

Classification of log del Pezzo surfaces of index three

明治大学 研究知財・戦略機構 安武和範*

Kazunori Yasutake (Meiji University)

概要

本稿では, $\mathbb{Q}$ -ゴレンシュタイン指数が 3 である対数的デルペッツォ曲面の分類の概略を述べる. 本稿の内容は京都大学の藤田健人氏との共同研究 [3] に基づく.

目次

1	はじめに	1
2	指数 3 の対数的端末曲面特異点	2
2.1	重み付き双対グラフの定義	2
2.2	指数 3 の対数的端末曲面特異点の重み付き双対グラフ	3
3	作戦	3
4	0 次元解消の例	7
5	中間三重組	12
6	底四重組	13

1 はじめに

定義体の標数は任意とする. 高々対数的端末特異点をもつ正規射影代数曲面 S は, 反標準因子 $-K_S$ が豊富な $\mathbb{Q}$ -カルティエ因子であるとき, 対数的デルペッツォ曲面と呼ばれる. 対数的デルペッツォ曲面は有理曲面であることが知られている [4]. 対数的デルペッ

tz13008@meiji.ac.jp

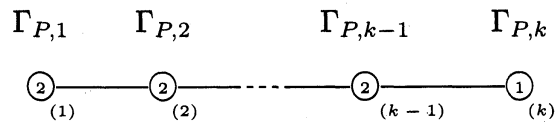
ツォ曲面 S に対して, ($\mathbb{Q}$ -ゴレンシュタイン) 指数 $i(S)$ が次で定義される:

$$i(S) := \min\{a \in \mathbb{N} \mid -aK_S \text{ はカルティエ因子}\}.$$

$i(S) \leq 2$ となるときは完全に分類がされている ([1] 事実 1.1 を参照). 本稿の目的は, [1] の 1,2 章で述べられている作戦に沿って $i(S) = 3$ である対数的デルペッツォ曲面の分類を与えることである.

記法. 双有理写像 $M \dashrightarrow S$ と S 内の曲線 C に対して, C の M における狭義変換を C^M で表す.

Δ_X を $(\nu 1)$ -条件を満たす非特異射影曲面 X の 0 次元部分スキームとし, $\psi: Z \rightarrow X$ を Δ_X の 0 次元解消とする (定義は [1] の 1.3 節をみよ). $P \in \Delta_X$ において $\text{mult}_P \Delta_X = k$ であるとき, 0 次元解消で現れる P 上の例外曲線を $\Gamma_{P,1}, \dots, \Gamma_{P,k}$ で表す. ここで, 添字の数字は相対標準因子 $K_{Z/X}$ の重み付き双対グラフのうち P の上空にあるものが



となるように定める (重み付き双対グラフの定義については 2.1 節にある).

他, 本稿で用いる記法は [1] および [3] に従う.

2 指数 3 の対数的端末曲面特異点

本章では, $i(S) = 3$ である対数的デルペッツォ曲面の研究において重要であった, 指数 3 の対数的端末曲面特異点の重み付き双対グラフの分類を与える.

2.1 重み付き双対グラフの定義

まず, 重み付き双対グラフについて復習する. S を非特異射影曲面, $E = \sum w_j D_j$ を S 上の有効因子で単純正規交叉 (simple normal crossing) かつ全ての j について $w_j > 0$ とする. E の重み付き双対グラフは以下で定義される.

各既約成分 D_j に対応して頂点 v_j を置く. D_i と D_j が m 点で交わるとき, v_i と v_j を m 本の直線で結ぶ. 既約成分 D に対応する頂点 v に対して, v の重み w を $w := \text{coeff}_D E$ とし, $v_{(w)}$ と書く. さらに D が $(-n)$ -曲線 ($C \cong \mathbb{P}^1$ かつ $C^2 = -n$) であるとき, 頂点を

$\odot_{(w)}$ と表す.

2.2 指数 3 の対数的端末曲面特異点の重み付き双対グラフ

$P \in S$ を指数 3 の対数的端末曲面特異点でゴレンシュタインでないもの, $\alpha: M \rightarrow S$ を $P \in S$ の極小特異点解消とする. $-3K_{M/S}$ の重み付き双対グラフは表 1 のいずれかになる. 証明については, $\mathbb{C}$ 上では [5], 任意標数では [3] をみていただきたい.

注意 2.1. 重み付き双対グラフから得られる情報のうち, 次の 3 点は特に頻繁に用いた.

1. $n \geq 4$ のとき, $(-n)$ -曲線の重みは必ず 2 である.
2. (-3) -曲線が重み 1 で現れるときは, それ自身が連結成分となる.
3. 重みが 1 の曲線同士が互いに交わることはない.

3 作戦

藤田氏の解説 [1] の 1,2 章において述べられている作戦を, $i(S) = 3$ の場合に合わせた形で述べる.

S を $i(S) = 3$ である対数的デルペッツォ曲面とし, $\alpha: M \rightarrow S$ を極小特異点解消とする. $L_M := \alpha^*(-3K_S)$, $E_M := -3K_{M/S} = -3K_M - L_M$ とおくと, L_M はネフかつ巨大な因子, E_M は有効因子となる. S は少なくとも 1 つは非標準的な対数的端末特異点を持つので, E_M は非零であることに注意しておく. M は有理曲面であるため, 射影平面 $\mathbb{P}^2$ もしくはヒルツェブルフ曲面 $\mathbb{F}_n := \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))$, ($\exists n \geq 0$) のブローアップを繰り返すことで得られるが, もし M 自身が $\mathbb{P}^2$ か $\mathbb{F}_n$ であれば, $S \cong \mathbb{P}(1, 1, 3)$ または $\mathbb{P}(1, 1, 6)$ であることがわかる.

以下では, S は $\mathbb{P}(1, 1, 3)$ でも $\mathbb{P}(1, 1, 6)$ でもないとしよう. このとき, $K_M + L_M$ はネフであり, さらに $(K_M + L_M) \cdot L_M > 0$ を満たすことが確認できるため ([3] Prop.3.4), (M, E_M) は [1] における $(3, 1)$ -基礎対になる ([3] では 3-basic pair とよんでいる). 逆に $(3, 1)$ -基礎対は皆, $i(S) = 3$ である対数的デルペッツォ曲面の極小特異点解消として得られるので ([3] Prop.3.4), $(3, 1)$ -基礎対を全て分類してしまえばよいということになる.

[1] より, $(3, 1)$ -基礎対 (M, E_M) から, $2K_M + L_M$ (の狭義変換) との交点数が負である (-1) -曲線を全てつぶしていくことにより (それらの合成を $\phi: M \rightarrow Z$ とおこう), 長さ 1 の $(3, 1)$ -擬基礎多重組 $(Z, E_Z; \Delta_Z)$ が得られる. ここで, E_Z は E_M の Z における狭義変換, Δ_Z は ϕ に対応する 0 次元スキームである. L_Z を $(Z, E_Z; \Delta_Z)$ の基本因子と

表1 $-3K_{M/S}$ の重み付き双対グラフ.

Symbol	Graph
$A_1(1)$	
$A_1(2)$	
$A_2(1, 2)$	
$A_2(2, 2)$	
$A_3(1, 1)$	
$A_3(1, 2)$	
$A_3(2, 2)$	
$A_t(1, 1)$	
$A_t(1, 2)$	
$A_t(2, 2)$ ($t \geq 4$)	
$D_4(1)$	
$D_4(2)$	
$D_t(1)$	
$D_t(2)$ ($t \geq 5$)	

($A_n(l, m)$ (resp. $D_n(m)$) の双対グラフは A_n (resp. D_n) 型である.)

