

$\mathbb{Z}G$ -lattice の complexity に関する Webb の仕事 の紹介

山口大学教育学部 佐々木洋城

(Hiroki Sasaki)

G を有限群, k を標数 p の体とする。有限生成 kG 加群 M の complexity $c_{kG}(M)$ は Alperin-Evens [1] によって定義された。すなわち M の極小射影分解と

$$\cdots \rightarrow P_n \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

とすれば

$$c_{kG}(M) = \min \{ c \in \mathbb{Z} \mid c \geq 0, \text{ s.t. } \exists \mu > 0 \text{ s.t. 十分大きな全ての } n \text{ に対して} \\ \dim_k P_n \leq \mu n^{c-1} \}.$$

群環 kG は self injective であるから $c_{kG}(M) = 0$ と M が射影的であることと同値であり, Alperin [2] により $c_{kG}(M) = 1$ と M が周期的であることは同値である。ここで M が周期的であるとは

$0 \rightarrow M \rightarrow S_n \rightarrow \cdots \rightarrow S_1 \rightarrow S_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, S_i は射影的なる完全系列が存在することである。

以下では考える加群はすべて有限生成である。 k 上の次数付加群 $A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i$ $\dim_k A_i < \infty$ に対して

$$Y(A) = \min \{ g \in \mathbb{Z} \mid g \geq 0, \text{ s.t. } \exists \mu > 0 \text{ s.t. 十分大 } \exists n \text{ 全ての } n \text{ に対して } \dim_k A_n \leq \mu n^{g-1} \}$$

と置く。

補題 1 (Alperin-Evens, Carlson)

(1) $c_{kG}(M) \leq c_{kG}(k)$ $M: kG$ -加群, k と自明な kG -加群とみる。

(2) kG 加群 M , $G \geq H$, kH 加群 L に対して

$$c_{kH}(M_H) \leq c_{kG}(M), \quad c_{kG}(L^G) \leq c_{kH}(L),$$

$$\therefore M_H = \text{Res}_H^G(M), \quad L^G = \text{Ind}_H^G(L).$$

(3) S は G の Sylow p 部分群とすれば $c_{kG}(M) = c_{kS}(M_S)$.

(4) $c_{kG}(M) = \max_{T \text{ は既約 } kG \text{ 加群と動く}} Y(\text{Ext}_{kG}^*(M, T))$

$$= \max_{N \text{ は } kG \text{ 加群と動く}} Y(\text{Ext}_{kG}^*(M, N)).$$

(5) G が p 群のとき $c_{kG}(M) = Y(H^*(G, M))$.

(6) $M^* = \text{Hom}_k(M, k)$ とすれば $c_{kG}(M) = c_{kG}(M^*)$.

Alperin-Evens によって得られた基本定理は次の定理である。 $\mathcal{E}_p(G)$ によって G の基本可換 p 群の全体を表わす。

定理 2 (Alperin - Evens [1])

$$c_{kG}(M) = \max_{E \in \mathcal{E}_p(G)} c_{kE}(M_E).$$

この系として直ちに

系 3 (1) (Chouinard [6]) M が射影的 $\Leftrightarrow \forall E \in \mathcal{E}_p(G)$ に対して M_E が射影的.

(2) M が周期的 $\Leftrightarrow \forall E \in \mathcal{E}_p(G)$ に対して M_E が周期的.

定理 2 の証明はいくつか知られ、特に Carlson は次を示した。 kG 加群 M に対して

$M = f_G(M) \oplus p_G(M)$, $f_G(M)$ は射影的, $p_G(M)$ は射影的直和因子をもたない

となく。

定理 4 (Carlson [3]) $\exists B_G \in \mathbb{N}$ (G のみによって定まる)
s.t. 任意の kG 加群 M with $f_G(M) = 0$ に対して

$$\dim_k M \leq B_G \cdot \max_{E \in \mathcal{E}_p(G)} \dim p_E(M_E).$$

kG 加群 M の極小射影分解を

$$\cdots \rightarrow P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

$\searrow \quad \nearrow \quad \searrow \quad \nearrow \quad \searrow \quad \nearrow$
 $\quad K_{n-1} \quad \quad K_2 \quad \quad K_1$

とすれば $p_G(K_i) = 0$ か $c_{KG}(M) = \chi(\oplus P_i) = \chi(\oplus K_i)$.

