

Cell Lineage System と L System における 生長表現能力

京大・理 西尾英之助

Ⅱ。はしがき

ある種の藻や菌にみられるように、細胞が一列に並んで、分枝を出したりして、個体を構成している植物は系状体をなすと云われる。系状体植物の生長過程を離散モデル化したものに A. Lindenmayer [1968] の L system 論がある。ここでは、新たに cell lineage tree (細胞系統樹) の考え方に基づいて、同様の試みとし、生長の表現能力について L system との比較を行なう。

2. 諸定義

(directional, propagating, deterministic) な分枝を持つない cell lineage system (CL system) は並列書換系の一種で $(A, \tilde{D})$ あるいは単に $\tilde{D}$ で定義される。ここで $A = \{0, 1\}$, $\tilde{D}$ はつぎの条件を満たし, cell division time spectrum と云う。

i) $\tilde{D} = (D_0, D_1, \dots)$, 各 D_i は A^* の recursive subset である。

$$ii) D_i \cap D_j = \emptyset \quad (i \neq j)$$

$$iii) \bigcup_{i \geq 1} D_i \cup D_0 \cdot A^* = A^*$$

i) ま $W = (w_1, k_1)(w_2, k_2) \cdots (w_n, k_n)$, $w_i \in A^*$, $k_i \geq 1$
 を $\text{cell}(w_i, k_i)$ ($i=1, 2, \dots, n$) から成る系状態という。 $w_i \in$
 cell の history, k_i を age という。

並列書換規則 $R_i) \sim R_{iii}$

W の各 $\text{cell}(w, k)$ につきの規則を適用する。 ($W \xrightarrow{\tilde{D}} W'$)

$$R_i) w \in D_i, 1 \leq k \leq i-2 \text{ なる } (w, k) \rightarrow (w, k+1)$$

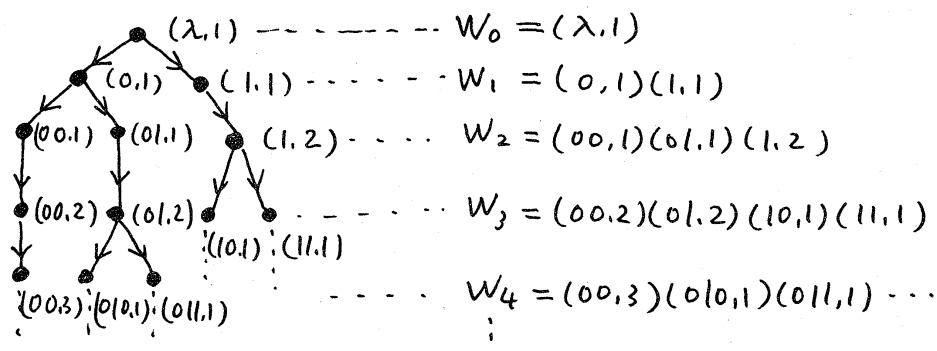
$$R_{ii}) w \in D_i, k = i-1 \text{ なる } (w, k) \rightarrow (w_0, 1)(w_1, 1)$$

$$R_{iii}) w \in D_0 \text{ なる } , \forall k \geq 1 \text{ について } (w, k) \rightarrow (w, k+1)$$

CL system $\tilde{D}$ について, $S(\tilde{D}) = (W_0, W_1, \dots, W_i, W_{i+1}, \dots)$,
 ただし $\forall i \geq 0 \quad W_i \xrightarrow{\tilde{D}} W_{i+1}$ のとき, $S(\tilde{D})$ を $\tilde{D}$ の 生長系列
 という。

言語理論や L system 論と同様, $\tilde{D}$ について, 規則 $R_i) \sim R_{iii}$
 により, derivation tree $T(\tilde{D})$ を定義する。

例 $D_0 \ni 00, D_1 \ni \lambda, 0, 11, D_2 \ni 1, 01,$



分枝のある CL system (BCL system)

$\hat{D} = (D_0, D_1, D_1^b, D_2, D_2^b, \dots)$ とし, i) ~ iii) の条件を満たす。書換規則は R i) ~ R iii) に対して

