

Holonomic q -difference system and r.p.p. decomposition

名大理 青本和彦 (Kazuhiko Aomoto)

名城大理工 加藤芳文 (Yoshifumi Kato)

今回話した内容は、林原フォーラム 1990 で行われた。

K. Aomoto, Y. Kato

A q -analogue of de Rham cohomology
associated with Jackson integrals

の解説です。特に代数的な部分に中心を置いて話しました。

§1. b -function の構造

X を n 次元 integral lattice, $x_1, x_2, \dots, x_n$ をその
basis とする。

$\bar{X} = X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$ とおくと n 次元代数的 トーラス となる。

次の写像により座標を入れる。

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \bar{X} \cong (\mathbb{C}^*)^n \ni t = (t_1, \dots, t_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ x_j & \longrightarrow & x_j \otimes q \longrightarrow (1, \dots, \underbrace{q}_{j\text{-th}}, \dots, 1) = q^{x_j} \end{array}$$

ここで q は $0 < q < 1$ の数とし $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ とする. $\chi = \sum_{i=1}^m \chi_i$ $\in X$ に対し $q^\chi = (q^{\chi_1})^{\nu_1} \cdots (q^{\chi_m})^{\nu_m}$ とする. shift 作用素 $Q_j, j=1, \dots, m, Q^\chi, \chi \in X$ を $Q_j f(t) = f(q^{\chi_j} t), Q^\chi f(t) = Q_1^{\nu_1} \cdots Q_m^{\nu_m} f(t) = f(q^\chi t)$ で定義し次の q -差分方程式系を考える.

$$Q^\chi \Phi(t) = b_\chi(t) \Phi(t) \quad \text{--- ①}$$

ここで $b_\chi(t) \in R^X(\bar{X}) = R(\bar{X}) - \{0\}$, つまり nonzero な有理関数とする. 次の成立.

① が compatible

$\iff \{b_\chi(t)\}_{\chi \in X}$ が 1-cocycle をなす.

$$\text{i.e. } b_{\chi+\chi'}(t) = b_\chi(t) Q^\chi b_{\chi'}(t), \quad \chi, \chi' \in X$$

1-cocycle $\{b_\chi(t)\}_{\chi \in X}$ が $b_\chi(t) = Q^\chi \varphi(t) / \varphi(t), \chi \in X, \varphi(t) \in R^X(\bar{X})$ とかけるとき 1-coboundary と呼ばれ 1st コホモロジー $H^1(X, R^X(\bar{X})) = \frac{\text{1-cocycles}}{\text{1-coboundaries}}$ が考えられ

る. 次は基本的な規格化定理である.

定理 任意の $H^1(X, R^X(\bar{X}))$ のコホモロジークラスは①式で重を次の様な特殊の q -乗法関数

$$\Phi(t) = t^\alpha \prod_{j=1}^m \frac{(a_j' t^{\mu_j})_\infty}{(a_j t^{\mu_j})_\infty}, \quad m \in \mathbb{Z}^+, a_j, a_j' \in \mathbb{C}, \mu_j \in \check{X}, \alpha \in \check{X}_{\mathbb{C}} = \check{X} \otimes \mathbb{C}$$

を取ったときに表れる $\{b_x(t)\}_{x \in X}$ を代表 cocycle として持つ、こゝで $t^{\mu_j} = t_1^{\mu_j(x_1)} \cdots t_m^{\mu_j(x_m)}$, $t^d = t_1^{d(x_1)} \cdots t_m^{d(x_m)}$ とする.

注意 $\varpi(t)$ は有理関数ではないのでコホモロジーは一般に自明ではない. 又 $\varpi(t)$ は unique に決まらない.