する ($L_Z = -3K_Z - E_Z$ が成り立つ). もし $2K_Z + L_Z$ がネフでなければ, $(Z, E_Z; \Delta_Z)$ は長さ 1 の $(3, 1)$ -基礎多重組になる. もし $2K_Z + L_Z$ がネフであれば, さらに $3K_Z + L_Z$ (の狭義変換) との交点数が負である (-1) -曲線を全てつぶしていくことにより (それらの合成を $\psi: Z \rightarrow X$ とおこう), 長さ 2 の $(3, 1)$ -基礎多重組 $(X, E_X; \Delta_Z, \Delta_X)$ が得られる. ここで, E_X は E_Z の X における狭義変換, Δ_X は ψ に対応する 0 次元スキームである. 以上の議論をまとめると, $(3, 1)$ -基礎対 (M, E_M) からは次のいずれかが得られることがわかった.

1. 長さ 1 の $(3, 1)$ -基礎多重組 $(Z, E_Z; \Delta_Z)$.
2. 長さ 2 の $(3, 1)$ -基礎多重組 $(X, E_X; \Delta_Z, \Delta_X)$.

注意として, 1. と 2. のいずれが得られるかは, (-1) -曲線をつぶす順序によらずに (M, E_M) のみによって決まる. また, 錐定理により Z, X はともに $\mathbb{P}^2$ もしくは $\mathbb{F}_n$ のいずれかであり, それぞれ $(2K_Z + L_Z) \cdot l < 0$, $(3K_X + L_X) \cdot l < 0$ を満たす. ここで, l は $\mathbb{P}^2$ の時は直線, $\mathbb{F}_n$ のときは $\mathbb{P}^1$ -束のファイバーを表す. 他方, 長さ 1 の $(3, 1)$ -基礎多重組 $(Z, E_Z; \Delta_Z)$ (resp. 長さ 2 の $(3, 1)$ -基礎多重組 $(X, E_X; \Delta_Z, \Delta_X)$) から Δ_Z (resp. Δ_X と Δ_Z) の 0 次元解消を行うことで $(3, 1)$ -基礎対が復元できる.

ゆえに, 目標である $i(S) = 3$ の対数的デルペッツォ曲面の分類は, 長さが 1 もしくは 2 である $(3, 1)$ -基礎多重組の分類に帰着された. よって, 残るは $(3, 1)$ -基礎多重組を全て分類するだけであるのだが, 次に見るように, 複数の $(3, 1)$ -基礎多重組が 0 次元解消により同じ $(3, 1)$ -基礎対を与えるといったことがたびたび起こる.

例 3.1. $X = \mathbb{P}^2$, $E_X = l_1 + l_2 + l_3$ とする. ここで l_i は直線, $l_1 \cap l_2 \cap l_3 = \emptyset$, $P_{ij} := l_i \cap l_j$, $P_{ij} \notin \Delta_X$ とする. さらに, $\deg(\Delta_X \cap l_i) = 2$ かつ $\Delta_X \subset l_1 \cup l_2 \cup l_3$ とする. このとき, $\psi: Z \rightarrow X$ を Δ_X の 0 次元解消とすると, $E_Z = l_1^Z + l_2^Z + l_3^Z$ となる. $Q_{ij} = l_i^Z \cap l_j^Z$, $\Delta_Z = \{Q_{ij} | 1 \leq i < j \leq 3\}$ とおくと, $(X, E_X; \Delta_Z, \Delta_X)$ は長さ 2 の $(3, 1)$ -基礎多重組になっている. 今, $\rho(Z) = 7$, $(l_1^Z)^2 = -1$ であるので, 双有理射 $\psi': Z \rightarrow X' = \mathbb{P}^2$ で $\psi'_*(l_1^Z) = 0$ となるものがとれる. 特に, $E_{X'} := \psi'_* E_Z = \psi'_*(l_2^Z + l_3^Z)$ は高々 2 つしか既約成分を持たない. ψ に対応した 0 次元スキーム $\Delta_{X'}$ をとれば, $(X', E_{X'}; \Delta_Z, \Delta_{X'})$ も長さ 2 の $(3, 1)$ -基礎多重組になっていることが確認できるが, 構成法より 2 つは共通の $(3, 1)$ -基礎対に対応する.

このようなリスト内での”重複”をできるだけ排除するために, 中間三重組 (median triplet) と底四重組 (bottom tetrad) というものを導入しよう.

定義 3.2.

(1) 長さ 1 の $(3, 1)$ -基礎多重組 $(Z, E_Z; \Delta_Z)$ が中間三重組であるとは, $K_Z + L_Z$ が巨大であるか, もしくは, $Z = \mathbb{F}_n$ かつ $K_Z + L_Z$ が巨大でなく次の条件を満たすこととする.

- (a) $\Delta_Z \cap \sigma = \emptyset$, ここで $\sigma \subset Z$ は *minimal section*. 特に $n = 0$ であれば $\Delta_Z = \emptyset$.
- (b) E_Z が $\mathbb{F}_n/\mathbb{P}^1$ の切断 D を含むとき, $\sigma \leq E_Z$ かつ $\text{coeff}_\sigma E_Z \geq \text{coeff}_D E_Z$ を満たす.
さらに, $\text{coeff}_\sigma E_Z = \text{coeff}_D E_Z$ であれば $n + D^2 \geq \deg(\Delta_Z \cap D)$ を満たす.

(2) 長さ 2 の $(3, 1)$ -基礎多重組 $(X, E_X; \Delta_X)$ は次のいずれかを満たすとき底四重組と呼ばれる.

(A) $2K_X + L_X$ は巨大.

(B) X は $\mathbb{F}_n$, $2K_X + L_X$ は非自明であり射影 $\mathbb{F}_n \rightarrow \mathbb{P}^1$ に関して自明, さらに次を満たす:

(B1) $\Delta_X \cap \sigma = \emptyset$, ここで $\sigma \subset X$ は *minimal section*. 特に $n = 0$ であれば $\Delta_X = \emptyset$.

(B2) $\sigma \not\leq E_X$ もしくは $n = 0$ とするとき, 任意の $\mathbb{F}_n/\mathbb{P}^1$ の切断 $D \leq E_X$ は $(D^2) \geq \deg(\Delta_X \cap D)$ を満たす.

(B3) $\sigma \leq E_X$ かつ $n \geq 1$ とする. このとき, 任意の $\mathbb{F}_n/\mathbb{P}^1$ の切断 $D \leq E_X$ は $n + (D^2) \geq \deg(\Delta_X \cap D)$ を満たす.

(C) $2K_X + L_X$ は自明であって, $X \simeq \mathbb{P}^2$ であるか, $\Delta_X = \emptyset$ かつ $X \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $\mathbb{F}_2$ のいずれかとする. さらに, $X \simeq \mathbb{P}^2$ であれば次も満たすとする.

(C1) $E_X = C + l$ とする. ここで C は非特異 2 次曲線で l は直線を表す. このとき, $\Delta_X \cap C \cap l \neq \emptyset$ を満たす. さらに, $|C \cap l| = \{P\}$ かつ $\deg(\Delta_X \setminus \{P\}) \geq 4$ であれば $\Delta_X \cap l \setminus \{P\} \neq \emptyset$ となる.

(C2) $E_X = l_1 + l_2 + l_3$ とする. ここで l_1, l_2, l_3 は異なる直線を表す. このとき, $l_1 \cap l_2 \cap l_3 = \emptyset$ かつ $\#|\Delta_X \cap ((l_1 \cap l_2) \cup (l_1 \cap l_3) \cup (l_2 \cap l_3))| \geq 2$ を満たす.

(C3) $E_X = 2l_1 + l_2$ とする. ここで l_1, l_2 は異なる直線を表す. $P := l_1 \cap l_2$ とおく. このとき, 次が成り立つ.

