

低レイノルズ数の 3 次元キャビティ流中の流線の振る舞い

名古屋大情基セ 石井克哉 (Katsuya Ishii)

東京国際大学 安達静子 (Shizuko Adachi)

1. はじめに

直方体の 1 つの面を、その面の 1 辺の方向に一定速度で移動させることによって起こる、直方体中に閉じ込められた流体の運動、いわゆるキャビティ流れについては数多くの研究がされている。これは最も単純な幾何学的形状をもつ閉じた系内で、非常に興味深い様々な流体力学的現象が観察され、それらについての知識が理論面でも応用面でも重要なためである。(ちなみに、2 次元キャビティ流れの高レイノルズでの流れの分岐現象についても近年、何人かの研究者によって論じられている。)

3 次元キャビティ流れを決めるパラメータは、立方体の幅、深さ、スパンをそれぞれ H , D , L とすると、幾何学的無次元パラメータであるアスペクト比 $\Gamma = D/H$ とスパンアスペクト比 $\Lambda = L/H$ の 2 つと、移動する面の速さを U 、運動粘性率を ν とした、流れの無次元パラメータの Reynolds 数 $Re = HU/\nu$ の 3 つである。

以前の研究で、Ishii 達^(1, 2) は立方体キャビティ ($\Gamma = \Lambda = 1$) 内の 3 次元粘性非圧縮性体定常流を解析した。この非圧縮性定常流は、実空間内での流体の質量保存を力学系での位相空間内の体積保存と対応させることにより、1.5 次元の力学系と見ることができる。このとき、ある流線が固定面を横切った位置を点としてその面に描くことで得られる Poincaré 断面は、位相空間の Poincaré 断面と同等となる。Ishii 達は $Re = 100 - 300$ では流れ方向の中央断面を Poincaré 断面にしたとき、トーラス状の流線、島構造やカオス的流線による点が存在することを示した。 $Re = 335$ 付近では島構造が見られるが、さらに Reynolds 数を増大させると、閉じた流線による構造は見出されないことを示した。

一方、著者達^(3, 4) は $Re = 850$ において、正方キャビティでスパンア

スペクトル比を $\Lambda = 3, 4, 5$ と変化させたときの定常な流れ場の様子を研究した． $\Lambda \leq 4$ では，キャビティ内の流れは全領域でカオス的流線をもつが， $\Lambda \approx 5$ を越えるとキャビティの対称面付近の中心領域に閉じた流線によるセル構造があることも確認できた． $\Lambda = 6.55$ の場合に確認されたセル構造の存在は Albensoeder 達⁽⁵⁾ による実験結果と一致している．さらに，数値シミュレーションではキャビティの中心軸に沿ったカオス的流線が広い領域に存在することを見出し，スパンアスペクト比が大きい場合でもキャビティ内の 3 次元流れへの端壁効果は無視できないことを示した．しかし，立方体キャビティで調べた低いレイノルズ数での流れ構造に対する端壁効果についての解析は行わなかった．本研究では長スパンの正方キャビティ ($\Gamma = 1$, $\Gamma = 6.55$) 内の粘性非圧縮性流体の 3 次元的運動の数値シミュレーションを行い，流線を用いて流れの構造を調べ，端壁効果の影響を調べる．

2. 問題設定と計算方法

ここで取り扱うキャビティ流はスパンアスペクト比 $\Lambda = 6.55$ の正方キャビティ ($\Gamma = 1$) 内の流れである．図 1 に座標系と面の運動で起こされる流れの方向を示す．キャビティの上面 ($y=1$) が x 軸の正の向きに一定の速さ U で移動する．キャビティ内の流体は壁の動きにより，図のようなキャビティを回る動きを引き起こされるが，実際にはこの流れにスパン方向の流れ，角での二次流れなどが重なり複雑な流れになる．