有理関数 $b_x(t)$ は次の様に具体的にかける.

$$b_x(t) = q^{d(x)} \frac{b_x^+(t)}{b_x^-(t)},$$

$$b_x^+(t) = \prod_{\mu_j(x) > 0} (a_j t^{\mu_j})_{\mu_j(x)} \times \prod_{\mu_j(x) < 0} (a_j' q^{\mu_j(x)} t^{\mu_j})_{-\mu_j(x)},$$

$$b_x^-(t) = \prod_{\mu_j(x) > 0} (a_j' t^{\mu_j})_{\mu_j(x)} \times \prod_{\mu_j(x) < 0} (a_j q^{\mu_j(x)} t^{\mu_j})_{-\mu_j(x)}$$

a_j, a_j' に対し次の確定特異点型の条件を課す.

Assumption $a_j \neq 0, a_j' \neq 0, \forall j$.

$$U_j(t) = t^{(d_j - d_j')\mu_j} \frac{(a_j t^{\mu_j})_{\infty}}{(a_j' t^{\mu_j})_{\infty}} \cdot \frac{(q a_j^{-1} t^{-\mu_j})_{\infty}}{(q a_j'^{-1} t^{-\mu_j})_{\infty}}, \quad a_j = q^{d_j}, a_j' = q^{d_j'}$$

とみると、ヤコビのテータ関数の関係より $U_j(t)$ は周期関数, i.e., $Q^x U_j(t) = U_j(t)$ となり、 $\varpi(t)$ を $(T_{j_1} \cdots T_{j_k} \varpi(t) = U_{j_1}(t) \cdots U_{j_k}(t) \varpi(t)$ で取り替えることができる. その

意味で $\mu_{-j} = -\mu_j$, $a_{-j} = q a_j^{-1}$, $a_{-j}^{-1} = q a_j$ と添字を負にまで拡張してよい. $b_x(t)$ は不変, $b_x^+(t)$, $b_x^-(t)$ は up to 単項式で決まる.

§2. Jackson 積分と ドーラム コホモロジー の q アナログ

差分作用素 $\Delta_j = \frac{1 - Q_j}{1 - q}$, $j = 1, \dots, m$. をとる. 次の開多角形

$$\sum_k \varphi_k d_q \psi_k, \quad \varphi_k, \psi_k : \text{functions on } X$$

を 1-form の q アナログと呼ぶ. Δ_j との pairing

$\langle \Delta_j, \sum_k \varphi_k d_q \psi_k \rangle = \sum_k \varphi_k \Delta_j \psi_k$ が等しいときに 1-form は同値とする. k -form の q アナログについても同様.

q -外微分 d_q を次で定義

$$d_q : \underbrace{\Omega^k}_{\omega} \longrightarrow \underbrace{\Omega^{k+1}}_{d_q \omega}$$

$$d_q \omega = d_q \left(\sum \varphi_{i_1 i_2 \dots i_k} d_q \psi_{i_1} \wedge \dots \wedge d_q \psi_{i_k} \right)$$

$$= \sum d_q \varphi_{i_1 \dots i_k} \wedge d_q \psi_{i_1} \wedge \dots \wedge d_q \psi_{i_k}. \quad \left\{ d_q^2 = 0 \text{ など} \right.$$

これが basis $\chi_1, \dots, \chi_m$ の取り方によらないことも確かめられる. これを用いて q コバリアント微分 $\nabla : \underbrace{\Omega^k}_{\omega} \rightarrow \underbrace{\Omega^{k+1}}_{\nabla \omega}$ が

$$d_q(\Phi \omega) = \Phi \cdot \nabla \omega$$

によって定義される. logarithmic π 形式 $d\log t_j = -\frac{\log q}{1-q} \frac{dq t_j}{t_j}$ を用いてかくと

$$\begin{aligned} \nabla \omega &= \nabla \left(\sum_{i_1 < \dots < i_k} \varphi_{i_1 \dots i_k} d\log t_{i_1} \wedge \dots \wedge d\log t_{i_k} \right) \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_{k+1}} \left(\sum_{\nu=1}^{k+1} (-1)^\nu \nabla_{i_\nu} \varphi_{i_1 \dots i_{\nu-1} i_{\nu+1} \dots i_{k+1}} \right) d\log t_{i_1} \wedge \dots \wedge d\log t_{i_{k+1}} \end{aligned}$$

となっている. $t=t_i$ として $\nabla_j = \nabla^{x_j} = 1 - b_{x_j} Q^{x_j}$.