(a) $\#|\Delta_X \cap l_1 \setminus \{P\}| \leq 1$. さらに, もし $\{P_1\} = |\Delta_X \cap l_1 \setminus \{P\}|$ であれば, $\text{mult}_{P_1} \Delta_X \leq 2$ かつ $\text{mult}_P \Delta_X = \text{mult}_P(\Delta_X \cap l_2)$ を満たす.

(b) もし $\deg \Delta_X = 4$ であれば, $\deg(\Delta_X \cap l_2) = 3$ を満たす.

(c) $\deg \Delta_X \geq 5$ かつ $\{P_1\} = |\Delta_X \cap l_1 \setminus \{P\}|$ であれば, $\text{mult}_{P_1}(\Delta_X \cap l_1) = 2$ か $\deg(\Delta_X \cap l_1) = 1$ のいずれかが成り立つ.

[3] の Theorem 3.12 および Lemma 5.1-5.3 より, $(3, 1)$ -基礎多重組は中間三重組や底四重組へ取り替えることができる.

命題 3.3.

- (1) 長さ 1 の $(3, 1)$ -基礎多重組 $(Z, E_Z; \Delta_Z)$ に対して, 同じ $(3, 1)$ -基礎対を与える中間三重組 $(Z', E_{Z'}, \Delta_{Z'})$ が存在する.
- (2) 長さ 2 の $(3, 1)$ -基礎多重組 $(X, E_X; \Delta_Z, \Delta_X)$ に対して, 同じ $(3, 1)$ -基礎対を与える底四重組 $(X', E_{X'}; \Delta_Z, \Delta_{X'})$ が存在する.

証明は [3] の 3 章および 5 章をみていただきたい.

以上をまとめると, $i(S) = 3$ の対数的デルペッツォ曲面の分類は, 中間三重組や底四重組の分類により得られることまでわかった. 中間三重組や底四重組の定義は一見すると複雑であるが, 実際に分類を行おうとすると, $(3, 1)$ -基礎多重組に比べて考察すべき数がずっと少なくなるために非常に有効である. また, 例でみたように一般には複数の $(3, 1)$ -基礎多重組が同一の対数的デルペッツォ曲面に対応することもあるが, 中間三重組や底四重組に対しては, その”型”が違えば異なる対数的デルペッツォ曲面を与えることもわかっている (詳しくは [3] の 10 章を参照).

注意 3.4. 底四重組の (C) の条件は最も複雑である. 例えば, $(C2)$ は例 3.1 にあるようなかぶりを排除するための条件となっている. これらは, まず, 長さ 2 の $(3, 1)$ -基礎多重組を全て分類した後に, そのリストのかぶりをできるだけ減らしていくといった作業の末に生まれた条件である. よって, 現状では指数が 3 の場合に限ったものであり, 残念なことに, 指数が 4 以上のときはこの部分をどのように一般化するかについて全く見通しは立っていない.

4 0 次元解消の例

前章より, 我々の目的は中間三重組や底四重組の分類に絞られたのだが, その分類をよりスムーズに行うためには, そこで現れる 0 次元解消についてあらかじめ考察しておくことが必要である. 本章ではそのような 0 次元解消の例をいくつか述べる. より詳しくは [1] の 1.3 節, [2] の 2 章や [3] の 4 章や [4] の 2 章をみていただきたい.

まず中間三重組の場合から述べる.

例 4.1. $(Z, E_Z; \Delta_Z)$ を中間三重組, $Q \in \Delta_Z$, $\phi: M \rightarrow Z$ を Δ_Z の 0 次元解消, (M, E_M)

を対応する $(3, 1)$ -基礎対とする. このとき, $E_M = \phi^* E_Z - 2K_{M/Z}$ となることに注意しておく.

(1) Q の周りで $E_Z = sl$ ($s \geq 1$) かつ $Q \in l$ は非特異としよう. もし $s \geq 3$ であれば, E_M は l^M を係数 s で含むため矛盾. もし $s = 1$ であれば, E_M が有効因子となるためには $\Delta_Z = \emptyset$ でなければならない. よって $s = 2$ がわかる. このとき, Q の周りでは, $\Delta_Z \subset l$ かつ $E_M = 2l^M$ となる.

(2) Q の周りで $E_Z = s_1 l_1 + s_2 l_2$ ($s_i \geq 1$), $Q \in l_i$ は非特異, l_1 と l_2 は Q において横断的に交わるとしよう. $s_1 \geq s_2 \geq 1$ とすると, (1) と同様に考えることにより $s_1 \leq 2$ であることがわかる.

$(s_1, s_2) = (1, 1)$ の時を考える. $(\nu 1)$ -条件より $\text{mult}_Q(\Delta_Z \cap l_2) = 1$ としてよい. もし $\text{mult}_Q(\Delta_Z \cap l_1) \geq 2$ であれば E_M は有効因子にならないため, $\text{mult}_Q(\Delta_Z \cap l_1) = 1$ がわかる. よって, $\text{mult}_Q \Delta_Z = 1$ かつ Q の上空では $E_M = l_1^M + l_2^M$ となる. 対応する重み付き双対グラフは

$$\begin{array}{ccc} l_1^M & & l_2^M \\ \bigcirc_{(1)} & \sqcup & \bigcirc_{(1)} \end{array}$$

である.

次に $(s_1, s_2) = (2, 1)$ の時を考える. $\text{mult}_Q(\Delta_Z \cap l_2) = 1$ とし, $\mu_1 : M_1 \rightarrow Z$ を Q でのブローアップ, $\Gamma_{Q,1}$ をその例外曲線とする. このとき, $\Gamma_{Q,1}^M, l_2^M \leq E_M$, $\text{coeff}_{\Gamma_{Q,1}^M} E_M = \text{coeff}_{l_2^M} E_M = 1$ かつ $\Gamma_{Q,1}^M$ と l_2^M は交わる. つまり, E_M の重み付き双対グラフは部分グラフとして

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_{Q,1}^M & & l_2^M \\ \bigcirc_{(1)} & \text{---} & \bigcirc_{(1)} \end{array}$$

を含む. これは, 対数的端末特異点の分類に反する (係数が 1 のものが互いに交わることはない). よって, $(\nu 1)$ -条件から $\text{mult}_Q(\Delta_Z \cap l_1) = 1$ かつ $\text{mult}_Q(\Delta_Z \cap l_2) \geq 2$ となる. $\Gamma_{Q,1}$ と $l_2^{M_1}$ との交点を Q_1 とし, $\mu_2 : M_2 \rightarrow M_1$ を Q_1 でのブローアップとする. このとき, $l_2^{M_2}$ は E_M の狭義変換の連結成分となる. (1) と合わせると, $\text{mult}_Q \Delta_Z = \text{mult}_Q(\Delta_Z \cap l_2) = 2$ となることがわかる. E_M の重み付き双対グラフは Q の上空で

$$\begin{array}{ccccc}
 l_1^M & & \Gamma_{Q,1}^M & & l_2^M \\
 \bigcirc_{(2)} & \text{---} & \textcircled{2}_{(1)} & \sqcup & \bigcirc_{(1)}
 \end{array}$$

となる.

最後に $(s_1, s_2) = (2, 2)$ の時を考える. $(\nu 1)$ -条件より $\text{mult}_Q(\Delta_Z \cap l_2) = 1$ としてよい. E_M が (-1) -曲線を含まないことや 0 次元解消の性質 ([4] Lemma 2.3) を用いることで $\text{mult}_Q \Delta_Z = \text{mult}_Q(\Delta_Z \cap l_1) + 1$ となることがわかる. 対応する重み付き双対グラフは Q の上空で

$$\begin{array}{ccccccc}
 l_1^M & & \Gamma_{Q,1}^M & & \Gamma_{Q,k-1}^M & & l_2^M \\
 \bigcirc_{(2)} & \text{---} & \textcircled{2}_{(2)} & \text{---} & \textcircled{2}_{(2)} & \text{---} & \bigcirc_{(2)}
 \end{array}$$

である. ここで, $k = \text{mult}_Q \Delta_Z$ である. [3] においては l_1 と l_2 が $Q \in l_i$ で接する場合など他の場合にも考察をしている.

