

Egoroff's type convergence in the Dedekind completion of a C^* algebra

東北大 理 斎藤和之 (Kazuyuki Saito)

C^* 環のエルミート部分は, order unit ベクトル空間であるから, suprema, infima を保存して, Dedekind completion と呼ばれる bounded complete ベクトル束 (可換 AW^* 環のエルミート部分) に埋蔵することができる。この講演では, "順序収束" を問題にするかぎりでは, Dedekind completion は, ほとんどすべての可分 C^* 環について, "良いふるまい" をしないことを述べたいと思う。

定理. A を可分な C^* 環とし, A が unital でない時, A_1 を A に 1 を添加した C^* 環とする (A が unital なら $A_1 = A$ とする)。 A_1 のエルミート部分の, order unit ベクトル空間としての Dedekind completion を V とする。 V の任意の順序収束 (定義 1) の有界ネット $\{a_\alpha\}$ が同じ極限に Egoroff の意味 (定義 2) で収束するための必要十分条件は, A が可換で, A のスペクトルが稠密な孤立点の集合を含むことである。

注意. 必要性はネットの代りに V の元の列に関する主張で十分である, すなわち, V の元から成る任意の順序収束する有界列 $\{a_n\}$ が同じ極限に Egoroff の意味で収束すれば, A は可換で, $\text{spec } A$ は稠密な孤立点の集合を含む。

議論に入る前に記号の説明と定義を述べよう。 Σ を可換な AW^* -環とし, Ω を Σ のスペクトルとする。 Σ_h を Σ のエルミート部分, すなわち, $\Sigma_h := \{x \in \Sigma \mid x = x^*\}$ とすれば, Σ_h は Ω 上の実数値連続関数全体のつくる C^* -環 $C_r(\Omega)$ と $*$ -同型である。 $C_r(\Omega)$ における自然な順序に関して bounded complete な束となる, すなわち, $C_r(\Omega)$ の任意の有界部分集合 F に対して, 最小上界 LUB F , 最大下界 GLB F が $C_r(\Omega)$ の中にある。 $\Sigma_h (= C_r(\Omega))$ の中に次のような 順序収束 の概念が導入される。

定義 1 $C_r(\Omega)$ における有界なネット $\{a_\lambda\}$ が $a \in C_r(\Omega)$ に順序収束 (O -収束) する (記号で $a_\lambda \rightarrow a(0)$ と書かれる) とは

$$a = \limsup a_\lambda = \liminf a_\lambda$$

となる時である。但し $\limsup a_\lambda = \text{GLB}_\mu \text{LUB}_{\lambda \geq \mu} a_\lambda$ で,

$\liminf a_\lambda = -\limsup (-a_\lambda)$ である。

H. Widom [6] による次のような Σ_h における " O -収束" に

関する判定条件がある。

補題 1. Z_n における有界なネット $\{a_\lambda\}$ が $a \in Z_n$ に
順序収束するための必要十分条件は、任意に与えられた Z の
0 でない projection e と正の数 ε に対して、 e の部分 projection
 $f (\neq 0)$, index λ_0 とが あつて、 $\lambda \geq \lambda_0$ ならば $\|f(a_\lambda - a)\| < \varepsilon$
となることである。

定義 2. Z_n の有界なネット $\{a_\lambda\}$ が $a \in Z_n$ に Egoroff
の意味で (E-収束) 収束する ($a_\lambda \rightarrow a (E)$) とは、 Z の projection
の直交族 $\{e_\alpha\}$ で、 $\sum_\alpha e_\alpha = 1$, 且つ、 $\|(a_\lambda - a)e_\alpha\| \rightarrow 0 (\lambda)$ が
各 α に対して成立するようなものが存在する時である。

注意. "E-収束" $\Rightarrow$ "O-収束"。

問題 " $\Leftarrow$ " は成立するか？

一般に成り立たない。 $\mathbb{R}$ を実軸とし、 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ 上の
有界複素数値 Borel 関数全体のつくる C^* -環とする。 $\mathcal{M}$ を
 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ の元で台が $\mathbb{R}$ の第 1 類集合であるようなものの全体
($\mathcal{B}(\mathbb{R})$ の閉イデアルとなる) とする。この時、商 C^* -環

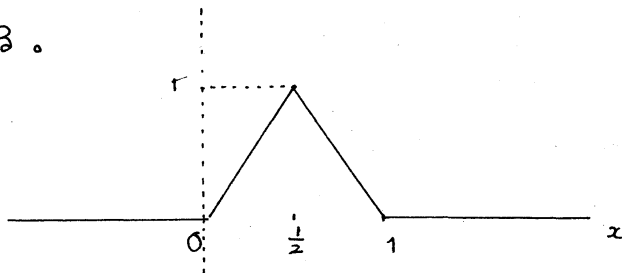
$B(\mathbb{R})/m = \mathbb{Z}$ は可換 AW^* 環でありそのスペクトル Ω は稠密な第1類集合をもつ。しかも $\mathbb{Z}$ は von Neumann 環ではない [1]。
今 $B(\mathbb{R})$ が $\mathbb{Z}$ の上への自然な写像を g としよう。