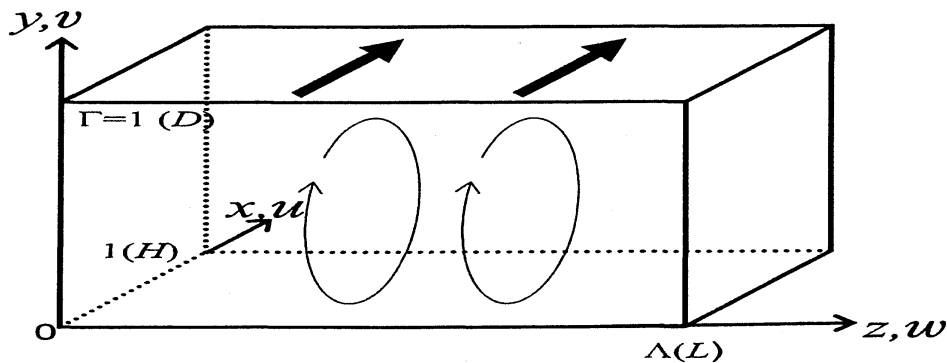


図 1 座標系と面の運動の概略図

支配方程式は以下の 3 次元非圧縮性 Navier-Stokes 方程式である．

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

ここで $\mathbf{u}$, p はそれぞれ，流れの速度，圧力である．物理量は H , U , 密度 ρ を用いて無次元化されている．粘着境界条件は移動面 ($y=1$) 上で $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$, 他の面上では $\mathbf{u} = 0$ である．これらの境界条件と連続の式から，壁面で速度の法線成分の法線方向微分はゼロである．

この支配方程式の数値解法には Marker-and-Cell 法を用い，圧力に対する Poisson 方程式を解いた．キャビティ内においては様々な空間スケールをもつ流れが存在するので，高精度，高解像度のスキームを用いることが必要とされる．そこで，本研究では Nihei と Ishii⁽⁶⁾ が開発した高精度高解像度結合コンパクト差分法を用いて，方程式中の空間微分を求めた．

関数 $f(x)$ の i 番目の格子点上での値，その 1 階，2 階，3 階微分をそれぞれ f'_i, f''_i, f'''_i とする．格子点間隔 h は一定であるとする．結合コンパクト差分法は隣接する 3 つの格子点におけるこれらの関係式を与える．その関係式は行列を用いると次のように表される．

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_n & \mathbf{B}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_i \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{d}_i \\ \vdots \\ \mathbf{d}_n \end{pmatrix}$$

行列 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ とベクトル $\mathbf{x}$, $\mathbf{d}$ は次式の形で与えられる．

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & c_1 \\ -a_2 & b_2 & -c_2 \\ a_3 & -b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}_i = \begin{pmatrix} hf_i' \\ h^2 f_i'' \\ h^3 f_i''' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}_i = \begin{pmatrix} d_1(f_{i+1} - f_{i-1}) \\ d_2(f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}) \\ d_3(f_{i+1} - f_{i-1}) \end{pmatrix}$$

このスキームの精度は係数 a , b , c , d によって決まる．精度を到達できる最高次より低くすると，係数のうちのいくつかを自由なパラメータとすることができる．そこで，スキームが高解像度となるように，自由なパラメータの値を決定する．

本研究で用いた結合コンパクト差分法は 2 個の自由なパラメータをもち，スキームの精度は区間内点では 1 階，2 階，3 階微分に対して，それぞれ 8 次，6 次，4 次である．境界点上では，関数値とその 1 階微分値が与えられたとき，2 階微分の精度は 5 次となる．2 つの自由なパラメータを d_2 , d_3 とすると，他の係数は次のように与えられる．

$$a_1 = \frac{8d_3 + 195}{240}, b_1 = -\frac{16d_3 + 255}{1200}, c_1 = \frac{4d_3 + 45}{1800}, d_1 = \frac{8d_3 + 315}{240}$$

$$a_2 = \frac{11d_2 - 15}{16}, b_2 = -\frac{3d_2 - 7}{16}, c_2 = \frac{d_2 - 3}{48}$$

$$a_3 = d_3, b_3 = -\frac{8d_3 + 15}{20}, c_3 = \frac{4d_3 + 15}{60}$$

パラメータの値は $d_2 = 9.12992$, $d_3 = -6.01486$ とした.

シミュレーションにおいては, 上記のブロック 3 重対角行列を効率的に解くために並列化を実行した. 3 重対角行列の場合には, 格子点を N ブロックに分けたとき, 2つのブロックの境界に隣接した $2(N-1)$ 個の点における未知数についての連立方程式が得られる. この連立方程式を全てのプロセッサにおいて解き, 得られた結果を用いて各ブロック内の点における未知数を各プロセッサで求めることができる. 詳しい説明は文献 (7) に譲る.