次に底四重組の場合をみる.

例 4.2. $(X, E_X; \Delta_Z, \Delta_X)$ を底四重組, $P \in \Delta_X$, $\psi: Z \rightarrow X$ を Δ_X の 0 次元解消, $(Z, E_Z; \Delta_Z)$ を対応する長さ 1 の $(3, 1)$ -擬基礎多重組とする. このとき, $E_Z = \psi^* E_X - K_{Z/X}$ となることに注意しておく.

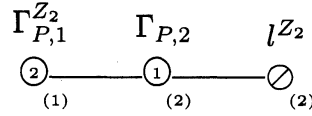
(1) P の周りで $E_X = sl$ ($s \geq 1$) かつ $P \in l$ で非特異としよう. もし $s \geq 3$ であれば, E_M は l^M を係数 s で含むため矛盾. $s = 1$ であれば, $\Delta_X \subset l$ かつ $E_Z = l^Z$ となる. さらに, Example 4.1 より P の上空では $\Delta_Z = \emptyset$ がわかる.

以下では $s = 2$ の時を考える. まず, $\text{mult}_P(\Delta_X \cap l) \leq 2$ となることを背理法で示す. そのため, $\text{mult}_P(\Delta_X \cap l) \geq 3$ としよう. $\mu_1: Z_1 \rightarrow X$ を P でのブローアップ, $\Gamma_{P,1}$ をその例外曲線, $E_{Z_1} = \mu_1^*(E_X) - \Gamma_{P,1}$ とする. このとき, $\text{coeff}_{\Gamma_{P,1}} E_{Z_1} = 1$ である. P の上空にある E_{Z_1} に対応する重み付き双対グラフを書くと

$$\begin{array}{ccc}
 \Gamma_{P,1} & & l^{Z_1} \\
 \textcircled{1}_{(1)} & \text{---} & \bigcirc_{(2)}
 \end{array}$$

となっている. P_1 を $\Gamma_{P,1}$ と l^{Z_1} の交点とし, $\mu_2: Z_2 \rightarrow Z_1$ を P_1 でのブローアップ, $\Gamma_{P,2}$ をその例外曲線, $E_{Z_2} = \mu_2^*(E_{Z_1}) - \Gamma_{P,2}$ とする. このとき, $\text{coeff}_{\Gamma_{P,2}} E_{Z_2} = 2$ である.

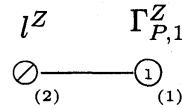
E_{Z_2} に対応する重み付き双対グラフは P の上空で



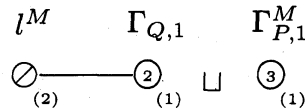
である. この議論から, $\text{mult}_P(\Delta_X \cap l) \geq 3$ であれば, E_M は係数が 3 以上の既約成分を持つため矛盾. よって $\text{mult}_P(\Delta_X \cap l) \leq 2$ が得られた.

$\text{mult}_P(\Delta_X \cap l) = 1$ のとき, $\text{mult}_P \Delta_X \leq 2$ となることを背理法で示す. そのため, $\text{mult}_P \Delta_X \geq 3$ としよう. このとき, Δ_X の Z_1 での弱変換 ([4] Definition 2.1) を Δ_{Z_1} で表せば, $\deg(\Delta_{Z_1} \cap \Gamma_{P,1}) = \text{mult}_P \Delta_X - 1 \geq 2$ となるため, $P_1 \in (\Delta_{Z_1} \cap \Gamma_{P,1}) \setminus l^{Z_1}$ がとれる. $\mu_2 : Z_2 \rightarrow Z_1$ を P_1 でのブローアップ, $\Gamma_{P,2}$ をその例外曲線とすると, $\text{coeff}_{\Gamma_{P,2}} E_{Z_2} = 0$ である. この議論を続けることで, $\text{mult}_P \Delta_X \geq 3$ であれば E_M は有効因子になれず矛盾することがわかる. よって $\text{mult}_P \Delta_X \leq 2$ が得られた.

もし $\text{mult}_P \Delta_X = 1$ であれば, $(\Gamma_{P,1})^2 = -1$ かつ $\Gamma_{P,1} \leq E_Z$ より $\deg(\Delta_Z \cap \Gamma_{P,1}) \neq 0$ でなければならない. ここで, E_Z に対応する重み付き双対グラフは

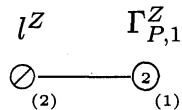


であった. Example 4.1 を用いることで, $\text{supp} \Delta_Z \cap \Gamma_{P,1} = l^Z \cap \Gamma_{P,1} =: Q$, $\text{mult}_Q \Delta_Z = \text{mult}_Q(\Delta_Z \cap \Gamma_{P,1}) = 2$, $\text{mult}_Q(\Delta_Z \cap l^Z) = 1$ がわかる. このとき, E_M に対応する重み付き双対グラフは P の上空で

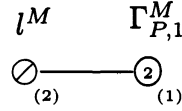


となる.

$\text{mult}_P \Delta_X = 2$ であるとき, $(\Gamma_{P,1}^{Z_2})^2 = -2$ である. これから E_Z に対応する重み付き双対グラフは P の上空では



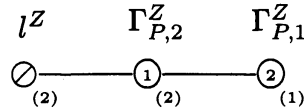
であることがわかる. 仮に Δ_Z が P の上空の点 Q を含むとすると, Example 4.1 より $Q \in l^{Z_2} \cap \Gamma_{P,1}^{Z_2}$ でなければならない. しかしながら, $\phi: M \rightarrow Z$ を Δ_Z の 0 次元解消とすれば, $(\Gamma_{P,1}^M)^2 = -4$ かつ $\text{coeff}_{\Gamma_{P,1}^M} E_M = 1$ となるため矛盾. よって P の上空では $\Delta_Z = \emptyset$ である. E_M に対応する重み付き双対グラフは P の上空で



である.

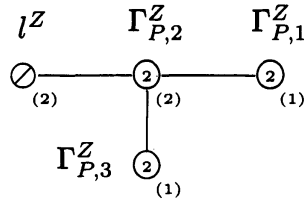
$\text{mult}_P(\Delta_X \cap l) = 2$ のとき, $\text{mult}_P \Delta_X \leq 4$ となることが上と同様にしてわかる.

$\text{mult}_P \Delta_X = 2$ のとき, $P_1 = \Gamma_{P,1} \cap l^{Z_1}$ でのブローアップを $\mu_2: Z_2 \rightarrow Z_1$, その例外曲線を $\Gamma_{P,2}$ と改めておきなおすと, $\text{coeff}_{\Gamma_{P,2}^Z} E_Z = 2$ である. E_Z の重み付き双対グラフで P の上空にあるものをみると,



となっている. このとき, Example 4.1 より P の上空では $\text{supp} \Delta_Z \subset \Gamma_{P,2}^Z$ でなければならないが, 対数的端末特異点の分類をみると, P の上空で $\deg(\Delta_Z \cap \Gamma_{P,2}^Z) = 2$ となることがわかる (重さが 2,2,1 と直線で並ぶ所に注目).