定理4.1により

$$\begin{aligned} \dim_K K_i &\leq B_G \cdot \max_{E \in \mathcal{E}_p(G)} \dim_K p_E(K_{iE}) \\ &= B_G \cdot \max_{E \in \mathcal{E}_p(G)} \dim_K \Omega^i(M_E) \end{aligned}$$

である。これから定理2を得る。

以上の integral version について紹介する。

$\mathbb{Z}G$ -lattice M に対して

$$M = \text{proj}(M) \oplus \text{core}(M),$$

$\text{proj}(M)$ は射影的 $\mathbb{Z}G$ -sublattice,

$\text{core}(M)$ は射影的直和因子をもたない $\mathbb{Z}G$ -sublattice

と分解する。 $\text{proj}(M)$, $\text{core}(M)$ は genus 性を除いて一意である。

M の射影分解

$$\cdots \rightarrow P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0 \quad (*)$$

$\searrow \quad \nearrow \quad \searrow \quad \nearrow$
 $\quad K_{n-1} \quad \quad K_0$

が極小であるとは、各 i に対して P_i が K_i を像にもつような最小 rank の射影的 $\mathbb{Z}G$ -lattice であることという。

これは、各 i に対して $\text{proj}(K_i) = 0$ であることと同値である。 $\mathbb{Z}G$ -lattice M の極小射影分解と $(*)$ として、 M の complexity $c_{\mathbb{Z}G}(M)$ と

$$c_{\mathbb{Z}G}(M) = \min \{ c \in \mathbb{Z} \mid c \geq 0 \text{ s.t. } \exists \lambda > 0 \text{ s.t. 十分大きな全ての } n \text{ に対して } \text{rank}_{\mathbb{Z}} P_n \leq \lambda n^{c-1} \}$$

によって定義する。

$c_{\mathbb{Z}G}(M) = 0$ であることと M が射影的であることは同値である。また M が周期的であることと

$$0 \rightarrow M \rightarrow A_n \rightarrow \cdots \rightarrow A_0 \rightarrow M \rightarrow 0, \text{ 各 } A_i \text{ は射影的}$$

であるような完全系列が存在することと定義すれば、 $c_{\mathbb{Z}G}(M) = 1$ であることと、 M が周期的であることは同値である。実際、 $c_{\mathbb{Z}G}(M) = 1$ とすれば十分大きな i に対して $\text{rank } P_i \leq \lambda$ (webb) によって Jordan-Zassenhaus の定理によってある $i, j, i > j$ に対して K_i と K_j は同型である。このとき $K_i \vee K_{j-1}$ 。

これと続けて $K_{i-j-1} \vee M$ と得る。push-out 図式

$$\begin{array}{ccccc} K_{i-j-1} & \twoheadrightarrow & P_{i-j-1} & \twoheadrightarrow & K_{i-j-2} \\ \downarrow & \text{p.o.} & \downarrow & & \parallel \\ M & \twoheadrightarrow & Q & \twoheadrightarrow & K_{i-j-2} \end{array}$$

と考えることにより Q は射影的である。下段の完全系列と $(*)$ に付け加えれば

$$0 \rightarrow M \rightarrow Q \rightarrow P_{i-j-2} \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0.$$

すなわち M は周期的である。逆は明らか。

Dress [7] の定理により、 $|G|$ の素因数 p に対して π_p の Sylow p 部分群 S_p を定めておけば

$$M \mid \bigoplus_p (M_{S_p})^G$$

であるから

$$c_{\mathbb{Z}G}(M) = \max_p c_{\mathbb{Z}S_p}(M_{S_p})$$

を得る。 G が p 群のとき M の射影分解

$$\cdots \rightarrow P_n \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

が極小であることと $\mathbb{F}_p G$ 加群 M/pM の射影分解

$$\cdots \rightarrow P_n/pP_n \rightarrow \cdots \rightarrow P_1/pP_1 \rightarrow P_0/pP_0 \rightarrow M/pM \rightarrow 0$$

が極小であることは同値であるから

$$c_{\mathbb{Z}G}(M) = c_{\mathbb{F}_p G}(M/pM).$$

よって G が一般のとき

$$\begin{aligned} c_{\mathbb{Z}G}(M) &= \max_p c_{\mathbb{Z}S_p}(M_{S_p}) \\ &= \max_p c_{\mathbb{F}_p S_p}(M/pM) \\ &= \max_p \max_{E \in \mathcal{E}_p(G)} c_{\mathbb{F}_p E}(M/pM) \\ &= \max_p \max_{E \in \mathcal{E}_p(G)} c_{\mathbb{Z}E}(M_E). \end{aligned}$$

定理 5
$$c_{\mathbb{Z}G}(M) = \max_p \max_{E \in \mathcal{E}_p(G)} c_{\mathbb{Z}E}(M_E).$$

(Talleli [9])

系 6. (1) $\mathbb{Z}G$ -lattice M が射影的 $\Leftrightarrow \forall p \mid |G| \quad \forall E \in \Sigma_p(G)$ M_E が射影的.(2) M が周期的 $\Leftrightarrow \forall p \mid |G| \quad \forall E \in \Sigma_p(G) \quad M_E$ が周期的.

