

Carleson-Hunt-Sjölin の結果について

金沢大 理 小嶋迪孝

§ 1. 序

本報告の目的は、L. Carleson [1], R. A. Hunt [2] 及び P. Sjölin [5] の結果の証明について若干の注釈をつけ加えることにある。

$f(x)$ を実数値函数で周期 2π をもち、 $(-\pi, \pi)$ で可積分とする。

$S_n(f)(x)$ を $f(x)$ のフーリエ級数の n 部和 ($n \geq 0$) とし、 $M(f)(x) = \sup_{n \geq 0} |S_n(f)(x)|$ とする。この時次の定理が成立する。

定理 1 (L. Carleson). $f(x) \in L^2(-\pi, \pi)$ ならば

(I) $S_n(f)(x)$ は a.e. converge する。

(II) $m\{x \in (-\pi, \pi) : M(f)(x) > y\} \leq C y^{-2} \|f\|_2^2 \quad (y > 0)$.

定理 2 (R. A. Hunt).

(I) $\|M(f)\|_p \leq C_p \|f\|_p \quad (1 < p < \infty), \quad C_p \leq C \frac{p^4}{(p-1)^3}$

(II) $\|M(f)\|_1 \leq C \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| (\log^+ |f(x)|)^2 dx + C$

(III) $m\{x \in (-\pi, \pi) : M(f)(x) > y\} \leq C' e^{-C \frac{y}{\|f\|_{\infty}}} \quad (y > 0)$.

定理 3 (P. Sjölin). $f(x) \in L \log^+ L \log^+ \log^+ L(-\pi, \pi)$ ならば

$S_n(f)(x)$ は a.e. converge する。

L. Carleson は定理 1 を次の命題に帰着している。

命題 1-1. $f(x) \in L^2(-\pi, \pi)$ ならば $M(f)(x)$ は正測度をもつある集合上で有限である。

これより定理 1 が得られることは次のようにしてわかる。

(I). 結論を定すると、ある正測度をもつ集合が $L^2(-\pi, \pi)$ に対する発散集合である。従って $(-\pi, \pi)$ 全体が $L^2(-\pi, \pi)$ に対する発散集合である (Katznelson [4], p. 58, 定理 3.5)。従ってすべての $x \in (-\pi, \pi)$ に対して $M(g)(x) = \infty$ なるような $g(x) \in L^2(-\pi, \pi)$ が存在する (Katznelson [4], p. 55, 定理)。

これは命題 1-1 に矛盾する。

(II) は、(I) より A. Zygmund [7], vol II, p. 165, 定理 (1.22) より知られるが、E. M. Stein [6], p. 148, 系 1 より命題 1-1 を用いて示すことも出来る。

命題 1-1 は次のように変形される。

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(x-t)}{2\sin\frac{1}{2}(x-t)} f(t) dt \quad (n \geq 0)$$

$$S_n^*(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-4\pi}^{4\pi} \frac{e^{-int}}{x-t} f(t) dt,$$

$$S_n^{**}(f)(x) = \frac{1}{2\pi i} (e^{inx} S_n^*(f)(x) - e^{-inx} S_{-n}^*(f)(x)).$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin n(x-t)}{x-t} f(t) dt$$

$$M^*(f)(x) = \sup_n |S_n^*(f)(x)|$$

$$M^{**}(f)(x) = \sup_n |S_n^{**}(f)(x)|$$

とおく。そうすると $|S_n(f)(x) - S_n^{**}(f)(x)| \leq C \|f\|_1$ for all $n \geq 0$ が成立する故

$$M(f)(x) \leq M^{**}(f)(x) + C \|f\|_1 \leq M^*(f)(x) + C \|f\|_1$$

従って命題 1-1 は次の命題 1-2 より示される。

命題 1-2 $f(x) \in L^2(-\pi, \pi)$ ならば $M^*(f)(x)$ は正測度をもつある集合上で有限である。

この命題 1-2 は次の命題より示され、その証明が Carleson の論文である。

命題 (L. Carleson) $f(x) \in L^2(-\pi, \pi)$, $\|f\|_2 = \varepsilon$ ($0 < \varepsilon < 1$, 十分小),

正整数 N に対して、ある集合 $E_{\varepsilon, N}$ が存在して、

$$m(E_{\varepsilon, N}) \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0) \quad \text{unif in } N$$

$$x \in (-\pi, \pi) - E_{\varepsilon, N} \Rightarrow \sup_{0 \leq n \leq \Lambda 2^N} |S_n^*(f)(x)| \leq A_\varepsilon \quad (0 < \Lambda < 1)$$

ここで A_ε は N に無関係で $\rightarrow 0$ ($\varepsilon \rightarrow 0$) 。

R. A. Hunt と P. Sjölin は Carleson の証明方法を応用して次の "Basic Result" を証明しこれより結果を導いている。

Basic Result (R.A. Hunt)任意の可測集合 $F \subset (-\pi, \pi)$

に対して

$$m\{x \in (-\pi, \pi) : M^*(X_F)(x) > y\} \leq \left(\text{const} \frac{p^2}{p-1}\right)^p y^{-p} m(F) \quad (1 < p < \infty, y > 0)$$

§ 2. 定理 2 の Basic Result への帰着.