Egoroff の定理の カテゴリー的アナログ が一般に成り立たないことが知られている ([2])。

$\phi(x)$ を $\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数で、

$$\begin{aligned}\phi(x) &:= 2x & x \in [0, \frac{1}{2}] ; \\ &:= 2-2x & x \in [\frac{1}{2}, 1] ; \\ &:= 0 & x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]\end{aligned}$$

とする。

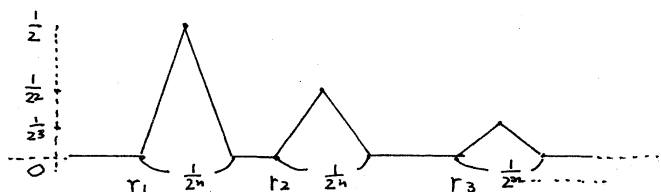


$\{r_i\}$ を $\mathbb{R}$ の稠密な可算集合 (例えば有理数全体) とし、

f_n を

$$f_n(x) := \sum_{i=1}^{\infty} (\frac{1}{2^i}) \phi(2^n(x-r_i)) , \quad x \in \mathbb{R}$$

とする。 $f_n(x)$ は、下の図の様な関数を重ね合わせたものである。



各 n に対して, $a_n := g(f_n)$ ($n=1, 2, \dots$) ($\in \mathbb{Z}_h$) とすれば,

$\{a_n\} \subset \mathbb{Z}_n$ で $\{a_n\}$ は有界 ($\|a_n\| \leq 1$ となる) 列で,

$$1) \quad a_n \rightarrow 0(0) \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$2) \quad a_n \not\rightarrow 0(E) \quad (n \rightarrow \infty)$$

となる。詳細は原論文 [4] にある。

しかし次の補題により問題の部分的肯定解を得る。

補題 2. $\mathcal{Z} = L^\infty(\Gamma, \mu)$ $\times$ はさらに一般に $\mathcal{Z}$ のスペクトル Ω が "すべての第1類集合が全疎となる" を満たせば, "0-収束" $\Rightarrow$ "E-収束" となる (この時 $\mathcal{Z}$ は property E をもつということになる)。

証明は測度論における Egoroff の定理に他ならない。後半は Dimi の定理を使うといい。

注意. 一般に可換な AW * 環のスペクトル Ω は (Ω はストーン空間と見)

$$\Omega = \Omega_1 \oplus \Omega_2$$

Ω_1 はすべての第1類集合が全疎となるストーン空間, Ω_2 は稠密な第1類集合が存在するストーン空間となるように一意に分解できる。 Ω_2 の稠密な第1類集合を使って, $C(\Omega_2)$ のネットで "0-収束" で, "E-収束" しないものを構成できるため補題2の逆も成立する。ここでは興味の対象ではないので詳細は略す。

定理の証明のためにいくつかの補題を用意する。

A を可分 C^* 環とし, A が unital でない場合は A に 1 を追加した C^* 環 A_1 を考える事にする。 A が unital の時, 便宜的に $A_1 = A$ とする。 V を $(A_1)_h$ の order unit ベクトル空間としての Dedekind completion とすれば, V は可換な AW^* 環のイデール部分である。 V の構成については種々あるが, 次の C^* 環的構成法が John Wright により与えられた [8]。

X を A_1 の状態空間とし, $\sigma(A_1^*, A_1)$ により X 上に位相を導入する。 $\mathcal{B}(X)$ を X 上の有界複素数値 Borel 関数全体のつくる C^* 環とする。

$$m_{A_1} := \{ f \in \mathcal{B}(X) \mid \{ x \in \partial X \mid f(x) \neq 0 \} \text{ が } \partial X \text{ の第 1 類集合} \}$$

但し, ∂X は X の端点境界とし, 位相は X の位相を ∂X に制限したものである。

この時, m_{A_1} は $\mathcal{B}(X)$ の閉イデールとなり, 商 C^* 環 $\mathcal{O} := \mathcal{B}(X)/m_{A_1}$ が条件を満たすことが, Dedekind completion の一意性により, 証明される。

補題 3. $\mathcal{O}$ は Kaplansky-Rickart 環 (KR-環) である, すなわち, $\mathcal{O}_h$ の可算個の元 $\{a_n\}$ があり, $\mathcal{O}_h$ の任意の元 x は,

$$x = \text{LUB}_{\mathcal{O}_h} \{ a_n \mid a_n \leq x \}$$

と書ける (この時, " $\{a_n\}$ は $\mathcal{O}_n$ で順序に関して稠密である" という)。

補題 4. もし $\mathcal{E}$ がアトムをもたない可換な KR-環ならば, $\mathcal{E}$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R})/m$ と $\ast$ -同型である。

この事は位相空間の一般論 (例えば Kuratowski の Topology の教科書) を使うことにより証明される。詳細は Sikorski の [2] を参照せよ。

