるので, 上の注意及び [Fu, Theorem 9.15] を用いると, 各 $y \in U_j$ に対して, $x \mapsto g_{f(x)}^{f(U_j)} \circ f(y)$ は 0 で, 細極限 $\mathcal{F} - \lim_{x \rightarrow 0} g_{f(x)}^{f(U_j)} \circ f(y)$ をもち, U_j 上のこの極限関数を $g_{f(0)}^{f(U_j)} \circ f(y)$ で表すと, $x \mapsto g_{f(x)}^{f(U_j)} \circ f(y)$ は L_j に関して, $(U_j \cup \{0\}) \setminus \{y\}$ 上の局所有界な細調和関数である. また, L_j に関する Green 関数の対称性と掃散の特性により, 任意の正数 r と任意の $x \in U_j \setminus U_r(y)$ ($U_r(y) = \{\xi \in C_j \mid |\xi - y| < r\}$) 及び任意の $z \in U_r(y)$ に対して,

$$(*) \quad R_0 \hat{R}_{g_{f(x)}^{f(U_j)} \circ f}^{U_j \setminus U_r(y)}(z) = R_0 \hat{R}_{g_{f(z)}^{f(U_j)} \circ f}^{U_j \setminus U_r(y)}(x) = g_{f(z)}^{f(U_j)} \circ f(x) = g_{f(x)}^{f(U_j)} \circ f(z).$$

$x \mapsto g_{f(x)}^{f(U_j)} \circ f(y)$ が $(U_j \cup \{0\}) \setminus \{y\}$ の上への細連続拡張をもつことを示した論法を少々修正した論法と L_j に関する Green 関数の対称性を用いると, $x \mapsto R_0 \hat{R}_{g_{f(x)}^{f(U_j)} \circ f}^{U_j \setminus U_r(y)}(y) = R_0 \hat{R}_{g_{f(y)}^{f(U_j)} \circ f}^{U_j \setminus U_r(y)}(x)$ は $(U_j \cup \{0\}) \setminus \{y\}$ 上で, 細連続になる. 等式 (*) で, $x = 0$ における細極限をとると, (L_j に関する) $z \in U_r(y)$ と $U_j \setminus U_r(y)$ に関する z における Dirac 測度の掃散測度の定義 (L_j に関する $\partial U_r(y)$ 上の z における調和測度) より,

$$g_{f(0)}^{f(U_j)} \circ f(z) = R_0 \hat{R}_{g_{f(0)}^{f(U_j)} \circ f}^{U_j \setminus U_r(y)}(z) = \int_{\partial U_r(y)} g_{f(0)}^{f(U_j)} \circ f d\omega_z^{U_r(y), L_j}$$

をうる. ここで, $d\omega_z^{U_r(y), L_j}$ は L_j に関する $\partial U_r(y)$ 上の z における調和測度を表わすものとする. この式により, $g_{f(0)}^{f(U_j)} \circ f(y)$ は L_j に関して, U_j 上で, 正值調和であることがしたがう. よって, $g_0^{f(U_j)} = (g_{f(0)}^{f(U_j)} \circ f) \circ f^{-1}$ とおくと, $g_0^{f(U_j)}$ は $f(U_j)$ 上, 正值調和である. $f(U_j)$ 上の正值調和関数 h に対して,

$$S_j(h)(x) := \inf\{s(x) \mid s \text{ は } R'_0 \text{ 上で, 正值優調和で, } f(U_j) \text{ 上, } s \geq h \text{ をみたす}\}$$

とおく. Perron-Wiener-Brelot の手法を用いると, $S_j(g_0^{f(U_j)})$ は R'_0 上で, 正值調和である. さらに, $f(U_j)$ 上で,

$$(**) \quad S_j(g_0^{f(U_j)}) - R'_0 \hat{R}_{S_j(g_0^{f(U_j)})}^{R'_0 \setminus f(U_j)} = g_0^{f(U_j)}$$

がなりたつ. この等式 (**) の証明は 後ほど, 示めすことにして, $p = 2$ の場合の主定理の証明を続けることにする. $1 \leq \#\Delta_1^R, \#\Delta_1^{R'} \leq 2$ が なりたつことから, 高々 2 つのミニマルな関数が存在するので, Martin の表現定理を用いると, R'_0 上のミニマルな関数 $h_{j,k}$ ($k = 1, 2$) によって, R'_0 上, $S_j(g_0^{f(U_j)}) = h_{j,1} + h_{j,2}$ と表される. よって, 等式 (**) を用いると, R'_0 上のミニマルな関数 h_j がとれて, ${}^{R'_0}\hat{R}_{h_j}^{R'_0 \setminus f(U_j)}$ は R'_0 上の Green potential であることがわかる. したがって $R'_0 \setminus f(U_j)$ は h_j に対応するミニマルな Martin 境界点で, minimally thin である. よって, $f(U_1) \cap f(U_2) = \emptyset$ であるので, $\#\Delta_1^{R'} = 2$ が なりたつ.