B i) $w \in D_i$ or $D_i^b, 1 \leq k \leq i-2$ 対し $(w, k) \rightarrow (w, k+1)$

B ii) $w \in D_i, k = i-1$ 対し $(w, k) \rightarrow (w_0, 1)(w_1, 1)$

B ii)' $w \in D_i^b, k = i-1$ 対し $(w, k) \rightarrow (w_0, 1)[(w_1, 1)]$

B iii) = R iii) $w \in D_0, \forall k \geq 1 (w, k) \rightarrow (w, k+1)$

B iv) $[\rightarrow [,] \rightarrow]$

CL system と同様 $W \xrightarrow{\hat{D}} W'$ 生長系列, 生成樹を定義することはできる。

(分枝のある) 生長の抽象形

POL system $G_a = \langle \{c, [,]\}, \{c \rightarrow c, c \rightarrow cc, c \rightarrow c[c], [\rightarrow [,] \rightarrow]\}, c \rangle$ で生成される系列の任意の ω 一つを 系状生長の抽象形 といい, $X = (x_0, x_1, \dots)$ で示す。 (分枝のある)

生長の強弱実現

いま BCL system $\hat{D}$ の生長系列 $SC(\hat{D}) = (w_0, w_1, \dots)$ と生長の抽象形 $X = (x_0, x_1, \dots)$ に対して, 写像 h ($h((w, k)) = c, \forall (w, k), h([) = [, h(]) =]$) に対して, $\forall i \geq 0, h(w_i) = x_i$ となるように, $\hat{D}$ は X の 弱 (BCL) 実現 であるという。 (記号で $\hat{D} \supset X$)

また $T(\hat{D})$ と X の生成樹 $T(X)$ が node のラベルと無

視し一致するとして (同型), $\widehat{D}$ は X と 強 (BCL) 実現 するといふ。記号として $\widehat{D} \supset X$ 。

L system G についても同様に, $h'(S(G)) = X$,
 h' は $\forall a \in \Sigma \quad h'(a) = c \quad h'(\delta) = [, h'(\eta) =]$ なる homomorphism.
 存在するとき, G は X と 弱 (L) 実現 するといふ。 $G \supset X$ 。

G の生成樹 $T(G)$ と X のうちの同型なとき, G は X と 強 (L) 実現 するといふ。 $G \supset X$ 。

強弱生長等価

$\widehat{D}$ と G (あるいは $\widehat{D}$ と $\widehat{D}'$, G と G') について,

$\widehat{D} \supset X$ かつ $G \supset X$ ($\widehat{D} \supset X$ かつ $G \supset X$) なら, 夫々
 $\widehat{D}$ と G は 弱 (強) 生長等価 であるといふ。

明らかに強等価は弱等価であり, 逆は真でない。

3. BCL system と BPDIL system の生長等価性.

書換規則の右辺の長さ・高さ 2 である L system を bifurcating L system といい, BPDIL system などと書く。

定理 1 任意の (分枝のある) BPDIL system G に対し,
 それと強生長等価な (B)CL system $\widehat{D}$ が存在する。

略証 G の生成樹から, 節のラベルを除いたものは, 生長の抽象形の生成樹と考える。この root から順に A^* の元

そうべしとして各 node に分け中を, 各 node の二分装 (bifurcate) するに要する時間からわかる, 各 i について D_i , D_i^b かわかる。またこれらの集合が recursive であることもわかる。

定理 2 弱生長等価な IL system と同等な CL system の存在する。

証明

$$\begin{cases} D_i = \{ \omega \mid \omega \in \{0,1\}^+, 2^{|\omega|^2} = i \} & i \geq 2 \\ D_1 = \{ \lambda \} \\ D : A^* = A^* - \bigcup_{i \geq 1} D_i \end{cases}$$

とすれば, $(A, \tilde{D})$ は無限生長とし, その生長関数 $(f(n) = |W_n|)$ は明らかに $\log n$ の order より高い。他方 L system 論で知られるように任意の L system の生長関数は $\log n$ の order 以上である。■

spectrum が有限個の成分 $(D_0, D_1, \dots, D_k^b)$ から成り, 各成分に対して正規集合があるとす, BCL system は有限正規 system といい。