結合コンパクト差分法を用いて得られた格子点上の速度と速度の空間 1 階微分のデータに基づく 2 次精度の補間により, キャビティ内の速度場を求める. この速度場を用いて, ある点から出発した流線を求める.

3. . 計算結果

スパンアスペクト比 $\Lambda = 6.55$ の正方キャビティ内の定常流についての数値計算結果を示す. シミュレーションでは格子点数 $121 \times 121 \times 787$ の等間隔格子を用いた.

以下の図 2, 3, 6 にキャビティ左半分にある 42 流線が描く Poincaré 断面の端壁近傍部分を示した. 図の左側が端壁であり, 右側が $z=0.75$ である. スパン長の半分は $z=3.275$ であるため, 図中で Poincaré 断面の多数の点として現われている流線は 20 程度である. これらの図に描かれた点は上流側面と下流側面の中間の $x = 0.5$ 面を上面の移動と逆の向き (紙面の裏から表) に横切る流線の交点である.

長スパンのキャビティ内定常流の流線による Poincaré 断面においても立方キャビティの場合と同様に, 端壁近くの領域で $Re = 100, 200, 300$ では閉じた流線による構造があるが, $Re = 400$ ではその構造は見られず, カオス的な運動に対応した点のみがある.

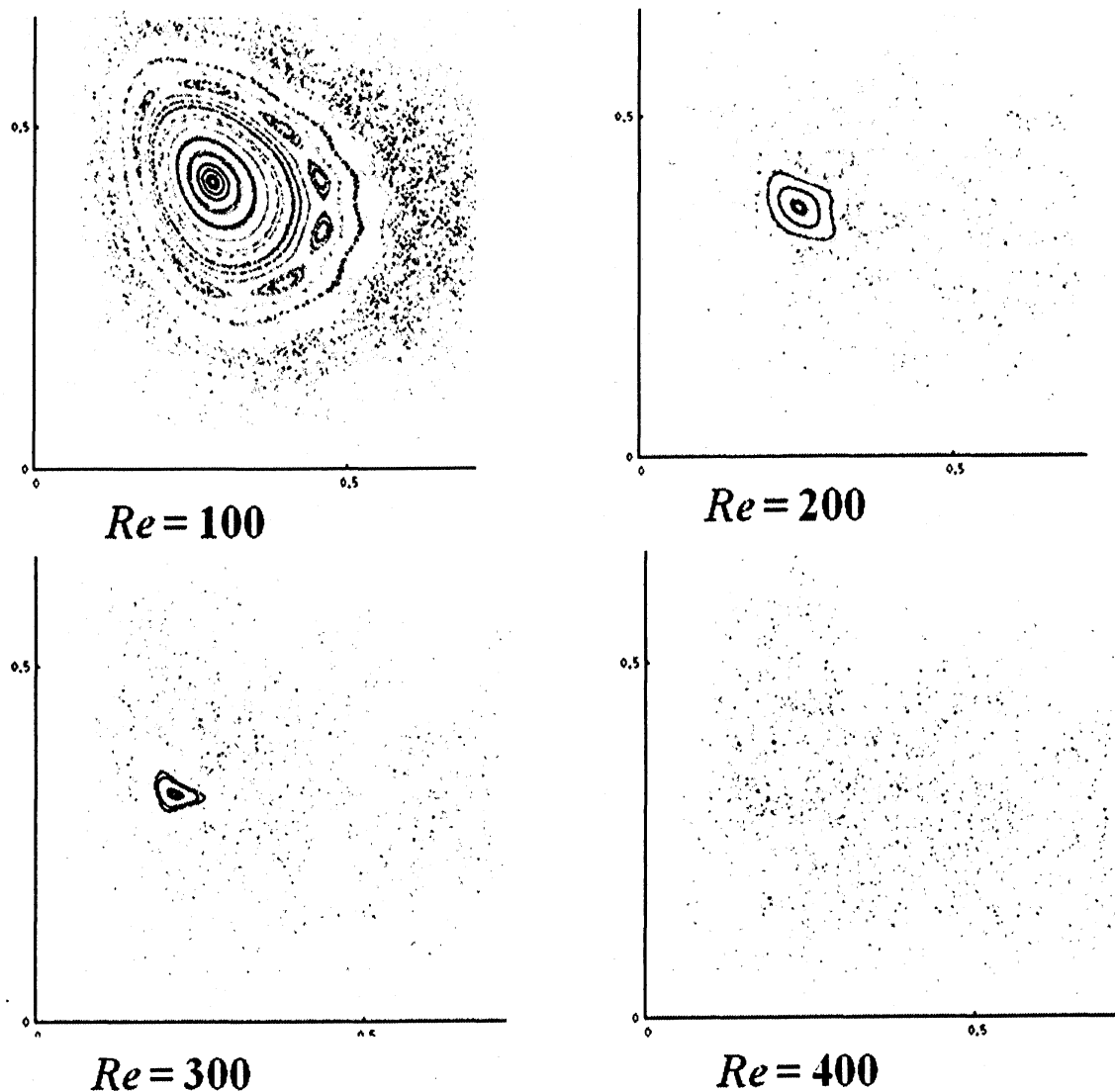


図 2 Poincaré sections for $Re = 100, 200, 300$ and 400