$\text{mult}_P \Delta_X = 4$ のときを考える. Δ_{Z_2} で Δ_X の Z_2 での弱変換とし, $P_2 \in \Delta_{Z_2}$ をとる. P_2 でのブローアップを $\mu_3: Z_3 \rightarrow Z_2$, その例外曲線を $\Gamma_{P,3}$ とおく. Z において $(\Gamma_{P,2}^Z)^2 = -2$ であり, $\Gamma_{P,2}^Z$ はちょうど 3 つの曲線 $l^Z, \Gamma_{P,1}^Z, \Gamma_{P,3}^Z$ と交わる. 特に, E_Z の重み付き双対グラフは P の上空で



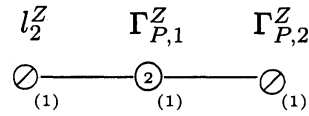
という形をしている. このとき, Example 4.1 より $\Gamma_{P,2}^M$ もまたちょうど 3 つの曲線と交わり, その曲線のうちいずれか一つは E_M の中で係数が 2 で現れるため, 対数的端末特異点の分類より P の上空で $\Delta_Z = \emptyset$ となることがわかる.

最後に $\text{mult}_P \Delta_X = 3$ が起こらないことを確認する. このときも上のように考えると

$\Delta_Z = \emptyset$ となるが, $\Gamma_{P,3}^M$ は $(\Gamma_{P,3}^M)^2 = -1$ かつ $\text{coeff}_{\Gamma_{P,3}^M} E_M = 1$ となるため矛盾する. よって $\text{mult}_P \Delta_X = 3$ が起こらないことがわかる.

(2) P の周りで $E_X = s_1 l_1 + s_2 l_2$ ($s_i \geq 1$), $P \in l_i$ は非特異, l_1 と l_2 は P において横断的に交わるとしよう. さらに $s_1 \geq s_2 \geq 1$ としておく. このとき, $s_1 \leq 2$ である.

$(s_1, s_2) = (1, 1)$ の時のみ考えよう. $(\nu 1)$ -条件より $\text{mult}_P(\Delta_X \cap l_2) = 1$ としてよい. $\mu_1 : Z_1 \rightarrow X$ を P でのブローアップ, $\Gamma_{P,1}$ をその例外曲線とする. もし $\text{mult}_P(\Delta_X \cap l_1) \geq 2$ であれば, $\Gamma_{P,1}^Z$ は $(\Gamma_{P,1}^Z)^2 = -2$ かつ $\text{coeff}_{\Gamma_{P,1}^Z} E_Z = 1$ を満たし, さらに, E_Z の異なる 2 つの既約成分で係数が 1 となるものと交わる. つまり, E_Z の重み付き双対グラフは部分グラフとして



を含む. 対数的端末特異点の分類 (重さが 1 のものは互いに交わらない) ことに注意すれば, $\deg(\Delta_Z \cap \Gamma_{P,1}^Z) = 2$ でないといけないが, このとき $\Gamma_{P,1}^M$ は $(\Gamma_{P,1}^M)^2 = -4$ かつ $\text{coeff}_{\Gamma_{P,1}^M} E_M = 1$ となってしまう矛盾. よって, $\text{mult}_P(\Delta_X \cap l_1) = 1$ でなければいけない. 同様に考えていくと, $\text{mult}_P \Delta_X = 1$, $\deg \Delta_Z = 2$ かつ $\text{supp} \Delta_Z$ は 2 点 $l_1^Z \cap \Gamma_{P,1}^Z$ と $l_2^Z \cap \Gamma_{P,1}^Z$ よりなることもわかる.

残る場合は [3] の Lemma 4.7 をみてほしい.

5 中間三重組

ここでは中間三重組 $(Z, E_Z; \Delta_Z)$ の一例として, $Z = \mathbb{P}^2$ のときをみる. l を直線とし, $L_Z \sim hl$, $E_Z \sim dl$ としよう. $K_Z + L_Z \sim (h-3)l$ がネフかつ $(K_Z + L_Z) \cdot L_Z = (h-3)h > 0$ より $h \geq 4$. さらに, $2K_Z + L_Z \sim (h-6)l$ がネフではないので, $h \leq 5$ となり, 上と合わせると $h = 4, 5$ が得られた. 以下では $h = 5$ のときのみを考えるが, $h = 4$ のときも全く同じようにできる.

$h = 5$ のとき, $3K_Z + L_Z = -E_Z$ より $d = 4$ となる.

命題 5.1. $C \leq E_Z$ を被約既約成分とすると, $\deg C \leq 2$ かつ $\text{mult}_C E_Z = 2$ となる. 特に, C は非特異である.

証明. $\deg C = d$ とする. $\phi: M \rightarrow Z$ を Δ_Z の 0 次元解消とする. $C^2 - (C^M)^2 =$

$L_Z \cdot C + 2p_a(C) - 2p_a(C^M)$ が成り立つ. 実際, $\Delta_Z = \{Q\}$, $\text{mult}_Q C = m$ のときは, 左辺は m^2 になる. また, $2p_a(C) - 2p_a(C^M) = m(m-1)$ である. $K_M + L_M = \phi^*(K_Z + L_Z)$ と $C^M \cdot L_M = 0$ に注意すると, $m = C^M \cdot (K_M - \phi^* K_Z) = C^M \cdot (\phi^* L_Z - L_M) = C \cdot L_Z$ となるので $C^2 - (C^M)^2 = L_Z \cdot C + 2p_a(C) - 2p_a(C^M)$ が確認された. 一般の場合も同様にできる. C^M が $\mathbb{P}^1$ であるので, $d^2 - (C^M)^2 = 5d + d(d-3) + 2$ となり, $(C^M)^2 = -2 - 2d \leq -4$ が得られる. 対数的末端特異点の分類より $\text{coeff}_C E_Z = 2$ がわかり, 命題が示された. $\square$

上の命題より (A) $E_Z = 2l_1 + 2l_2$, l_1, l_2 は異なる直線, もしくは (B) $E_Z = 2C$, C は非特異 2 次曲線, のいずれかであることがわかった. 具体的な分類に入る前に, 次の重要な補題を示しておく. 証明は [1] の命題 2.4. をみていただきたい.

補題 5.2. E_0 を E_Z の非特異な既約被約成分とする. このとき, $L_Z \cdot E_Z = 2 \deg \Delta_Z$, $L_Z \cdot E_0 = \deg(\Delta_Z \cap E_0)$ が成り立つ.

(A) $E_Z = 2l_1 + 2l_2$, l_1, l_2 は異なる直線のとき

l_1 と l_2 の交点を Q とする. $L_Z \cdot l_i = 5$ より $\deg(\Delta_Z \cap l_i) = 5$ である. さらに, $L_Z \cdot E_Z = 20$ より $\deg \Delta_Z = 10$ である. $Q \notin \Delta_Z$ とすると, Example 4.1 より $\Delta_Z \subset (l_1 \cup l_2) \setminus Q$ となる. $Q \in \Delta_Z$ のときは, $(\nu 1)$ -条件より $\text{mult}_Q(\Delta_Z \cap l_2) = 1$ としてよい. $\text{mult}_Q(\Delta_Z \cap l_1) = k$ とすると, Example 4.1 より $\text{mult}_Q \Delta_Z = k + 1$ である.

これらは全て中間三重組になっていることも確認できる.

(B) $E_Z = 2C$, C は非特異 2 次曲線のとき

$L_Z \cdot C = 10$ より $\deg(\Delta_Z \cap C) = 10$ である. このとき, Example 4.1 より $\Delta_Z \subset C$ がわかる.

これらも全て中間三重組になっていることが確認できる.

以上のような議論を考えうる全ての場合に行っていくことで中間三重組の分類がなされる.

6 底四重組

ここでは底四重組 $(X, E_X; \Delta_Z, \Delta_X)$ の分類法の一例として, $X = \mathbb{P}^2$ のときをみる. l を直線とし, $L_X \sim hl$, $E_X \sim dl$ としよう. $2K_X + L_X \sim (h-6)l$ がネフより $h \geq 6$. さらに, $3K_X + L_X \sim (h-9)l$ がネフではないので, $h < 9$ となり, 合わせると $h = 6, 7, 8$ が得られた. このうち, $h = 6$ のときは非常に複雑なので, $h = 7, 8$ のときのみをかく.