補題 5. $\hat{A}$ を A の正則完備化 ([7], [3]) とする。この時, $\hat{A}_n$ は V の σ -閉部分空間である, すなわち, 次のような $\hat{A}_n$ から V の中への unital な σ -正則な, 単射的埋蔵がある。

$$(A_1)_n \hookrightarrow \hat{A}_n \hookrightarrow V (= \mathcal{O}_n).$$

W を $\hat{A}_n$ の Dedekind completion としよう。 $(A_1)_n$ は $\hat{A}_n$ で順序に関して稠密だから, Dedekind completion の一意性により W が $(A_1)_n$ の Dedekind completion となり $W = V$ となる。次にこの単射的埋蔵が σ -正則, すなわち, " $\hat{A}_n$ の任意の単調増加列 $\{a_n\}$ で, $\hat{A}_n$ のある元 a に対して, $a_n \uparrow a$ ($\hat{A}_n$) を満たすものに対して, " $a_n \uparrow a$ " が V においても成り立つ" ことを示そう。

$X_{\hat{A}}$ を $\hat{A}$ の状態空間とすれば, $V = \mathcal{B}(X_{\hat{A}})/m_{\hat{A}}$ と表わされる。 $\{a_n\}$ を $\hat{A}_n$ の元の単調増加列で, $\hat{A}_n$ の元 a に対して $a_n \uparrow a$ ($\hat{A}_n$) としよう。 $\mathcal{B}_{\hat{A}}$ を $\hat{A}$ の Borel 閉包とすれば, $\mathcal{B}_{\hat{A}}$ において "ほとんど至る所" $a_n \uparrow a$ である, すなわち, $\partial X_{\hat{A}}$ の第1類集合 M があって, $\{a_n\}$ は $M^c \cap \partial X_{\hat{A}}$ の至る所にて a に収束する。一応 $\mathcal{B}_{\hat{A}}$ は自然に $\mathcal{B}(X_{\hat{A}})$ に埋蔵されるから $g_{\hat{A}}(a_n) \uparrow g_{\hat{A}}(a)$ が V で成り立つ。

注意 上の補題で $\mathcal{A}$ の可分性は不要ない。こゝでは意味の対象ではないので省略する。

定理の証明の概略

仮定 $\mathcal{O}_n = V$ が property E をもつとする。

この時, 補題 4, 及び 前掲の反例により $\mathcal{O}_n$ は原子的可換 von Neumann 環となる。又 $\hat{A}_n$ は $\mathcal{O}_n$ の σ -閉部分空間であるから $\hat{A}$ は忠実な正規状態をもつことになり従って, $\hat{A}$ 自身 von Neumann 環である。一応 $\hat{A}$ は KR -環だから $\partial X_{\hat{A}}$ は, $\sigma(\hat{A}^*, \hat{A})|_{\partial X_{\hat{A}}}$ -可分である。よって一般論から, $\hat{A}$ は特に原子的 von Neumann 環である。すなわち, ヒルベルト空間の列 $\{\mathcal{H}_n\}$ があって

$$\hat{A} = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$$

と書くことができる。正則完備化の一般論から $\mathcal{A}$ は, essential な, " $\mathcal{C}$ 環としては dual な" 閉イテール I をもつ。Dedekind completion の一意性から V は $(I_1)_n$ の Dedekind completion である。 I は dual だから, ヒルベルト空間の列 $\{K_n\}$ があって,

$$I = \Sigma' \mathcal{C}(K_n)$$

但し, Σ' は K_n 上の完全連続作用素のつくる $\mathcal{C}$ 環 $\mathcal{C}(K_n)$ の制限付き $\mathcal{C}$ 直和とする。

定理の証明は次の2つの主張を示すことにより終る。詳細は原論文 [4] にゆずる。

主張 1. ∂X_I は稠密な, 孤立点の集合を含む。

主張 2. すべての n に対して, $\dim K_n \leq 1$ 。

文献表

- [1] J. Dixmier, Sur certains espaces consideres par M. H. Stone, Summa Bravib., 11 (1951), 151-182.
- [2] J. E. Oxtoby, Measure and Category, Springer, New York/Heidelberg / Berlin, 1970.

- [3] K. Saito, A structure theory in the regular σ -completion of C^* -algebras, J. London Math. Soc., 22 (1980), 549-558.
- [4] ———, Egoroff's type convergence in the Dedekind completion of a C^* -algebra, To appear in Studia Math. vol 83.
- [5] R. Sikorski, Boolean algebras, Springer, New York / Heidelberg / Berlin, 1964 2nd edition.
- [6] H. Widom, Embedding in AW^* -algebras, Ph.D. Thesis, University of Chicago, 1955.
- [7] J. D. M. Wright, Regular σ -completions of C^* -algebras, J. London Math. Soc., 12 (1976), 299-309.
- [8] ———, Embedding in vector lattices, J. London Math. Soc., 8 (1974), 699-706.
- [9] ———, Wild AW^* -factors and Kaplansky-Rickart algebras, J. London Math. Soc., 13 (1976), 83-89.