図 2 において, $Re = 100$ では多数の閉曲線と共鳴軌道である 7 点の周りを回る軌道がつくる島がある. $Re = 200, 300$ では閉曲線の数が少なくなり, 閉曲線の存在する領域は Reynolds 数が大きくなるにつれて縮む.

Poincaré 断面上の閉曲線は 1 本の流線によるものであり, この流線が 1 つのトーラス上にあることを意味する. このとき, 流線に沿った運動は 2 つの振動数をもつ. 1 つは x - y 面内の基本的運動の振動数 ω_1 であり, 他はその運動に垂直な面内の運動の振動数 ω_2 である. トーラス上を流体粒子が運動するときには, 2 つの振動数比は無理数である. Poincaré 断

面上の周期的な点や共鳴の点は振動数比が有理数である運動の流線に対応する。

立方キャビティにおいては， $Re = 100$ で多数の閉曲線と 1 つの固定点， $\omega_1:\omega_2$ が 5:1 と約 6:1 の流線による 5 つの周期点と 6 つの島が見出された．一方，図 2 で示された $Re = 100$ の Poincaré 断面には，振動数比約 7:1 に対応する 7 つの共鳴の島があり，立方キャビティに比べ周波数比が少し大きくなっている．同じ形状のキャビティ流でレイノルズ数が小さいときの方が比は大きいため，立方キャビティのレイノルズ数が小さな $Re < 100$ の流れに似た流れができていると考えられる．