定理 3 任意の (分枝のある) BPPOL system G に対して, G と強生長等価な (B)CL system とは有限正規のものも存在する。

証明 $G = (\Sigma, P, w_0)$ は bifurcating であるから、書型規則 P はつぎの形の規則で成る。

$$1) a \rightarrow b, \quad 2) a \rightarrow bc, \quad 3) a \rightarrow b[c]$$

$$4) [\rightarrow [\quad 5)] \rightarrow]$$

この性質を使って G から cell division diagram $T(G) = (V, E)$ をつくる。こゝで Vertex の集合 V は

$$V = \{ a \mid a \in \Sigma, a \neq [,] \} \cup \{ \bar{a} \mid a \in P \text{ 中で } x \rightarrow y[a] \text{ とは現われる} \},$$

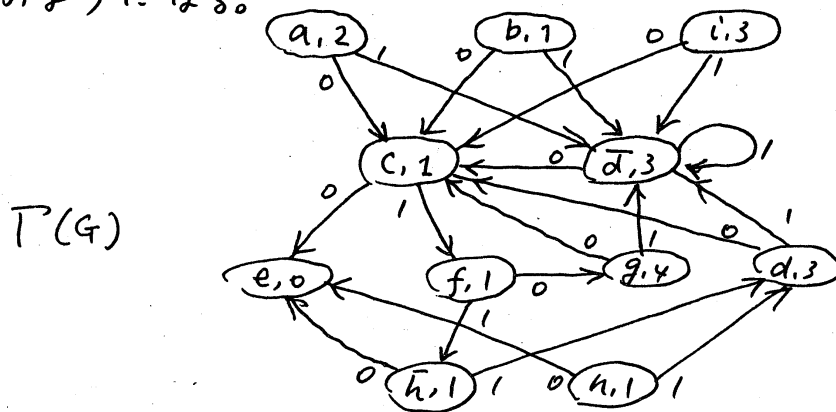
E は $V \times V$ の部分集合で、つぎの edge の集合である。 G は deterministic であるから、 $a \in \Sigma$ から出発して P の規則を順に適用してゆくとき、 $a \rightarrow \dots \rightarrow bc$ と二分岐する場合と $a \rightarrow \dots \rightarrow b \rightarrow \dots \rightarrow b$ のように分岐せずに周回する可能性がある。前者の場合 $a \xrightarrow{0} b$ と $a \xrightarrow{1} c$ なる edge が E の中にある。後者の場合は edge は定義しない。また $a \rightarrow \dots \rightarrow b[c]$ のときは $a \xrightarrow{0} b$ と $a \xrightarrow{1} \bar{c}$ を edge とする。 $a \xrightarrow{0(1)} b$ かつ $\bar{a} \xrightarrow{0(1)} b$ とする。

いま i 番 Vertex に index i を与える。すなわち a から出発して、 i step まで二分岐（分岐を出して戻す）する場合に a に index i を与える。いま、 $\bar{a}$ は i 番 index i を与える。 a から出発して永久に分岐しないときは、 a に index 0 を与える。こゝで $T(G)$ は各 Vertex に index を与えた

finite transition system とする。

[例]. $P: a \rightarrow b, b \rightarrow c[d], c \rightarrow ef, d \rightarrow a, e \rightarrow e$

$f \rightarrow g[h], g \rightarrow i, h \rightarrow ed, i \rightarrow a$ とすると $T(G)$ は図のようになる。



ここで簡単のため $w_0 = a_0 \in \Sigma$ と仮定する。 $T(G)$ において、 a_0 を初期状態とし、 index i をもち、 バーのついた状態へ直接行かないような状態の集合と最終状態集合とすると、 Σ 有限オートマトンによって受理される入力系列の集合の division spectrum の D_i となる。最終状態として index 0 を持つ vertex の集合をとると D_0 となる。また、 index i をもち、 バーのついた状態へ直接 edge 0-ついで... する状態の集合と最終状態とすると、 D_i^b が得られる。これは集合の有限正規集合であり、有限化しえないことは明らかである。故に $w_0 = a_0$ の場合、定理が成立する。