さて Webb は

定理 7 (Webb [10]) $\exists B_G \in \mathbb{N}$ s.t. $\mathbb{Z}G$ -lattice M が射影的直和因子をもたないならば

$$\exists p, \exists E \in \Sigma_p(G) \quad \text{rank}_{\mathbb{Z}}(M) \leq B_G \text{rank}_{\mathbb{Z}}(\text{core}(M_E)).$$

を示し、これから $\exists p, \exists E \in \Sigma_p(G)$ s.t. $c_{\mathbb{Z}G}(M) = c_{\mathbb{Z}E}(M_E)$

と次のように導いた。

 $\mathbb{Z}G$ -lattice M の極小射影分解を $(*)$ とすれば各 K_i に対して素数 p_i , $E_i \in \Sigma_{p_i}(G)$ が存在して

$$\text{rank } K_i \leq B_G \cdot \text{rank}(\text{core}(K_i E_i)).$$

 G の部分群は有限個しかないから $\{E_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ は有限集合である。よってある素数 p とある $E \in \Sigma_p(G)$ に対し

$$\text{rank } K_i \leq B_G \text{rank}(\text{core}(K_i E))$$

が無限個の i について成り立つ。

$$K_i E = L_i \oplus A_i, \quad L_i = \text{core}(K_i E), \quad A_i = \text{proj}(K_i E)$$

となく。このとき $\text{core}(M_E)$ の極小射影分解

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & Q_2 & \rightarrow & Q_1 & \rightarrow & Q_0 \rightarrow \text{core}(M_E) \rightarrow 0 \\ & & \searrow & & \nearrow & \searrow & \nearrow \\ & & L_1 & & L_0 & & \end{array}$$

で、

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & Q_2 \oplus A_2 \oplus A_1 & \rightarrow & Q_1 \oplus A_1 \oplus A_0 & \rightarrow & Q_0 \oplus A_0 \oplus \text{proj}(M_E) \rightarrow M_E \rightarrow 0 \\ & & \searrow & & \nearrow & \searrow & \nearrow \\ & & K_1 & & K_0 & & \end{array}$$

が (*) の E への制限であるようにとることができる。さて

$$\text{rank } P_{i+1} \leq |G| \text{rank } K_i, \text{rank } L_i \leq \text{rank } Q_i$$

であるから無限に多くの i に対して

$$\text{rank } P_{i+1} \leq B_G \cdot |G| \text{rank } Q_i.$$

よってある定数 λ に対して

$$\text{rank } P_i \leq \lambda \text{rank } Q_i$$

が十分大きなすべての i に対して成り立つ。ゆえに

$$c_{\mathbb{Z}G}(M) \leq c_{\mathbb{Z}E}(M_E).$$

$$\therefore c_{\mathbb{Z}G}(M) = c_{\mathbb{Z}E}(M_E).$$

定理 7 の証明の鍵は次の事実である。 $\mathbb{Z}G$ -lattice M と素数 p に対して

$$\sigma_p(M) = \text{rank}_{\widehat{\mathbb{Z}}_p}(\text{core}(\widehat{M}_p)),$$

$$\text{と置き} \quad \sigma(M) = \max_{p \mid |G|} \sigma_p(M)$$

と置く。

補題 8 次の条件を満たす定数 B_1 が存在する:

$\mathbb{Z}G$ -lattice M が射影的直和因子をもたなければ

$$\text{rank}_{\mathbb{Z}} M \leq B_1 \sigma(M).$$

この補題から定理 7 は定理 4 を用いて比較的容易に得られる。ここでは補題 8 の証明を略述して本稿を終わる。

M の通常指標を χ とする。 G の 1 でない任意の元 x に対して $|\chi(x)| \leq \sigma(M)$ である。 M が射影的直和因子をもたないことから、 $|G|$ のある素因数 q と直既約射影的 $\hat{\mathbb{Z}}_q G$ -lattice A があつて、 A の $\hat{M}_q$ における重複度が $\hat{\mathbb{Z}}_q G$ におけるそれよりも小さい。 $\eta_1, \dots, \eta_s$ と直既約射影的 $\hat{\mathbb{Z}}_q G$ 加群の指標とする。 $\mu_1 \eta_1 + \dots + \mu_s \eta_s$ ($\mu_i \in \mathbb{Z}$) を正則指標とする。