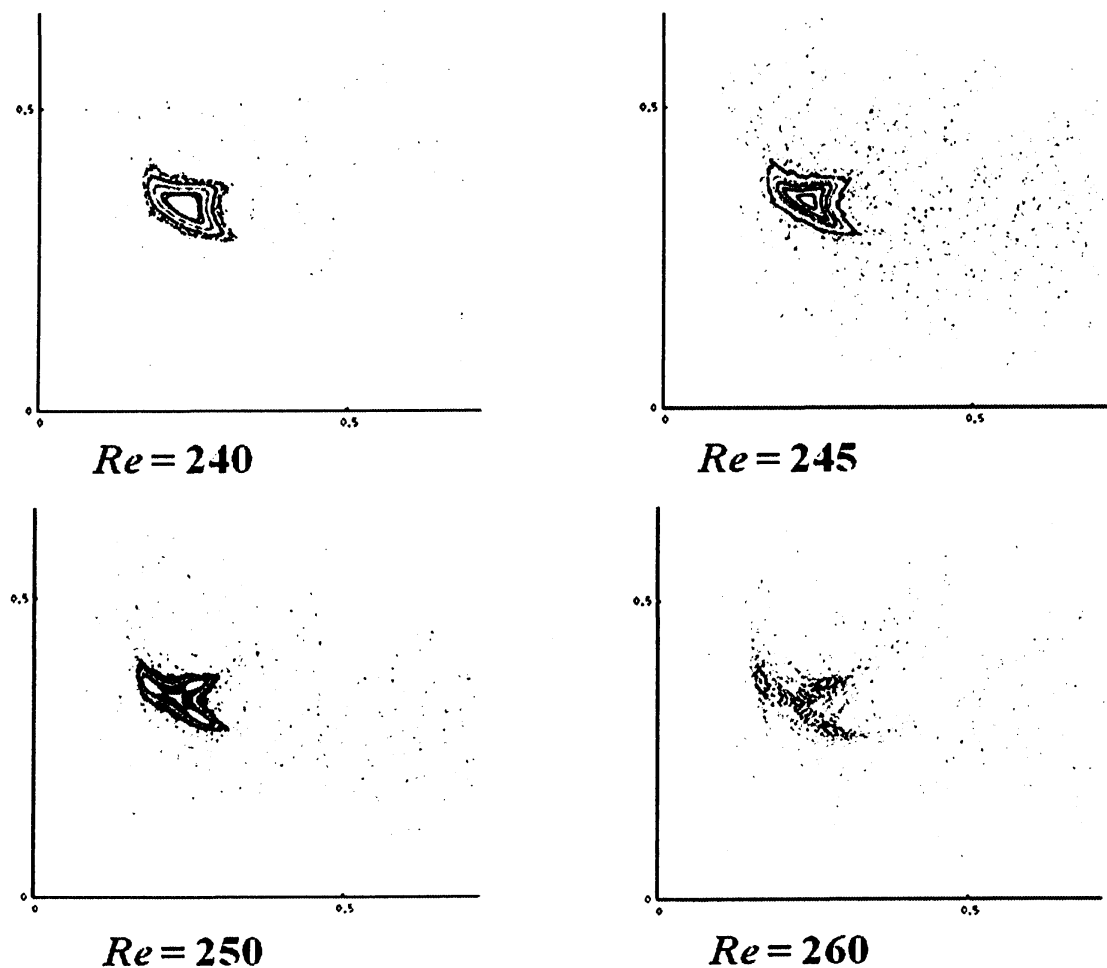


図 3 Poincaré sections near the 3:1 resonance

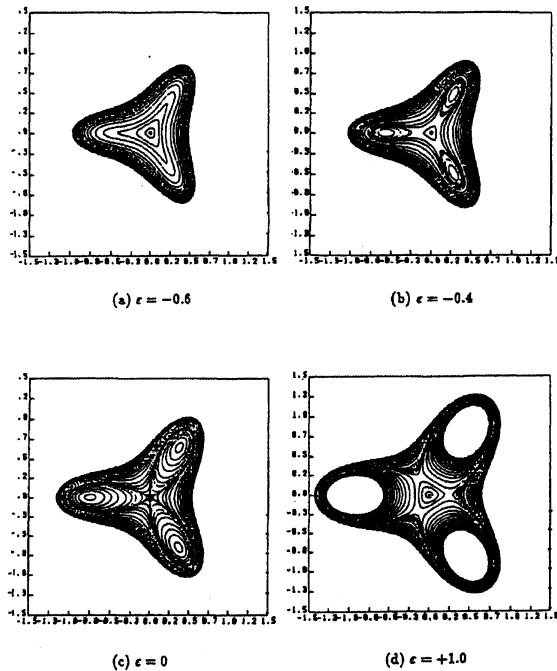


Figure 6. Phase portraits near the 3 : 1 resonance obtained by the normal form Hamiltonian H_3 for $B = 1$ and $F = 1$.

図 4. 理論的な 3:1 共鳴の位相図
の変化⁽²⁾

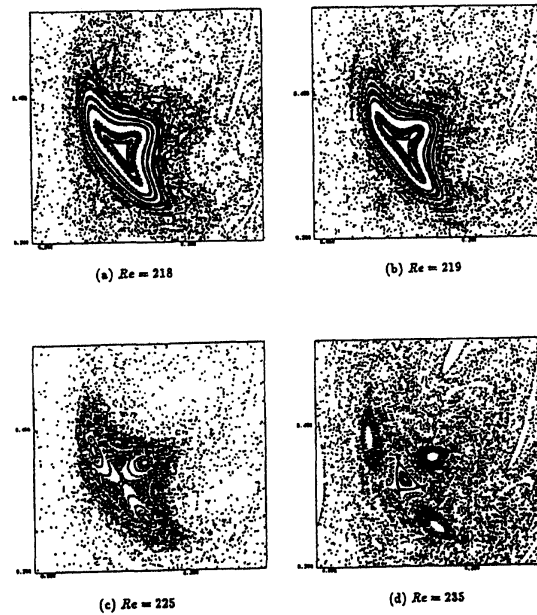


Figure 5. Poincaré sections near the 3 : 1 resonance (in the left lower quadrants).