$w_0 = a_1 a_2 \dots a_e$ ($a_i \in \Sigma$) の場合は、各 a_j について、上記の D_i は $D_{a_j i}$ ($D_{a_j i}$ と書く) や $D_{a_j i}^b, D_{a_j 0}$ 等と

おける, $\mathcal{S}$ は, 長さ $\lceil \log_2 l \rceil$ の A^* 元 $\in B_j$ として,

$$(B_j \text{ は } j \text{ の 2 進法展開}) \quad D_i = \bigcup_{j=1}^l B_j \cdot D_{a_j, i} \quad (i=0, \dots, k)$$

(k は $P(G)$ の index の最大値) とおく。また

$$D_i^b = \bigcup_{j=1}^l B_j \cdot P_{a_j, i}^b \text{ とする。} \quad \text{さうして } G = (\Sigma, P, \omega_0) \text{ に}$$

対する BCL system の division time spectrum $\tilde{D} = (D_0,$

$D_1, D_i^b, \dots)$ を求める。

[証明終り]

つまり定理は定理 3 の逆である。

定理 4 任意の有限正規な (B)CL system $\tilde{D}$ に対して, これと強生長等価な (分枝のある) BPDOL system が存在する。

証明

以下のように定理 2.3, A. Salomaa [1969] を利用する。すなわち, ある $\Gamma \cup \Gamma^{-1}$ ベクトル上の正規表現の有限個 α_i と β_i とを, それらの α_i 1 個の有限オートマトンで構成し, β_i のオートマトンの最終状態集合を適宜に定める γ_i とをとり, α_i と β_i に正規表現に対応する集合を受理する γ_i に一致する。

さうするとこれに互いに素な正規集合の有限系 $\tilde{D}$ に対して, この定理によって, これらの各々を受理するオートマトン A_i をつくる。 D_i や D_i^b の受理状態集合を F_i, F_i^b と書く。さうして $F_i = \{q_{i1}, q_{i2}, \dots, q_{in_i}\}$ とする。 F_i や F_i^b は互いに素である。さうして, $i \neq 0$ として, $q_{ij} \xrightarrow{0} q_{km}$, $q_{ij} \xrightarrow{1} q_{hg}$ とする。 G の書換規則をつくるには, 新

とし、記号 g_{ij}^s ($s=1, 2, \dots, i-1$) を導入し、つぎの規則を置く。

$$1) \quad g_{ij} \rightarrow g_{ij}^1 \quad 2) \quad g_{ij}^s \rightarrow g_{ij}^{s+1} \quad (s=1, 2, \dots, i-2)$$

$$3) \quad g_{ij}^{i-1} \rightarrow g_{km} g_{hg}$$

もし $g_{ij} \rightarrow F_i^b$ の元であれば、3) のかわりに

$$3') \quad g_{ij}^{i-1} \rightarrow g_{km} [g_{hg}]$$

を規則とす。以上

$$4) \quad g_{0j} \rightarrow g_{0j} \quad (j=1, 2, \dots, n_0), \quad 5) \quad [\rightarrow [,] \rightarrow]$$

を追加する。

このようにして、 $\tilde{D}$ の (分枝のある) BPDOL system をつくることが出来た。これは明らかに強生成等価である。

[証明終り]

上記の定理3, 4より、有限正理な BCL system と分枝のある BPDOL system の生成実現能力に2...2等価であることがわかる。以下に2定理より、有限であることも正理でない BCL system は、分枝のある BPD <1.1> L system と比較不能となる。

定理5 $\tilde{D} = (D_1, D_2), \quad D_2 = \{ 0^{i^2} \mid i=1, 2, \dots \},$
 $D_1 = A^* - D_2$