これは Lorentz space の立場で考える。 $f(x) \in L(-\pi, \pi)$ に対し,

$$\lambda_f(y) \equiv m\{x \in (-\pi, \pi) : |f(x)| > y\}, \quad (y > 0)$$

$$f^*(t) \equiv \inf_{\lambda_f(y) \leq t} y \quad (t > 0)$$

とする。そして $1 \leq p < \infty$ に対して

$$L(p, 1) \equiv \{f(x) : \|f\|_{p,1}^* < \infty\}, \quad \|f\|_{p,1}^* \equiv \frac{1}{p} \int_0^\infty t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \frac{1}{t} dt$$

$$L(p, \infty) \equiv \{f(x) : \|f\|_{p,\infty}^* < \infty\}, \quad \|f\|_{p,\infty}^* \equiv \sup_{t>0} \{t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\}$$

$$L(p, p) \equiv \{f(x) : \|f\|_{p,p}^* < \infty\}, \quad \|f\|_{p,p}^* \equiv \left[\int_0^\infty (f^*(t))^p dt \right]^{\frac{1}{p}} = \|f\|_p.$$

とする。また更に

$$\|f\|_{p,\infty} \equiv \sup_{t>0} \{t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t)\}, \quad f^{**}(t) \equiv \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds = \frac{1}{t} \sup_{E: m(E)=t} \int_E |f(x)| dx$$

とおく。そうすると $\|f\|_{p,\infty}^*$ は三角不等式を満たさなにか、 $\|f\|_{p,\infty}$ はそれを満たし、そしてこれらの間には次の不等式が成立する

3 :

$$\|f\|_{p,\infty}^* \leq \|f\|_{p,\infty} \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_{p,\infty}^* \quad (1 < p < \infty).$$

Basic Result より次の命題が成立する。

命題 2-1. 任意の可測集合 $F \subset (-\pi, \pi)$ に対して

$$\|M^*(X_F)\|_{p,\infty}^* \leq B_p \|X_F\|_{p,1}^* \quad (1 < p < \infty), \quad B_p \leq \text{const.} \frac{p^2}{p-1}$$

命題 2-2. 任意の単函数 $f(x)$ に対して

$$\|M^*(f)\|_{p,\infty}^* \leq A_p \|f\|_{p,1}^* \quad (1 < p < \infty), \quad A_p \leq \text{const.} \frac{p^3}{(p-1)^2}$$

命題 2-3. 任意の $f(x) \in L(p,1)$ ($1 < p < \infty$) に対して

$$\|M^{**}(f)\|_{p,\infty}^* \leq A_p \|f\|_{p,1}^* \quad (1 < p < \infty), \quad A_p \leq \text{const.} \frac{p^3}{(p-1)^2}$$

命題 2-3 は証明が必要であるように思われる。これを簡単に述べる。与えられた函数 $f(x) \in L(p,1) \subset L$ ($1 < p < \infty$) に対して

$$g_k(x) \equiv \begin{cases} k & \text{for } f(x) > k \\ \frac{i}{2^k} & \text{for } \frac{i}{2^k} < f(x) \leq \frac{i+1}{2^k} \quad (i=0, 1, 2, \dots, k2^k-1) \\ 0 & \text{for } f(x) = 0 \\ -\frac{i}{2^k} & \text{for } -\frac{i+1}{2^k} \leq f(x) < -\frac{i}{2^k} \quad (i=0, 1, 2, \dots, k2^k-1) \\ -k & \text{for } f(x) < -k \end{cases}$$

ここで $k=1, 2, 3, \dots$. そうすると $|g_k(x)| \uparrow |f(x)|$ ($k \rightarrow \infty$) .

今単正数列 $\{f_k(x)\}_{k=0}^\infty$ を次のように定義する。

$$f_0(x) \equiv g_1(x)$$

$$f_k(x) \equiv g_{k+1}(x) - g_k(x) = f_k^1(x) + f_k^2(x) \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

ここで, $f_k^1(x)$ は $|f(x)| \leq k$ なる部分より得られたものであり,
 $f_k^2(x)$ は $E_k \equiv \{x: |f(x)| > k\}$ なる部分より得られたものである.
 そうすると $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$, $|f(x)| = \sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x)|$ が成立する.