図 5. 立方体キャビティの
3:1 共鳴⁽²⁾

振動数比 3:1 の共鳴については、スパンアスペクト比 $\Lambda = 6.55$ の正方キャビティにおける $Re = 240, 245, 250, 260$ の Poincaré 断面を図 3 に、自由度 2 の場合のハミルトン系の 3:1 共鳴の図を図 4 に、立方体キャビティの場合の対応する図を図 5 に示した。 $Re = 250$ の前後で構造の変化があること、特に $Re = 250$ では中心部にトーラスがほとんど存在しないことがわかる。これらの Poincaré 断面は、立方キャビティの場合^(1, 2)の図 5 と同様に、Arnold 達⁽⁸⁾による Hamilton 系の非線形共鳴理論から得られた位相図 4 とよく対応している。図 5 の立方キャビティにおける $Re = 218, 219, 225, 235$ の Poincaré 断面が本研究の上記の 4 つの Poincaré 断面に対応するものであり、本研究の長スパン正方キャビティの方が、Reynolds 数が 25 程度大きくなっている。

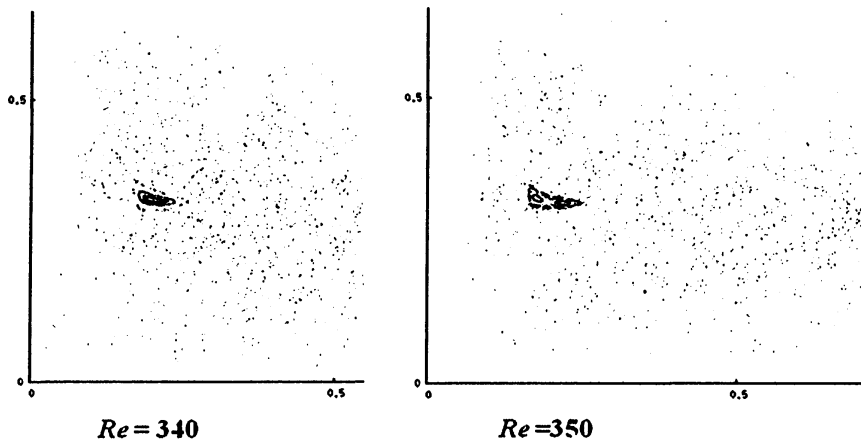


図 6 Poincaré sections near the 2:1 resonance

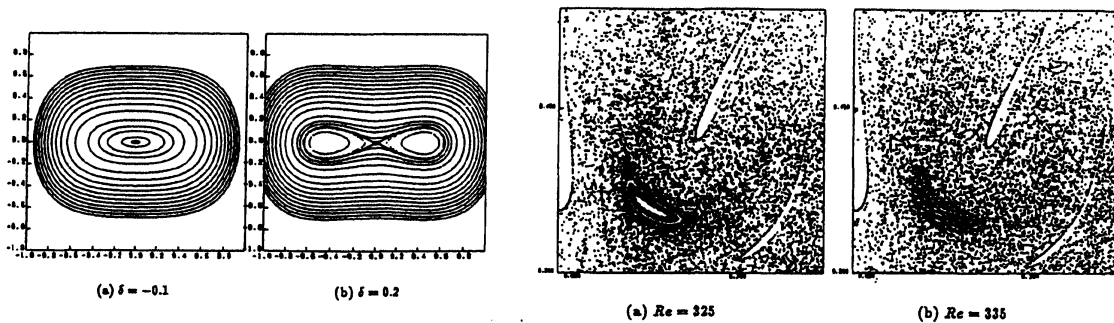


Figure 8. Phase portraits near the 2:1 resonance obtained by the normal form Hamiltonian H_2 for $A = 1$ and $a = 1/4$.