とすると、 $\tilde{D}$ と弱生成等価な BPD <1.1> L system は存在しない。

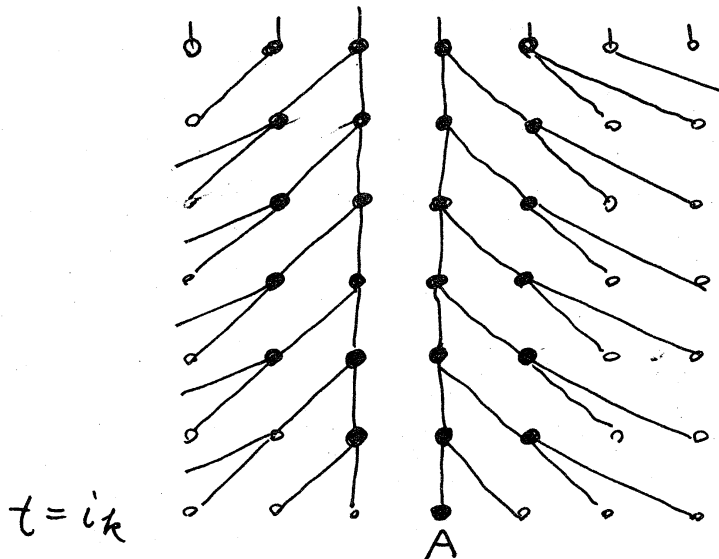
証明 $\tilde{D}$ の derivation tree $T(\tilde{D})$ をつくり、各 node の label を無視し、すべて c と見做す。時刻 t の系列を W_t と書く、この列 $\{W_0=c, W_1, W_2, \dots\}$ を見る。明らかに

$$|W_{i+1}| = 2|W_i|, \quad i \neq k^2 + k - 1 \quad (k=1, 2, \dots)$$

$$= 2|W_i| - 1, \quad i = k^2 + k - 1 \quad (k=1, 2, \dots)$$

なぜか？ 時刻 $i_k = k^2 + k - 1$ を除いて、すべての cell が 2 分裂し、 i_k では 1 個だけ cell が分裂しない。

いま $\tilde{D}$ と弱同値な BPD $\langle 1.1 \rangle$ system G が存在すると仮定し、その derivation tree を $T(G)$ とする。いま時刻 i_k で分裂しなかった cell A をとる。すると、 $i_{k-1}+1$ から i_k-1 の間、 A の祖先はすべて分裂してゐることに注意。したがって下図に示すように、この間 cell A の近傍の高々 5 個の cell が、時刻 i_k の cell A に影響を及ぼす。



さて、14の cell のとりうる状態数は有限であるから、これを s とすると、cell A は $t = i_k$ 後高々 s^5 時間しか認識する
ことが出来ない。他方 $i_k - i_{k-1} = 2k$ は $k \rightarrow \infty$ とき大き
くなるから、cell A の $t = i_k$ で T 度分裂しな... すると s^5
とは不可能である。 [証明終り]

この定理は、定理5の逆である。有限 CL system は必
ずしも BPD(1.1) L system より生長表現能力の低いとはな
らないことを示している。

定理6 BPD(1.1) L system と弱生長等価な有限の CL-
system とは等しいものが存在する。

証明 無限生長をする有限 CL system の生長は、時間に対
して線型かより大きなオーダーをもつ。他方 Vitányi
[1974] によつて対数関数のオーダーで生長する BPD(1.1) L
system が存在することは示されている。 [証明終り]

4. まとめ

分岐のない場合とある場合について、Cell Lineage を基
にして CL system を提示した。これは、一般に L system 以
上も生長表現能力の低い。有限正規な場合には、BPD(1.1) L
system と等価であることが示された。また、有限である
も正規でないときは、CL system と BPD(1.1) L system と生

長表現能力の大小はつけられ...ことを示した。

最後に、定理5の証明に有益な討論をしてくださった岡部
代也、金保にかけつゝ討論してくださった小沢、三島、西橋
達に答へて感謝する。

[参考文献]

Lindenmayer, A. [1968]: J. Theor. Biol. vol. 18 pp 280-315

Hermann, G.T. and Rosenberg, G. [1974]: "Developmental
Systems and Languages", North Holland.

Salomaa, A [1969]: "Theory of Automata", Pergamon Press.

Vitányi, P.M.V. [1974]: Growth of strings in context
dependent Lindenmayer systems, in "L-systems",
Lecture Note, Springer-Verlag.