今命題 2-2 を用いて

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \|M^*(f_k)\|_{p,\infty} &\leq A_p \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k^1\|_{p,1}^* + \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k^2\|_{p,1}^* \right\} \\ &\leq \underbrace{\text{const.}}_{A_p} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} [m(E_k)]^{\frac{1}{p}} \right\} \end{aligned}$$

が得られ, そして最後の級数は $f(x) \in L(p,1)$ 故収束する. また
 すべての正整数 N に対して

$$\|M^{**}(f)\|_{p,\infty} \leq \|M^{**}(\sum_{k=0}^{N-1} f_k)\|_{p,\infty} + \|M^{**}(\sum_{k=N}^{\infty} f_k)\|_{p,\infty},$$

ここでオ 1 項は命題 2-2 を用いて $A_p \|f\|_{p,1}^*$ でおさえられる.
 オ 2 項は $\sum_{k=N}^{\infty} \|M^*(f_k)\|_{p,\infty}$ でおさえられ, これは N が十分大き
 くなれば十分小さくなる. 従って命題 2-3 が成立する.

またこれより次の命題は明らかである.

命題 2-4 任意の $f(x) \in L(p,1)$ ($1 < p < \infty$) に対して

$$\|M(f)\|_{p,\infty} \leq A_p \|f\|_{p,1}^*, \quad A_p \leq \text{const.} \frac{p^3}{(p-1)^2}.$$

この命題より定理 2 は Hunt [3] のある補題定理の考えて (I)
 が証明出来る, (II)(III) もよく知られている方法によって示され
 る. (I) の証明を簡単に述べる.

$f(x) = f^*(x) + f_t(x)$ と分解する, $t > 0$

$$f_t^*(x) \equiv \begin{cases} f(x) & \text{for } |f(x)| > f^*(t) \\ 0 & \text{for } |f(x)| \leq f^*(t) \end{cases}$$

そうすると $(M(f))^*(u) \leq (M(f^t))^*(\frac{u}{2}) + (M(f_t))^*(\frac{u}{2})$ であり

$$(f^t)^*(u) \equiv \begin{cases} f^*(u) & \text{for } 0 < u < t \\ 0 & \text{for } u \geq t \end{cases}$$

$$(f_t)^*(u) \equiv \begin{cases} f^*(t) & \text{for } 0 < u < t \\ f^*(u) & \text{for } u \geq t \end{cases}$$

今与えられた p に対して, $p_0 = \frac{1}{2}(p+1)$, $p_1 = 2p-1$ とおく. そう

すると $1 < p_0 < p < p_1 < \infty$ で, $f^*(x) \in L(p_0, 1)$, $f_t(x) \in L(p_1, 1)$.

従って命題 2-4 を (f^*, p_0) , (f_t, p_1) に対して適用することにより

$$\begin{aligned} \|M(f)\|_{p,p}^* &\leq A_{p_0} 2^{\frac{1}{p_0}} \frac{1}{p_0} \left\{ \int_0^\infty \left[\int_0^t u^{\frac{1}{p_0}-1} f^*(u) du \right]^p u^{-(\frac{p}{p_0}-1)-1} du \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + A_{p_1} 2^{\frac{1}{p_1}} \frac{1}{p_1} \left\{ \int_t^\infty \left[\int_t^\infty u^{\frac{1}{p_1}-1} f^*(u) du \right]^p u^{(1-\frac{p}{p_1})-1} du \right\}^{\frac{1}{p}} + A_{p_1} 2^{\frac{1}{p_1}} \|f\|_{p,p}^* \end{aligned}$$

が得られ, そして Hardy の不等式を適用して

$$\|M(f)\|_{p,p}^* \leq C(p, p_0, p_1) \|f\|_{p,p}^*$$

そこで

$$\begin{aligned} C(p, p_0, p_1) &\leq \text{const} \frac{p_0^3}{(p_0-1)^2} \frac{p}{p-p_0} + \text{const} \frac{p_1^3}{(p_1-1)^2} \frac{p_1}{p_1-p} \\ &\leq \text{const} \frac{p^4}{(p-1)^3} \end{aligned}$$

§ 3 定理 3 の Basic Result への帰着

Basic Result より次の命題が成立する。

命題 3-1. 任意の可測集合 $F \subset (-\pi, \pi)$ に対して

$$m\{x \in (-\pi, \pi); M(X_F)(x) > y\} \leq \left(\text{const} \frac{p^2}{p-1}\right)^p y^{-p} m(F) \quad (1 < p < \infty, y > 0).$$

従ってこれより次の評価が得られる。

$$(1) \quad m\{x \in (-\pi, \pi); M(X_F)(x) > y\} \leq \text{const} \frac{1}{y} \log \frac{1}{y} \cdot m(F) \quad \text{for } 0 < y < \frac{1}{2}$$

$$(2) \quad m\{x \in (-\pi, \pi); M(X_F)(x) > y\} \leq \text{const} y^{-2} m(F) \quad \text{for } y > 0.$$