より一般に $\nabla^X = 1 - b_X Q^X$ とする. 公式として

$$1) \nabla^{X+X'} = \nabla^X + \nabla^{X'} - \nabla^X \nabla^{X'}$$

$$2) \nabla^X \nabla^{X'} = \nabla^{X'} \nabla^X$$

$$3) \nabla^2 = 0.$$

$\bar{\omega} = \frac{dq t_1}{t_1} \wedge \dots \wedge \frac{dq t_n}{t_n}$ を X invariant な n -form

とし $z \in \bar{X}$ の X orbit $X \cdot z$ 上の Jackson 積分が次で定義される.

$$\tilde{f} = \tilde{f}(z) = \int_{X \cdot z} f \cdot \bar{\omega} = (1-q)^n \sum_{x \in X} (Q^x f)(z)$$

定義より $\tilde{f} = Q^x \tilde{f}$, $x \in X$. $\varphi \in R(\bar{X})$ に対して積分

$$\langle \varphi \rangle = \langle \varphi; z \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\Phi} \varphi$$

を考えると $\langle \varphi \rangle = (1-q)^n \Phi(z) \sum_{x \in X} b_x(z) Q^x \varphi(z) = \langle b_X \cdot Q^X \varphi \rangle$

従って次が成立.

$$\langle \nabla^2 \varphi \rangle = 0$$

$\mathcal{L} = \mathbb{C}[t_1, \dots, t_n, t_1^{-1}, \dots, t_n^{-1}]$ をローラン多項式環とし.

$$V = \left\{ \varphi = \frac{\bar{\varphi}}{\prod_{j=1}^m (a_j' t^{\mu_j})_{l_j'} \cdot \prod_{j=1}^m (a_j q^{-l_j} t^{\mu_j})_{l_j}}, l_j, l_j' \geq 0, \bar{\varphi} \in \mathcal{L} \right\}$$

とおく. V は ∇^X 不変 $\nabla^X V \subset V$ であり $\nabla^2 = 0$ であることより、制限された k -form の空間を改めて

$$\Omega_k = \left\{ \sum_{i_1 < \dots < i_k} \varphi_{i_1, \dots, i_k} d\log t_{i_1} \wedge \dots \wedge d\log t_{i_k} \mid \varphi_{i_1, \dots, i_k} \in V \right\}$$

とおき $\Omega^\bullet = \bigoplus_{k=0}^m \Omega_k$ とすると $(\Omega^\bullet, \nabla)$ の組は複体となる. これを de Rham 複体の q アナログという. コホモロジーも考えられ.

$$H^*(\Omega^\bullet, \nabla) = \sum_{k=0}^m H^k(\Omega^\bullet, \nabla)$$

特に最高次の部分は

$$H^m(\Omega^\bullet, \nabla) \cong \frac{V}{\sum_{j=1}^m \nabla_j V} = \frac{V}{\sum_{X \in X} \nabla^X V}$$

となる. 特に $\varphi \in V$ の積分 $\langle \varphi \rangle$ はコホモロジーのクラスのみには依存.

注意 $\varphi \in V$ の積分 $\langle \varphi \rangle = \langle \varphi, 3 \rangle$ は φ が $X \text{ orbit } X/3$ 上に pole を持たなければ "summable" となることも示せる.