Figure 7. Poincaré sections near the 2:1 resonance.

図 7. 理論的な 2:1 共鳴の位相図
の変化⁽²⁾

図 8. 立方体キャビティの
2:1 共鳴⁽²⁾

レイノルズ数をより大きくした振動数比 2:1 の共鳴についても、Poincaré 断面と共鳴 Hamilton 系の位相図 7 はよく一致する。図 6 で示した $\Lambda = 6.55$ の正方キャビティの場合には $Re = 340$ と 350 で構造の違いがあり、 $Re = 350$ では 1 周期の閉じた流線が不安定になり、2 周期の閉じた流線の周りの島構造が見えている。図 8 の立方キャビティの $Re = 325$ と 335 の Poincaré 断面に対応する構造が現れている。2:1 共鳴についても、本研究の長スパン正方キャビティの方が、Reynolds 数が 15 程度大きい。

4. まとめ

流線を用いて、端壁の流れ場に及ぼす影響を $Re = 100 - 400$ の範囲でス

パンアスペクト比 $\Lambda = 6.55$ の正方キャビティ内の 3 次元粘性非圧縮性流について調べた．種々の空間スケールをもつ流れを計算するために高精度高解像度の結合コンパクト差分法を採用した．

$Re = 100, 200, 300$ の Poincaré 断面の端壁近傍では，トーラス上の流線により描かれる閉曲線や共鳴の島が存在する．立方キャビティの場合と同様に，Reynolds 数が増大するとこれらの閉曲線の領域は小さくなる． $Re = 400$ では閉曲線や共鳴の島は見られず，全ての点はカオス的運動によるものとなる．

本研究の長スパン正方キャビティにおいても，立方キャビティの場合と同様に，振動数比 3:1 と 2:1 の共鳴の Poincaré 断面は Hamilton 系の非線形共鳴理論から得られた位相図とよく対応する．本研究で 3:1 と 2:1 の共鳴が観測された Reynolds 数はそれぞれ $Re = 250, 350$ 付近であり，立方キャビティの場合よりそれぞれレイノルズ数が 25, 15 程度だけ大きく，3:1 と 2:1 の共鳴が観測されるレイノルズ数は立方キャビティ流とほぼ同じであることがわかる．

参考文献

- (1) Ishii, K. and Iwatsu, R., "Numerical Simulation of the Lagrangian flow structure in a driven cavity," Topological Fluid Mechanics (eds. Moffatt, H.K. and Tsinober, A.), Cambridge Univ. Press, (1990), pp. 54-63.
- (2) Ishii, K., Iwatsu, R., Kambe, T. and Matsumoto, T., "Chaotic Streamlines in Viscous Incompressible Flows," Nonlinear World, World Scientific, (1990), pp. 490-506.
- (3) Ishii, K., Nihei, T. and Adachi, S. "Accurate Numerical Simulation of Three-dimensional Lid-driven Cavity Flows with Different Span Length," Vortex Dominated Flows, (eds. Blackmore, D., Krause, E. and Tung, C.) World Scientific Publishing, (2005), pp. 87-96.
- (4) Ishii, K. and Adachi, S. "Numerical analysis of 3D vortical cavity flow," PAMM, Vol. 6, (2007), pp. 871-874.
- (5) Albensoeder, S., Kuhlmann, H.C. and Rath, H.J., "Three- dimensional

- Centrifugal-flow instabilities in the Lid-driven-cavity Problem,” *Phys. Fluids*, 13 (2001), pp. 121-135.
- (6) Nihei, T. and Ishii, K., “A Fast Solver of the Shallow Water Equations on a Sphere using a Combined Compact Difference Scheme,” *J. Comput. Phys.*, 187, (2003), pp. 639-659.
- (7) Nihei, T. and Ishii, K., ”Flow simulation using combined compact difference scheme with spectral-like resolution”, *New Developments in Computational Fluid Dynamics Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*, vol.90,(eds. Fujii, K., Nakahashi, K., Obayashi, S., Komurasaki, S.) Springer,(2005), pp.256-260
- (8) Arnold, V.I., Kozlov, V.V. and Neishtadt, A.I., “Dynamical Systems III,” Springer (original in Russian: VINITI, 1985), (1988), Ch.7, pp.259-260.