ここで, 等式 (**) を証明しておく. まず, $f(U_j)$ 上で, 次式がなりたつことを注意する.

$${}^{R'_0}\hat{R}_{S_j(g_0^{f(U_j)})}^{R'_0 \setminus f(U_j)} = H_{S_j(g_0^{f(U_j)})}^{f(U_j)}.$$

定義によって, $f(U_j)$ 上で, $S_j(g_0^{f(U_j)}) \geq g_0^{f(U_j)}$ が なりたつ. したがって, Perron-Wiener-Brelot の意味の一般化された Dirichlet 問題の定義によって, $f(U_j)$ 上で,

$$S_j(g_0^{f(U_j)}) - g_0^{f(U_j)} \geq H_{S_j(g_0^{f(U_j)})}^{f(U_j)}$$

が なりたつ.

$$P(g_0^{f(U_j)})(x) = \begin{cases} S_j(g_0^{f(U_j)})(x) & x \in R'_0 \setminus f(U_j) \\ H_{S_j(g_0^{f(U_j)})}^{f(U_j)}(x) & x \in f(U_j) \end{cases}$$

及び

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x \in R'_0 \setminus f(U_j) \\ g_0^{f(U_j)}(x) & x \in f(U_j) \end{cases}$$

とおく. このとき, V は R'_0 上の連続な劣調和関数である. よって, $S_j(g_0^{f(U_j)}) - V$ は R'_0 上で, 優調和で, R'_0 上で,

$$S_j(g_0^{f(U_j)}) \geq V + P(g_0^{f(U_j)})$$

が なりたつ. この不等式の逆向きの不等式を証明すれば, 等式 (**) を得る. まず, $V + P(g_0^{f(U_j)})$ が R'_0 上で, 優調和であることをチェックしよう. $V + P(g_0^{f(U_j)})$ は R'_0 上で連続で, $R'_0 \setminus \partial f(U_j)$ 上で, 調和であることが容易にわかる. $R'_0 \setminus f(U_j)$ 上で, $V + P(g_0^{f(U_j)}) = S_j(g_0^{f(U_j)})$ が なりたつ. $f(U_j)$ 上で, $V + P(g_0^{f(U_j)}) \leq S_j(g_0^{f(U_j)})$ が なりたつので, 任意の $z \in \partial f(U_j)$ に対して, ある z を中心とする局所円板 B がとれて, すべての z を中心とする局所円板 $B' (\subset B)$ に対して,

$$(V + P(g_0^{f(U_j)}))(z) = S_j(g_0^{f(U_j)})(z) = \int_{\partial B'} S_j(g_0^{f(U_j)}) d\mu_z^{B', \bar{B}'} \geq \int_{\partial B'} (V + P(g_0^{f(U_j)})) d\mu_z^{B', \bar{B}'}$$

が なりたつ. ここで, $\bar{B}'$ は R'_0 における通常の位相に関する B' の閉包であり, $\mu_z^{B', \bar{B}'}$ は z 及び B' に関する通常の意味の調和測度である. したがって, $V + P(g_0^{f(U_j)})$ は R'_0 上で, 優調和である. $f(U_j)$ 上で, $V + P(g_0^{f(U_j)}) \geq g_0^{f(U_j)}$ が なりたつので, S_j の定義により, R'_0 上で,

$$V + P(g_0^{f(U_j)}) \geq S_j(g_0^{f(U_j)})$$

がなりたつ. したがって, R'_0 上で, $S^R(g_0^{f(U_j)}) = V + P(g_0^{f(U_j)})$ がなりたつ. よって, 所求の結果を得る.

§4. $p = 3$ の場合の主定理の証明.

$p = 2$ の場合の主定理の証明と同じ議論を用いることにより, $\#\Delta_1^R = 3$ の場合は, $\#\Delta_1^{R'} = 3$ がなりたつことがわかる. したがって, 主定理の主張を証明するためには, $\#\Delta_1^R = 2$ の場合に, $\#\Delta_1^{R'} = 2$ を示せば, 十分である. $\#\Delta_1^R = 2$ 及び $\#\Delta_1^{R'} = 1$ を仮定する. 定理 2.2 を用いると, 適当な D_0 の部分領域 U がとれて, 各 $\partial U \setminus \{0\}$ の成分が滑らかな Jordan 閉曲線からなり, $D_0 \setminus U$ が 0 で thin で, $f(\pi^{-1}(U))$ が R'_0 の部分集合であって, $n_R(U) = 2$ をみたすようにできる. したがって, $\pi^{-1}(U)$ の成分 $\tilde{U}$ がとれて, $\tilde{U}$ は U のコピーとみなせる. $g_{f(z)}^{f(\tilde{U})} \circ f$ を L_j に関する $\tilde{U}$ 上の z で極をもつ Green 関数とする. $p = 2$ の場合の主定理の証明と同じ議論を用いることにより, 0 は L_j に関する Dirichlet 問題の意味で, $\tilde{U}$ の非正則境界点であるので, 細極限 $\mathcal{F} - \lim_{z \rightarrow 0} g_{f(z)}^{f(\tilde{U})} \circ f$ が存在する. この $\tilde{U}$ 上の極限関数を $g_{f(0)}^{f(\tilde{U})} \circ f$ によって表し, $g_0^{f(\tilde{U})} = (g_{f(0)}^{f(\tilde{U})} \circ f) \circ f^{-1}$ は $f(\tilde{U})$ とおくと, $g_0^{f(\tilde{U})}$ は $f(\tilde{U})$ 上で, 正値調和である. $f(\tilde{U})$ 上の正値調和関数 h に対して,

$$S(h)(x) := \inf\{s(x) | s \text{ は } R'_0 \text{ 上で, 正値優調和で, } f(\tilde{U}) \text{ 上で, } s \geq h \text{ をみたす}\}$$