§3. Critical points と stable q-cycles

$\alpha = N\tau + \alpha'$, $\alpha, \alpha' \in \check{X}_C$, $\tau \in \check{X}$, とおき $N \rightarrow \infty$ のときの積分

$$\langle \varphi \rangle = \langle \varphi, \mathbb{Z} \rangle = \int_{X \cdot \mathbb{Z}} \text{重} \varphi \bar{\omega}, \quad \varphi \in V \quad \text{--- ②}$$

の漸近挙動を調べる. τ, α' は fix している.

$$\Phi(t) = t^\alpha \frac{\prod_{j=1}^m (a_j' t^{\mu_j})_\infty}{\prod_{j=1}^m (a_j t^{\mu_j})_\infty} = (t^\tau)^N t^{\alpha'} \frac{\prod_{j=1}^m (a_j' t^{\mu_j})_\infty}{\prod_{j=1}^m (a_j t^{\mu_j})_\infty}$$

より $|\Phi(t)|$ の主要部は $|t^\tau| = |q^{(\tau, \lambda)}| = q^{\text{Re}(\tau, \lambda)}$ となる. ただし $t = q^\lambda$ とおいた. 上記積分②が収束するためには X orbit $X \cdot \mathbb{Z}$ 上に分母 $(a_j t^{\mu_j})_\infty$, $1 \leq j \leq m$, は pole を持たない, $|t^\tau|$ が増加する方向での和は有限の 2 つが要請 漸近挙動を調べやすくするため される. これより次をみたする $\lambda = q^\lambda$ の X orbit をさがすことが大事になる.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{「} n \text{ 個の線形独立な } \mu_{j_1}, \mu_{j_2}, \dots, \mu_{j_m} \text{ で } \tau \in \mathbb{R}_{>0} \mu_{j_1} + \dots \\ + \mathbb{R}_{>0} \mu_{j_m}, \quad a_j' \mathbb{Z}^{\mu_{j_k}} = q^{\mathbb{Z} \ell_k}, \quad \exists \ell_k \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq k \leq m, \end{array}} \quad \square$$

上の j_k として正のものだけをとるのではコホモロジーの基底との関係で数が足りず $\text{重} \rightarrow T_{j_1} \dots T_{j_k} \text{重}$ のとり替えて議論が変わらないことを注意し j_k を負 $-j_k$ まで広げる. 任意の組 $J = \{j_1, \dots, j_n\} \subset \{1, 2, \dots, m\}$ に対し符号 $\varepsilon_i = \pm 1$ が条件

$$\tau \in \mathbb{R}_{>0} \mu_{\varepsilon_1 j_1} + \dots + \mathbb{R}_{>0} \mu_{\varepsilon_m j_m}$$

のもと、一意に決まる、

$$J = \{j_1, \dots, j_m\} \subset \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm m\}$$

s.t. $\mu_{j_k}, 1 \leq k \leq m$ は $\check{X}_{\mathbb{R}}$ で線形独立

に対し

$$\bar{X}_J = \{t = q^\lambda \in \bar{X} \mid \log_q a_j' + (\mu_j, \lambda) \equiv \mathbb{Z} \pmod{\frac{2\pi i}{\log q}} \text{ for } j \in J\}$$

$$\bar{X}_J^+ = \{t = q^\lambda \in \bar{X} \mid \log_q a_j' + (\mu_j, \lambda) \equiv \mathbb{Z}^+ \pmod{\frac{2\pi i}{\log q}} \text{ for } j \in J\}$$

とおく. ただし $a, b \in \mathbb{C}$ に対し

$$a \equiv b \pmod{\frac{2\pi i}{\log q} \mathbb{Z}} \iff \operatorname{Re}(a-b) \in \mathbb{Z}, \operatorname{Im}(a-b) \equiv 0 \pmod{\frac{2\pi}{\log q} \mathbb{Z}}$$

$$a \equiv b \pmod{\frac{2\pi i}{\log q} \mathbb{Z}^+} \iff \operatorname{Re}(a-b) \in \mathbb{Z}, \operatorname{Im}(a-b) \equiv 0 \pmod{\frac{2\pi}{\log q} \mathbb{Z}}$$

とする.

定義 $t = q^\lambda \in \bar{X}_J^+ \cap X$ を λ critical

$\iff L_\eta$ が $\bar{X}_J^+ \cap X$ で有限な最小値をとる

$\iff |L_\eta|$ が $\bar{X}_J^+ \cap X$ で有限な最大値をとる.