$h = 6$ のときは [3] の 9 章をみてほしいのだが, そこで使われる手法自体は以下で述べるものと同じである.

補題 6.1. E_0 を E_X の非特異な既約被約成分とする. このとき, $L_X \cdot E_X = 2(\deg \Delta_Z + \deg \Delta_X)$, $L_X \cdot E_0 = \deg(\Delta_Z \cap E_0^Z) + 2 \deg(\Delta_X \cap E_0)$ が成り立つ. ここで, $\psi: Z \rightarrow X$ を Δ_X の 0 次元解消とする.

証明は [1] の命題 2.4. をみていただきたい.

$h = 8$ のとき, $3K_X + L_X = -E_X$ より $d = 1$ となる. 特に $E_X = l$ である. 補題 6.1 より, $\deg \Delta_Z + \deg \Delta_X = 4$, $\deg(\Delta_Z \cap l^Z) + 2 \deg(\Delta_X \cap l) = 8$ が成り立つ. よって, $\Delta_Z = \emptyset$, $\deg \Delta_X = 4$, $\deg(\Delta_X \cap l) = 4$ となる. ゆえに $\Delta_X \subset l$ となっている. 逆にこれらは全て底四重組になっていることも確認できる.

$h = 7$ のとき, $d = 2$ となる. このとき, (A) $E_X = l_1 + l_2$, l_1, l_2 は異なる直線, (B) $E_X = 2l$, l は直線, もしくは (C) $E_X = C$, C は非特異 2 次曲線, のいずれかである.

(A) $E_X = l_1 + l_2$, l_1, l_2 は異なる直線のとき

l_1 と l_2 の交点を P とする. 補題 6.1 より, $\deg \Delta_Z + \deg \Delta_X = 7$, $\deg(\Delta_Z \cap l_i^Z) + 2 \deg(\Delta_X \cap l_i) = 7$ が成り立つ.

$P \notin \Delta_X$ であれば, 例 4.1, 4.2 より $\deg \Delta_Z = 1$, $\deg \Delta_X = 6$, $\deg(\Delta_Z \cap l_i^Z) = 1$, $\deg(\Delta_X \cap l_i) = 3$ となる. さらに, $\Delta_X \subset (l_1 \cup l_2) \setminus Q$ や $\Delta_Z = l_1^Z \cap l_2^Z$ もわかる.

$P \in \Delta_X$ であれば, 例 4.1, 4.2 より $\deg \Delta_Z = 2$, $\deg \Delta_X = 5$, $\deg(\Delta_Z \cap l_i^Z) = 1$, $\deg(\Delta_X \cap l_i) = 3$ となる. さらに, $\Delta_X \subset (l_1 \cup l_2)$ や $\Delta_Z = (l_1^Z \cap \Gamma_{P,1}) \cup (l_2^Z \cap \Gamma_{P,1})$ もわかる. 逆にこれらは全て底四重組になっていることも確認できる.

(B) $E_X = 2l$, l は直線のとき

補題 6.1 より, $\deg \Delta_Z + \deg \Delta_X = 7$, $\deg(\Delta_Z \cap l^Z) + 2 \deg(\Delta_X \cap l) = 7$ が成り立つ. よって $(\deg(\Delta_Z \cap l^Z), \deg(\Delta_X \cap l)) = (7, 0), (5, 1), (3, 2), (1, 3)$ のいずれかである. 少し場合が多いので, それぞれの場合に分けてみていく.

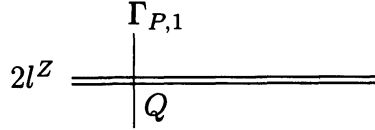
(B1) $(\deg(\Delta_Z \cap l^Z), \deg(\Delta_X \cap l)) = (7, 0)$ のとき

このとき, 例 4.1 より $\Delta_Z \subset l^Z$ である.

(B2) $(\deg(\Delta_Z \cap l^Z), \deg(\Delta_X \cap l)) = (5, 1)$ のとき

まず $(\text{mult}_P \Delta_X, \text{mult}_P(\Delta_X \cap l)) = (1, 1)$ の場合を考える. $\psi: Z \rightarrow X$ を Δ_X の 0 次元解消, $Q = \Gamma_{P,1} \cap l^Z$ とする.

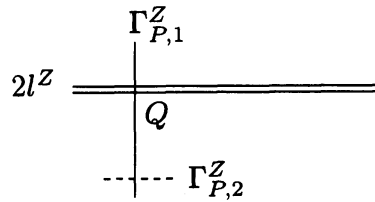
P の上空で E_Z の形は



となっている. このとき, $(\Gamma_{P,1}^Z)^2 = -1$ より $\Delta_Z \cap \Gamma_{P,1}^Z \neq \emptyset$ であることに注意すれば, 例 4.2 より, $\text{mult}_Q \Delta_Z = 2$, $\text{mult}_Q(\Delta_Z \cap l^Z) = 1$, $\text{mult}_Q(\Delta_Z \cap \Gamma_{P,1}) = 2$, $\deg(\Delta_Z \cap (l_Z \setminus Q)) = 4$, $\Delta_Z \cap (l_Z \setminus Q) \subset l_Z \setminus Q$ であることがわかる.

次に $(\text{mult}_P \Delta_X, \text{mult}_P(\Delta_X \cap l)) = (2, 1)$ の場合を考える. $\psi_1: Z_1 \rightarrow X$ を P におけるブローアップ, $\Gamma_{P,1}$ をその例外曲線とする. このとき ψ は ψ_1 を経由する. $Q = l^Z \cap \Gamma_{P,1}^Z$ とおく.

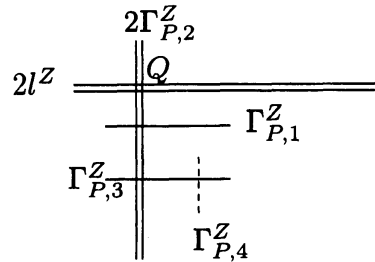
このとき, E_Z の形は



となっている. ここで, 破線は $\text{coeff}_{\Gamma_{P,2}^Z} E_Z = 0$ であることを表している. もし $\Delta_Z \cap \Gamma_{P,1}^Z \neq \emptyset$ であれば, 例 4.1 より $\deg(\Delta_Z \cap \Gamma_{P,1}^Z) = 2$ であるが, このとき, $(\Gamma_{P,1}^M)^2 = -4$, $\text{coeff}_{\Gamma_{P,1}^M} E_M = 1$ かつ $\Gamma_{P,1}^M$ は E_M の連結成分となり, 対数的端末特異点の分類より矛盾. よって, 例 4.1 より $\Delta_Z \subset (l^Z \setminus Q)$ である.

(B3) $(\deg(\Delta_Z \cap l^Z), \deg(\Delta_X \cap l)) = (3, 2)$ のとき
 $\text{supp} \Delta_X = \{P\}$, $(\text{mult}_P \Delta_X, \text{mult}_P(\Delta_X \cap l)) = (4, 2)$ の場合. $\psi: Z \rightarrow X$ を Δ_X の 0 次元解消とし, $Q = l^Z \cap \Gamma_{P,2}^Z$ とおく.

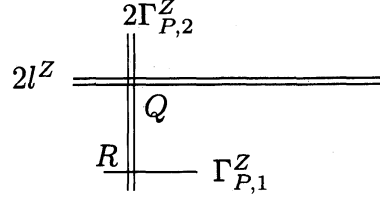
このとき, E_Z の形は



となっている. 例 4.1, 4.2 より, $\Delta_Z \subset l_Z \setminus Q$ である.