$\text{proj}(\hat{M}_q)$ の指標を $\chi_{\text{proj}} = \lambda_1 \eta_1 + \dots + \lambda_s \eta_s$ ($\lambda_i \in \mathbb{Z}$) とすればある j に対して $\lambda_j < \eta_j$ である。 G の 1 でない任意の元 x に対して

$$\frac{1}{\sigma(M)} \left| \sum_{i=1}^s \lambda_i \eta_i(x) \right| \leq 2$$

を得る。

$\{1 = x_1, x_2, \dots, x_r\}$ と G の q 正則共役類の代表系とする。

(Δ, r) 行列 $H = (\eta_i(x_j))$ の階数は Δ である。

$$T = \{ (y, 0, \dots, 0) \in K^r \mid y \in K \}$$

$$U = \{ (y_1, \dots, y_r) \in K^r \mid y_1 = 0, |y_i| \leq 2 \ \forall i \}$$

とおく。ここで K は G の分解体 ($\subset \mathbb{C}$) である。 $\eta_i(x_j)$ と K の元とみる。

$$\frac{1}{\sigma(M)} (\lambda_1, \dots, \lambda_s) H \in T + U$$

$$K(\mu_1, \dots, \mu_s) H = T$$

である。 H の階数が s であるから、 (r, s) 行列 X で $HX = E_s$ となるものがある。 $(T+U)X$ の各点と直線 $K(\mu_1, \dots, \mu_s)$ との距離は有界である。 d とその上界とし、 $c \in K$ と

$$d\left(\frac{1}{\sigma(M)} (\lambda_1, \dots, \lambda_s), c(\mu_1, \dots, \mu_s)\right) \leq d$$

なるものとする。このとき各 j に対して $\left|\frac{1}{\sigma(M)} \lambda_j - \mu_j\right| \leq d$ である。一方ある j に対して $0 \leq \lambda_j < \mu_j$, $\sigma(M) \geq 1$ であるから

$$|c| \leq 2 + \frac{d}{\mu_j} \leq 2 + \max\left\{\frac{1}{\mu_1}, \dots, \frac{1}{\mu_s}\right\} \cdot d$$

と得るが、右辺の値は q のみによって定まる値である。よって $\frac{1}{\sigma(M)} (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ は K^s の有界領域にある。従ってある定数 b_q に対して

$$\max\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\} \leq b_q \sigma(M)$$

となる。

$f_q = \eta_1(1) + \dots + \eta_s(1)$ とおき他の素数 p に対しても同様に b_p, f_p を定義し

$$B_1 = 1 + \max\{b_p f_p \mid p \mid |G|\}$$

とおけばよい。

文 献

- [1] J.Alperin and L.Evens, Representations, resolutions and Quillen's dimension theorem, J.Pure Appl. Algebra 22(1981) 1-9.
- [2] J.Alperin, Periodicity in groups, Illinois J. Math. 21 (1977) 776-783.
- [3] J.F.Carlson, The dimensions of modules and their restrictions over modular group algebras, J.Pure Appl. Algebra 22 (1981) 43-56.
- [4] J.F.Carlson, The complexity and varieties of modules, in Springer Lecture Note Ser.882 Integral Representations and Applications, 415-422.
- [5] J.F.Carlson, Complexity and Krull dimension, in Springer Lecture Note Ser.903 Representations of Algebra, 62-67.
- [6] L.G.Chouinard, Projectivity and relative projectivity over group rings, J.Pure Appl. Algebra 7 (1976) 278-302.
- [7] A.Dress, Vertices of Integral representations, Math. Z. 114 (1970) 159-169.
- [8] K.W.Gruenberg, Relation modules of finite groups, Amer. Math. Soc. Regional Conf. Ser. 25 (1975).
- [9] O.Talleli, On cohomological periodicity of ZG-lattices, Math. Z. 169 (1979) 119-126.
- [10] P.J.Webb, Bounding the ranks of ZG-lattices by their restrictions to elementary abelian subgroups, J. Pure Appl. Algebra (1982) 311-318.