C_{r_J} で $\bar{X}_J^+$ 内の critical な点の集合とする. $\therefore$ $\bar{X}_J^+$ を X orbit に分解して考えている. 定義より $C_{r_J} \neq \emptyset$ と $\eta \in \mathbb{R}_{>0} \mu_{j_1} + \dots + \mathbb{R}_{>0} \mu_{j_m}$ が同値になる. $q^\lambda : \text{critical}$, の X orbit $C(q^\lambda) = \bar{X}_J^+ \cap X \cdot q^\lambda$ を stable q -cycle と呼ぶ. 当然 $q^\lambda, q^{\lambda'} \in C_{r_J}$, $q^\lambda \neq q^{\lambda'}$ ならば $C(q^\lambda) \cap C(q^{\lambda'}) = \emptyset$. また

命題 $q^\lambda \in C_{r_J}$, $q^{\lambda'} \in C_{r_{J'}}$ に対しても $q^\lambda \neq q^{\lambda'}$ の条件をいれる,

1) $\bar{X}_J^+$ 内の critical な点の数は $K_J = [\mu_{j_1}, \dots, \mu_{j_m}]^2$

2) $\bar{X}$ 内の critical な点の数は $K = \sum_J K_J =$

$$\det \left(\sum_{j=1}^m \mu_j(x_r) \mu_j(x_s) \right)$$

そこで $[\mu_{j_1}, \dots, \mu_{j_m}] = \det |\mu_{j_k}(\chi_l)|$ とおいた、証明は略する。

critical な点の判定条件として次の命題がある。

命題 $t = q^\lambda$ が critical

$$\Leftrightarrow (Q^{-\lambda} b_x^-)(q^\lambda) = b_x^-(q^{\lambda-x}) = 0 \text{ for } \forall x \text{ s.t. } (q, x) > 0$$

1 ホモロジ - $H^n(\Omega', \nabla)$ の次元は上ででてきた K により下から評価される。

命題 $\dim H^n(\Omega', \nabla) \geq K$.

この命題の証明は $C_r = \frac{1}{J} (r_j = \{z^{(1)}, z^{(2)}, \dots, z^{(K)}\})$ とし $\varphi \in \mathcal{L}$ に対する積分 $\langle \varphi \rangle = \langle \varphi; z^{(r)} \rangle = \int \Phi \varphi \bar{\omega}$ を考える。しかし一般には $z^{(r)} \in J \subset \{1, 2, \dots, m\}$ とはならないため重が $X \cdot z^{(r)}$ に pole を持ち上の積分は収束しない。この場合 $J = J_+ \cup J_-$ とわけ重を $\Phi_J = \left(\prod_{j \in J} T_j \right) \Phi$ で置きかえればよい。これを積分の正規化 (regularization) と呼ぶ。

$$\text{reg} \left(\int_{X \cdot z^{(r)}} \Phi \varphi \bar{\omega} \right) = \int_{X \cdot z^{(r)}} \Phi_J \varphi \bar{\omega} = \int_{\mathcal{C}(z^{(r)})} \Phi_J \varphi \bar{\omega}.$$

そして $\varphi_1, \dots, \varphi_K \in \mathcal{L}$ を上手に与れば漸近展開を調べることにより $\det \left(\text{reg} \left(\int_{\mathcal{C}(z^{(r)})} \Phi \cdot \varphi_k \bar{\omega} \right) \right) \neq 0$ がいえ証明が得られる。

§4. Upper estimate of $\dim H^m(\Omega, \nabla)$

この節の目標は次の定理を証明することである.

定理 $a_i, a_i' : \text{generic の条件の元}$ に次が成立.

$$\dim H^m(\Omega, \nabla) = K.$$

前節で $\dim H^m(\Omega, \nabla) \geq K$ は証明されているので逆方向の評価を得ればよい. なお等式成立のための具体的条件はまた求まっていない. これからの課題である.