$\text{supp} \Delta_X = \{P\}$, $(\text{mult}_P \Delta_X, \text{mult}_P(\Delta_X \cap l)) = (2, 2)$ の場合. $R = \Gamma_{P,1}^Z \cap \Gamma_{P,2}^Z$ とする.

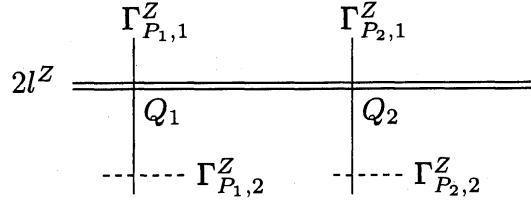
E_Z の形は



となっている. 例 4.1, 4.2 より $\deg(\Delta_Z \cap l^Z) = 3$, $\deg(\Delta_Z \cap (\Gamma_{P,2} \setminus R)) = 2$ である. さらに $c = \text{mult}_Q(\Delta_Z \cap l^Z)$, $d = \text{mult}_Q(\Delta_Z \cap \Gamma_{P,2})$ とおけば, $\text{mult}_Q \Delta_Z = c + d$ となる. ここで (c, d) の可能性は $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$, $(1, 2)$ である.

$\text{supp} \Delta_X = \{P_1, P_2\}$, $(\text{mult}_{P_i} \Delta_X, \text{mult}_{P_i}(\Delta_X \cap l)) = (2, 1)$ の場合. $\psi: Z \rightarrow X$ を Δ_X の 0 次元解消とする. $Q_1 = l^Z \cap \Gamma_{P_1,1}^Z$, $Q_2 = l^Z \cap \Gamma_{P_2,1}^Z$ とする.

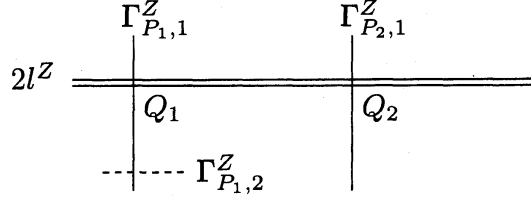
E_Z の形は



となっている. このとき例 4.1, 4.2 より, $\Delta_Z \subset (l^Z \setminus \{Q_1, Q_2\})$ である.

$\text{supp} \Delta_X = \{P_1, P_2\}$, $(\text{mult}_{P_1} \Delta_X, \text{mult}_{P_1}(\Delta_X \cap l)) = (2, 1)$, $(\text{mult}_{P_2} \Delta_X, \text{mult}_{P_2}(\Delta_X \cap l)) = (1, 1)$ の場合. $\psi: Z \rightarrow X$ を Δ_X の 0 次元解消とする. $Q_1 = l^Z \cap \Gamma_{P_1,1}^Z$, $Q_2 = l^Z \cap \Gamma_{P_2,1}^Z$ とおく.

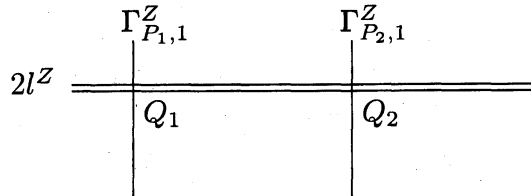
E_Z の形は



となっている. このとき例 4.1, 4.2 より, $\text{mult}_{Q_2} \Delta_Z = \text{mult}_{Q_2}(\Delta_Z \cap \Gamma_{P_2,1}^Z) = 2$, $\text{mult}_{Q_2}(\Delta_Z \cap l^Z) = 1$, $\Delta_Z \setminus Q_2 \subset l^Z \setminus \{Q_1, Q_2\}$ である.

$\text{supp} \Delta_X = \{P_1, P_2\}$, $(\text{mult}_{P_i} \Delta_X, \text{mult}_{P_i}(\Delta_X \cap l)) = (1, 1)$ の場合. $\psi: Z \rightarrow X$ を Δ_X の 0 次元解消とする. $Q_1 = l^Z \cap \Gamma_{P_1,1}^Z$, $Q_2 = l^Z \cap \Gamma_{P_2,1}^Z$ とおく.

このとき, E_Z の形は



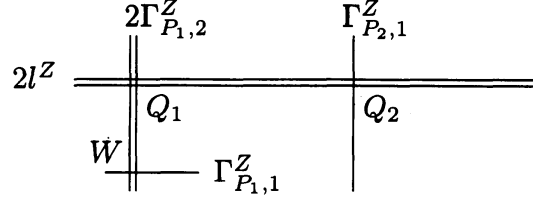
となっている. このとき例 4.1, 4.2 より, $\text{mult}_{Q_i} \Delta_Z = \text{mult}_{Q_i}(\Delta_Z \cap \Gamma_{P_i,1}^Z) =$

$\text{mult}_{Q_2}(\Delta_Z \cap \Gamma_{P_2,1}) = 2$, $\text{mult}_{Q_1}(\Delta_Z \cap l^Z) = 1$, $\Delta_Z \setminus \{Q_1 \cup Q_2\} \subset (l^Z \setminus \{Q_1, Q_2\})$ である. $(\deg(\Delta_Z \cap l^Z), \deg(\Delta_X \cap l)) = (3, 2)$ のときは以上でつくされている.

(B4) $(\deg(\Delta_Z \cap l^Z), \deg(\Delta_X \cap l)) = (1, 3)$ のとき

$\text{supp}\Delta_X = \{P_1, P_2\}$, $(\text{mult}_{P_1} \Delta_X, \text{mult}_{P_1}(\Delta_X \cap l)) = (2, 2)$, $(\text{mult}_{P_2} \Delta_X, \text{mult}_{P_2}(\Delta_X \cap l)) = (1, 1)$ の場合. $\psi: Z \rightarrow X$ を Δ_X の 0 次元解消とする. $Q_1 = l^Z \cap \Gamma_{P_1,2}^Z$, $Q_2 = l^Z \cap \Gamma_{P_2,1}$, $W = \Gamma_{P_1,1}^Z \cap \Gamma_{P_1,2}^Z$ とする.

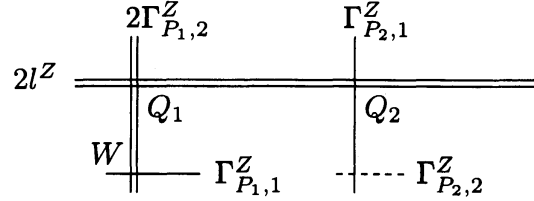
E_Z の形は



となっている. このとき例 4.1, 4.2 より, $\text{mult}_{Q_2} \Delta_Z = \text{mult}_{Q_2}(\Delta_Z \cap \Gamma_{P_2,1}) = 2$, $\text{mult}_{Q_2}(\Delta_Z \cap l^Z) = 1$, $\deg(\Delta_Z \cap \Gamma_{P_1,2}^Z) = 2$, $\text{supp}\Delta_Z \setminus \{Q_2\} \subset \Gamma_{P_1,2}^Z \setminus \{W\}$ である.

$\text{supp}\Delta_X = \{P_1, P_2\}$, $(\text{mult}_{P_1} \Delta_X, \text{mult}_{P_1}(\Delta_X \cap l)) = (2, 2)$, $(\text{mult}_{P_2} \Delta_X, \text{mult}_{P_2}(\Delta_X \cap l)) = (2, 1)$ の場合. $\psi: Z \rightarrow X$ を Δ_X の 0 次元解消とする. $Q_1 = l^Z \cap \Gamma_{P_1,2}^Z$, $Q_2 = l^Z \cap \Gamma_{P_2,1}^Z$, $W = \Gamma_{P_1,1}^Z \cap \Gamma_{P_1,2}^Z$ とする.