とおく. Perron-Wiener-Brelot の手法を用いると, $S(g_0^{f(\tilde{U})})$ は R'_0 上で, 正値調和である. $p = 2$ の場合の主定理の証明と同じ考察をすることにより, $f(\tilde{U})$ 上で,

$$(***) \quad S(g_0^{f(\tilde{U})}) - R_0 \hat{R}_{S(g_0^{f(\tilde{U})})}^{R'_0 \setminus f(\tilde{U})} = g_0^{f(\tilde{U})}$$

なりたつ. 仮定によって, R'_0 上で, $S(g_0^{f(\tilde{U})})$ はただ 1 つのミニマルな調和関数であり, (***) がなりたつので, $R'_0 \setminus f(\tilde{U})$ は $S(g_0^{f(\tilde{U})})$ に対応するただ 1 つのミニマルな Martin 境界点で minimally thin であることがわかる.

0 に到達する U 内の曲線 γ で, $f(\pi^{-1}(\gamma)) \subset R'_0$ をみたす γ を考える. γ の始点 a に対して, $\tilde{a} \in \pi^{-1}(a) \setminus \tilde{U}$ をとる. R_0 が非有界であるので, $\tilde{a}$ を始点とする γ のリフト $\tilde{\gamma}$ がとれる. このとき, $\tilde{U}$ は $\pi^{-1}(U)$ の成分であるので, $\tilde{\gamma}$ は $R_0 \setminus \tilde{U}$ 内にある. また, $\tilde{U}$ は $f(\tilde{\gamma})$ は R'_0 の部分集合であって, $\tilde{\gamma}$ は理想境界まで到達する. したがって, これらのことから, 以下のことがなりたつ.

- i) $f(\tilde{\gamma})$ は $R'_0 \setminus f(\tilde{U})$ の部分集合である;
- ii) $\pi'(f(\tilde{\gamma}))$ は 0 で thin でない, ここで, π' は R' から $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ の上への射影である.

事実 i) によって, $f(\tilde{\gamma})$ は $S(g_0^{f(\tilde{U})})$ に対応するミニマルな Martin 境界点で, minimally thin である. 他方, 事実 ii) 及び [MS, Proposition 3.1] を用いることにより, $f(\tilde{\gamma})$ は $S(g_0^{f(\tilde{U})})$ に対応するミニマルな Martin 境界点で, minimally thin でない. これは矛盾である. よって, 所求の結果を得る.

参考文献

- [AS] L.V. Ahlfors and L. Sario: *Riemann Surfaces*, Princeton, 1960.
- [B] M. Brelot: On topologies and boundaries in potential theory, *Lecture Notes in Math.*, 175(1971), Springer.
- [F] O. Forster: *Lectures on Riemann Surfaces*, GTM 81, Springer.
- [Fu] B. Fuglede: Finely harmonic functions, *Lecture Notes in Math.*, 289(1972), Springer.
- [H1] M. Heins: *Riemann surfaces of infinite genus*, *Ann. of Math.*, 55(1952), 296-317.
- [H2] M. Heins: *On the Lindelöf principle*, *Ann. of Math.*, 61(1955), 440-473.
- [He1] R.-M. Herves: *Un principe du maximum pour les sous-solutions locales d'une équation uniformément elliptique de la forma*
$$Lu = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = 0,$$
 Ann. Inst. Fourier, 14(1964), 493-508.
- [He2] R.-M. Herves: *Quelques propriétés des fonctions surharmoniques associés à une équation uniformément elliptique de la forme*
$$Lu = - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = 0,$$
 Ann. Inst. Fourier, 15(1965), 215-224.
- [JM] N. Jin and H. Masaoka: *Kuramochi boundary and harmonic functions with finite Dirichlet integrals on unlimited covering surfaces*, in preparation.
- [LSW] W. Littman, G. Stampacchia and H. F. Weinberger: *Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients*, 17(1963), *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, 45-79.
- [MS] H. Masaoka and S. Segawa: *Harmonic dimension of covering surfaces and minimal fine neighborhood*, *Osaka J. Math.*, 34(1997), 659-672.

瀬川 重男
Department of Mathematics
Daido Institute of Technology
Nagoya 457-8530
Japan
e-mail: segawa@daido-it.ac.jp

正岡 弘照
Department of Mathematics
Faculty of Science
Kyoto Sangyo University
Kyoto 603-8555
Japan
e-mail: masaoka@cc.kyoto-su.ac.jp