$\psi(t) \in \mathcal{L}$ が $b_x^-(t) \mid Q^x \psi(t)$ をみたすとき, $\psi(t) = (Q^x b_x^-(t)) \bar{\psi}(t)$, $\bar{\psi}(t) \in \mathcal{L}$, とかける. そして

$$(\nabla^x \psi)(t) = (Q^x b_x^-(t)) \bar{\psi}(t) - u^x b_x^+(t) (Q^x \bar{\psi})(t)$$

となる. そこで $\mathcal{L}$ 上の差分作用素 D_x を次で定義する.

$$D_x = D_x(u, a, a'; t, Q) = (Q^x b_x^-(t)) - u^x b_x^+(t) \cdot Q^x, \quad x \in X.$$

Lemma 1) $\mu_j(x) \mu_j(x') \geq 0$ をみたす $x, x' \in X$ に対し

$$D_{x+x'} = D_x \circ (u^{x'} b_{x'}^+(t) Q^{x'}) + D_{x'} \circ (Q^{-x-x'} b_x^-(t)),$$

2) $\forall x \in X$ に対し

$$D_{-x} = -D_x \circ (u^{-x} Q^{-x}).$$

これより条件の元で $D_{x+x'} \mathcal{L} \subset D_x \mathcal{L} + D_{x'} \mathcal{L}$, $D_{-x} \mathcal{L} = D_x \mathcal{L}$

$$H_j = \{ \lambda \in X_{\mathbb{R}} \mid (\mu_j, \lambda) = 0 \}$$

とおく。超平面の和集合 $\bigcup_{j=1}^m H_j$ は $X_{\mathbb{R}}$ 上に扇 (Fan) F を定義する。 F の単体的分割 $\hat{F}$ を一つとり固定する。

$$\Delta(1) = \{ \hat{F} \text{ の cone } \tau \mid \dim = 1 \} \ni \sigma = \mathbb{R}_{\geq 0} \underbrace{\lambda_\sigma}_{\text{primitive.}}$$

$$\text{とおく。 } Y = \{ \lambda_\sigma \mid \sigma \in \Delta(1) \} \supset Y^+ = \{ \lambda \in Y \mid (\eta, \lambda) > 0 \}.$$

と

定義 $\mathcal{O}_g(u) = \sum_{x \in X} D_x \mathcal{L} \subset \mathcal{L}$

$$= \sum_{\substack{x \in X \\ (\eta, x) > 0}} D_x \mathcal{L}$$

$$= \sum_{x \in Y^+} D_x \mathcal{L}.$$

後2つの等号は先の Lemma から従う。和の index set Y^+ は有限集合になっていることに注意。 $\mathcal{O}_g(u)$ は一般に $\mathcal{L}$ の部分ベクトル空間であるが $\mathcal{O}_g(0) = \sum_{x \in Y^+} (Q^{-x} b_x^-)$ も $\mathcal{L}$ のイデアルになる。次は3つの命題のいいかえである。

Lemma. $V(\mathcal{O}_g(0)) = \{ \text{critical points} \}$. $\dim \mathcal{L} / \mathcal{O}_g(0) = k$.

従って u に関する deformation に對して $\mathcal{O}_g(u)$ の次元がどのように変化するかと、 $\mathcal{L} / \mathcal{O}_g(u) \cong H^m(\Omega, \nabla)$ を条件の元

示す. ロ-ラン多項式 $f = \sum_{w \in X} C_w t^w$ に対しニュートン polyhedron が次で定義される.

$$1) \text{Supp}(f) = \{w \in X \mid C_w \neq 0\}.$$

$$2) \Delta(f) = \text{Supp}(f) \text{ の凸包 } \quad (\text{ニュートン polyhedron})$$

定義より $\Delta(f \cdot g) = \Delta(f) + \Delta(g)$ が成立する. $b_x^\pm(t)$ が $\overbrace{\text{積}}^{\text{1-変数}}$ で表されているので $b_x^\pm, Q_{a_j}^\pm b_x^\pm, Q_{a_j'}^\pm b_x^\pm, Q^{x'} b_x^\pm$ 等の Newton Polyhedron は同じ. $\therefore Q_{a_j}^\pm$ は $a_j \rightarrow a_j q^{\pm 1}, Q_{a_j'}^\pm$ は $a_j' \rightarrow a_j' q^{\pm 1}$ に対応した差分演算子, また $0 \in \Delta(b_x^+)$. 十分大きな $c > 0$ をとり