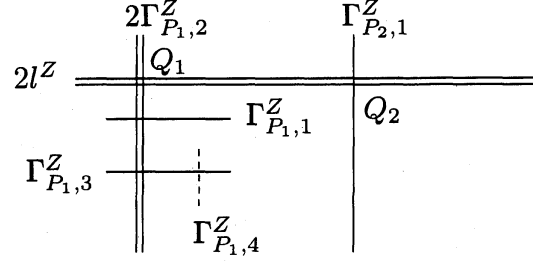
E_Z の形は



となっている. このとき例 4.1, 4.2 より, $\deg(\Delta_Z \cap \Gamma_{P_1,2}^Z) = 2$, $\Delta_Z \cap (l^Z \setminus Q_1) \subset l^Z \setminus \{Q_1, Q_2\}$, $\Delta_Z \cap (\Gamma_{P_1,2}^Z \setminus Q_1) \subset \Gamma_{P_1,2}^Z \setminus \{W, Q_1\}$ である. さらに $c = \text{mult}_{Q_1}(\Delta_Z \cap l^Z)$, $d = \text{mult}_{Q_1}(\Delta_Z \cap \Gamma_{P_1,2})$ とおけば, $\text{mult}_{Q_1} \Delta_Z = c + d$ となる. ここで (c, d) の可能性は $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$ である.

$\text{supp}\Delta_X = \{P_1, P_2\}$, $(\text{mult}_{P_1} \Delta_X, \text{mult}_{P_1}(\Delta_X \cap l)) = (4, 2)$, $(\text{mult}_{P_2} \Delta_X, \text{mult}_{P_2}(\Delta_X \cap l)) = (1, 1)$ の場合. $\psi: Z \rightarrow X$ を Δ_X の 0 次元解消とする. $Q_1 = l^Z \cap \Gamma_{P_1,2}^Z$, $Q_2 = l^Z \cap \Gamma_{P_2,1}^Z$ とする.

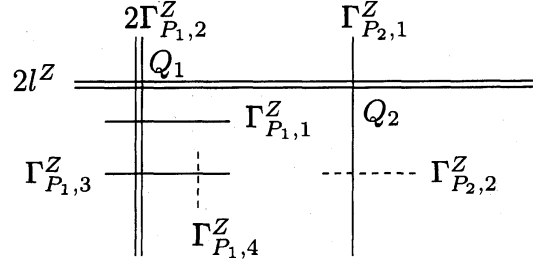
E_Z の形は



となっている. このとき例 4.1, 4.2 より, $\text{mult}_{Q_2} \Delta_Z = \text{mult}(\Delta_Z \cap \Gamma_{P_2,1}^Z) = 2$, $\text{mult}_{Q_2}(\Delta_Z \cap l^Z) = 1$, $\text{supp} \Delta_Z \setminus Q_2 \subset l^Z \setminus \{Q_1, Q_2\}$ である.

$\text{supp} \Delta_X = \{P_1, P_2\}$, $(\text{mult}_{P_1} \Delta_X, \text{mult}_{P_1}(\Delta_X \cap l)) = (4, 2)$, $(\text{mult}_{P_2} \Delta_X, \text{mult}_{P_2}(\Delta_X \cap l)) = (2, 1)$ の場合. $\psi: Z \rightarrow X$ を Δ_X の 0 次元解消とする. $Q_1 = l^Z \cap \Gamma_{P_1,2}^Z$, $Q_2 = l^Z \cap \Gamma_{P_2,1}^Z$ とする.

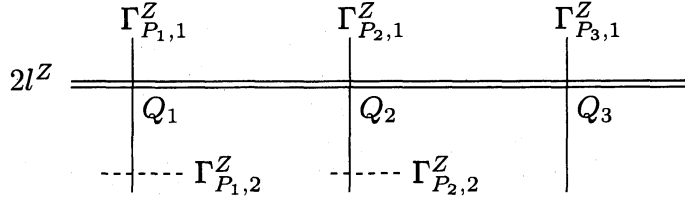
E_Z の形は



となっている. このとき例 4.1, 4.2 より, $\Delta_Z \subset l^Z \setminus \{Q_1, Q_2\}$ である.

$\text{supp} \Delta_X = \{P_1, P_2, P_3\}$, $(\text{mult}_{P_1} \Delta_X, \text{mult}_{P_1}(\Delta_X \cap l)) = (\text{mult}_{P_2} \Delta_X, \text{mult}_{P_2}(\Delta_X \cap l)) = (2, 1)$, $(\text{mult}_{P_3} \Delta_X, \text{mult}_{P_3}(\Delta_X \cap l)) = (1, 1)$ の場合. $\psi: Z \rightarrow X$ を Δ_X の 0 次元解消とする. $Q_i = l^Z \cap \Gamma_{P_i,1}^Z$ とする.

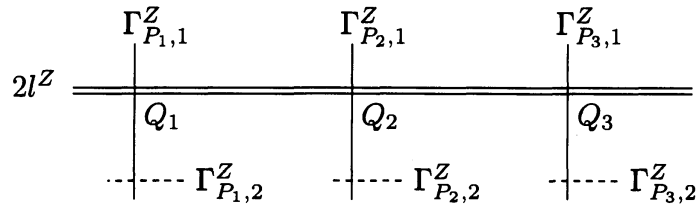
E_Z の形は



となっている. このとき例 4.1, 4.2 より, $\text{mult}_{Q_3} \Delta_Z = \text{mult}(\Delta_Z \cap \Gamma_{P_3,1}^Z) = 2$, $\text{mult}_{Q_3}(\Delta_Z \cap l^Z) = 1$, $\text{supp} \Delta_Z \setminus Q_3 \subset l^Z \setminus \{Q_1, Q_2, Q_3\}$ である.

$\text{supp} \Delta_X = \{P_1, P_2, P_3\}$, $(\text{mult}_{P_i} \Delta_X, \text{mult}_{P_i}(\Delta_X \cap l)) = (2, 1)$ の場合. $\psi: Z \rightarrow X$ を Δ_X の 0 次元解消とする. $Q_i = l^Z \cap \Gamma_{P_i,1}^Z$ とおく.

E_Z の形は



となっている. このとき例 4.1, 4.2 より $\Delta_Z \subset l^Z \setminus \{Q_1, Q_2, Q_3\}$ である. $(\deg(\Delta_Z \cap l^Z), \deg(\Delta_X \cap l)) = (1, 3)$ のときは以上でつくされている.

(C) $E_X = C$, C は非特異 2 次曲線るとき

補題 6.1 より, $\deg \Delta_Z + \deg \Delta_X = 7$, $\deg(\Delta_Z \cap C) + 2 \deg(\Delta_X \cap C) = 14$ が成り立つ.

例 4.1, 4.2 より $\Delta_Z = \emptyset$, $\deg \Delta_X = 7$, $\deg(\Delta_X \cap C) = 7$ となる. さらに, $\Delta_X \subset C$ もわかる.

逆にこれらは全て底四重組になっていることも確認できる.

以上のような議論を考える全ての場合に行っていくことで底四重組の分類がなされる.

謝辞. 講演の機会を与えていただいた松下大介先生に感謝致します. 藤田健人さんには講究録の原稿 [1] を送っていただき, また本稿執筆に際して多くの有益なコメントを頂きましたこと感謝致します.

参考文献

- [1] 藤田健人, 対数的デルペッツォ曲面の分数的指数について, 数理解析研究所講究録に掲載予定
- [2] K.Fujita, *Log del Pezzo surfaces with not small fractional indices*, preprint, arxiv:1401.0988
- [3] K.Fujita and K.Yasutake, *Classification of log del Pezzo surfaces of index three*, preprint, arxiv:1401.1283
- [4] N. Nakayama, *Classification of log del Pezzo surfaces of index two*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **14** (2007), no. 3, 293–498.
- [5] H.Ohashi and S.Taki, *K3 surfaces and log del Pezzo surfaces of index three*, Manuscripta Math. **139** (2012), no. 3–4, 443–471.