次に函数空間 N をとる値が 0 または $2^{N_1} + 2^{N_2} + \dots + 2^{N_n}$ ($N_n < N_{n-1} < \dots < N_2 < N_1$, N_i は整数) の単函数の集合と定義する。また $f(x) \in L \log^+ L \log^+ \log^+ L(-\pi, \pi)$ に対して

$$J(f) \equiv \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| \{ \log^+ |f(x)| \log^+ \log^+ |f(x)| + 1 \} dx$$

とおく。今 $f(x) \in N$, $J(f) < 1$ なる任意の $f(x)$ に対して $\bar{f}(x) \in N$, $J(\bar{f}) < 1$ なる $\bar{f}(x)$ を次のように定義する。

(a). $J(f) = 0$ の時, $\bar{f}(x) \equiv 0$

(b). $J(f) > 0$ の時, $d = d(f)$ を $J(f) \geq 5 \cdot \pi \cdot d'$ ($d' = \frac{1}{2^n}$ ($n \geq 2$)) を

みたす最大の d' とし, 集合 $G_n \equiv \{x \in (-\pi, \pi); 2^n \leq \frac{1}{2} f(x) < 2^{n+1}\}$ ($n \geq 2$)

とするとき

$$\bar{f}(x) \equiv f(x) - d \sum_{n=2}^{\infty} 2^n \chi_{G_n}(x).$$

そうすると次の評価が得られる。

$$(3) \quad f(x) \in N, \quad J(f) < 1 \Rightarrow J(\bar{f}) \leq \frac{9}{10} J(f).$$

評価 (1) (2) から次の命題が示される。

命題 3-2. $f(x) \in N, \quad J(f) < 1$ ならばある集合 $E = E_f$ が存在

して

$$m(E) \leq \text{const} [J(f)]^{\frac{1}{5}}$$

$$x \in (-\pi, \pi) - E \Rightarrow M(f)(x) \leq M(\bar{f})(x) + [J(f)]^{\frac{2}{5}}.$$

この命題と評価 (3) から次の命題が得られる。

命題 3-3. $J(f) < 1$ ならば、ある集合 $E = E_f$ が存在して

$$m(E) \leq C_1 [J(f)]^{\frac{1}{5}}$$

$$x \in (-\pi, \pi) - E \Rightarrow M(f)(x) \leq C_2 [J(f)]^{\frac{2}{5}}$$

定理 3 の証明は、結論否定すると、ある函数 $f(x) : J(f) < \infty$ が存在して、ある $\varepsilon > 0$ 及び $\delta > 0$ に対して

$$m\left\{x \in (-\pi, \pi) : \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(x) \geq \varepsilon\right\} \geq \delta.$$

この $\varepsilon > 0$ 及び $\delta > 0$ に対して、ある三角多項式 $T(x)$ が存在して

$$J(f-T) < 1$$

$$[J(f-T)]^{\frac{1}{5}} < \frac{\delta}{C_1}$$

$$[J(f-T)]^{\frac{2}{5}} < \frac{\varepsilon}{C_2} \quad (C_1, C_2 \text{ は命題 3-3 のもの}).$$

従って

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(x) - \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(x) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} S_n(f-T)(x) - \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} S_n(f-T)(x) \\ \leq M(f-T)(x) + M(f-T)(x) = 2M(f-T)(x)$$

$$\leq 2C_2 [J(f-T)]^{\frac{2}{5}} < \varepsilon \quad \text{for } x \in (-\pi, \pi) - E_{f-T},$$

$$m(E_{f-T}) \leq C_1 [J(f-T)]^{\frac{1}{5}} < \delta.$$

これは矛盾である。

引用文献

- [1] L. Carleson, On convergence and growth of partial sums of Fourier series, *Acta Math.*, 116 (1966), 135-157.
- [2] R.A. Hunt, On the convergence of Fourier series, *Orthogonal expansions and their continuous analogues*, Southern Illinois University Press, 1968, 235-255.
- [3] R.A. Hunt, On $L(p, q)$ spaces, *Enseignement Math.*, 12 (1966), 249-276.
- [4] Y. Katznelson, *An introduction to harmonic analysis*, John Wiley and Sons, New York, 1968.
- [5] P. Sjölin, An inequality of Paley and convergence a.e. of Walsh-Fourier series, *Arkiv för Matematik*, 7-42 (1968), 551-570.
- [6] E.M. Stein, On limits of sequences of operators, *Ann. Math.*, 74 (1961), 140-170.

111 A. Zygmund, Trigonometric Series, vols. 1 and 2, Cambridge University Press, New York, 1959.