$$K = K(c) = \{w \in X \mid \|w\| \leq c\}$$

とおくと K の境界上の格子点 $w \in \partial K \cap X$ は

$\{w\} = (\partial K \cap X) \cap (w' + \Delta(b_x^+))$, $\exists w' \in X \cap (K - \partial K)$, $x \in Y^+$ の形に表される. $\overline{K}$ 上にサポートを持つロ-ラン多項式の空間を $\mathbb{C}\langle K \rangle$ とすると次が成立する.

Lemma. $\mathcal{L} = \mathbb{C}\langle K \rangle + \mathcal{O}_Z(0)$

$\dim \mathcal{L} / \mathcal{O}_Z(0) = K$ より, $\varphi_1, \dots, \varphi_K \in \mathcal{L}$. $\exists$ より $\xi = \text{linear span of } \varphi_1, \dots, \varphi_K$, $\therefore \mathcal{L} = \xi \oplus \mathcal{O}_Z(0)$ とできる. 任意の単項式は $t^w = \sum_{x \in Y^+} (Q^{x'} b_x^-)(t) \psi_x^{(w)}(t) + \varphi(w)$ $(w \in K \text{ とする})$

$\psi_x^{(\omega)}(t) \in \mathcal{L}$, $\varphi^{(\omega)} \in \mathcal{E}$ と表せる. $\varepsilon = \varepsilon + \delta$ 十分大きく
と, $\varepsilon = \varepsilon$ より次を仮定してよい

$$1) \Delta(\varphi) \in \mathcal{K}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{E}$$

$$2) \Delta(\psi_x^{(\omega)}), \Delta(\psi_x^{(\omega)}) + \Delta(b_x^+) \in \mathcal{K}$$

これより写像

$$\#_0 : \left(\bigoplus_{\substack{x \in Y^+ \\ \omega \in \mathcal{K} \cap X}} \mathbb{C} \psi_x^{(\omega)} \right) \oplus \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{C} \langle \mathcal{K} \rangle$$

$$\downarrow$$

$$(\bigoplus_{x, \omega} c_x^{(\omega)} \psi_x^{(\omega)}(t), \varphi(t)) \longrightarrow \sum_{x, \omega} c_x^{(\omega)} 2^{-x} b_x^-(t) \psi_x^{(\omega)}(t) + \varphi(t)$$

は写像

$$\#_u : \left(\bigoplus_{\substack{x \in Y^+ \\ \omega \in \mathcal{K} \cap X}} \mathbb{C} \psi_x^{(\omega)} \right) \oplus \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{C} \langle \mathcal{K} \rangle$$

$$\downarrow$$

$$(\bigoplus_{x, \omega} c_x^{(\omega)} \psi_x^{(\omega)}(t), \varphi(t)) \longrightarrow \sum_{x, \omega} c_x^{(\omega)} D_x \psi_x^{(\omega)}(t) + \varphi(t)$$

に連続的に拡張できる. $\#_0$ は全射より $u = +\infty$ となるときには
 $\#_u$ も全射になる. よって $\mathcal{C} \rightarrow +\infty$ ε と $\delta = \varepsilon$ により

命題 $\mathcal{E} + \mathcal{O}_g(u) = \mathcal{L}$ が generic に成立.

$2m$ の非負整数の組 $(L, L') = (l_1, \dots, l_m; l'_1, \dots, l'_m)$ に対し

$$\mathcal{O}_g(u; L, L') = \sum_{x \in Y^+} \left(\prod_{j=1}^m a_j^{l'_j} a_j^{-l_j} \right) D_x \mathcal{L} + \sum_{l_j > 0} (1 - a_j) g^{l_j} t^{\mu_j} \mathcal{L}$$

$$+ \sum_{l_j' > 0} (1 - a_j' q^{l_j' - 1} t^{\mu_j}) \mathcal{L}$$

とおく. $(\prod_{j=1}^m Q_{a_j'}^{l_j'} Q_{a_j}^{-l_j}) D_x = D_x(a_1 q^{-l_1}, \dots, a_m q^{-l_m}; a_1' q^{l_1'}, \dots, a_m' q^{l_m'})$

であり $\mathcal{O}_q(0; L, L')$ はイデアルになる. $|L| + |L'| > 0$ のときはヒルバートの Nullstellensatz より $\mathcal{O}_q(0; L, L') = \mathcal{L}$ となる. 上の命題と同様にして u : 十分小のとき $\mathcal{O}_q(u; L, L') = \mathcal{L}$, $|L| + |L'| > 0$, が成立.

定理 generic な条件のもとに

$$H^m(\Omega, \nabla) \cong \mathcal{L} / \mathcal{O}_q(u),$$

特に

$$\dim H^m(\Omega, \nabla) = K.$$

証明の概略. $(L, L') = (l_1, \dots, l_m; l_1', \dots, l_m')$, $x \in X$ とし

$$\bar{\psi} = \frac{\prod_{\mu_j(x)} (a_j' t^{\mu_j})_{l_j' - \mu_j(x)} (a_j q^{-l_j} t^{\mu_j})_{l_j} \{x\}}{\prod_{\mu_j(x) > 0} (a_j' t^{\mu_j})_{l_j'} (a_j q^{l_j - \mu_j(x)} t^{\mu_j})_{l_j - \mu_j(x)}}$$

$\bar{\psi} \in \mathcal{L}$, とすると次が成立.

$$(\nabla^x \bar{\psi}) \times \left\{ \prod_{j=1}^m (a_j' t^{\mu_j})_{l_j'} (a_j q^{-l_j} t^{\mu_j})_{l_j} \right\} = \left(\prod_{j=1}^m Q_{a_j'}^{l_j'} Q_{a_j}^{-l_j} \right) D_x \bar{\psi}.$$

証明は $\bar{\psi}(t)$ が単項式のときに示し、それを linear にばらせば

よい. 定理の証明に戻る. 空間 V に次の filter を入れる.

$$V(L, L') = \left\{ \varphi \in V \mid \varphi = \frac{\overline{\varphi}}{\prod_{j=1}^m (a_j' t^{\mu_j})_{L_j'} \prod_{j=1}^m (a_j q^{-L_j} t^{\mu_j})_{L_j}}, \overline{\varphi} \in \mathcal{L} \right\}$$

$$V_\ell = \sum_{|L|+|L'|=\ell} V(L, L')$$

$$\mathcal{L} = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V = \bigcup_{\ell=0}^{\infty} V_\ell.$$

generic $\models \mathcal{O}_Z(u; L, L') = \mathcal{L}$, $|L|+|L'| > 0$ より $\forall \varphi \in V_\ell$

は $\varphi - \sum_{\alpha \in X} \nabla^\alpha \psi_\alpha \equiv 0 \pmod{V_{\ell-1}}$ となる. 帰納法により

$V_0 = \mathcal{L}$ の元 φ は cohomologous となる.

$$\mathcal{O}_Z(u) \subset \left(\sum \nabla^\alpha V \right) \cap \mathcal{L} \subset \sum_{\alpha \in X} \nabla^\alpha V \cong \nabla \Omega^{n-1}$$

より自然に写像

$$\mathcal{L} / \mathcal{O}_Z(u) \rightarrow \frac{V}{\sum_{\alpha \in X} \nabla^\alpha V} \cong H^n(\Omega, \nabla)$$

が定義できる.

$$K \leq \dim H^n(\Omega, \nabla) \leq \frac{\dim \mathcal{L}}{\dim \mathcal{O}_Z(u)} \leq \dim \mathcal{L} / \mathcal{O}_Z(0) = K$$

となり証明が完了する.

以上.