

アフィン代数多様体上のリッチ曲率が零の
完備ケーラー計量について

東京大学教養学部 小林亮一

ここに報告する結果は、板東重徳氏と筆者の共同研究により得られたものである。Springer Lecture Notes in Math. 1339, Geometry and Analysis on Manifolds に既に発表されているものの改良版を述べる。Ricci-flat Kähler metric の存在については, compact Kähler manifold については Yau による Calabi 予想の解決により,

定理 (Yau) X を compact Kähler 多様体、 ω を任意の Kähler form とする。このとき、 ω と cohomologous な Kähler form ω' で、Ricci-flat であるものが唯一つ存在する。

例. 非自明な例で最も簡単なものは、数学的に大変豊富な対象を提供する K3 曲面である。K3 曲面とは、 $\mathbb{P}_3 \subset \mathbb{C}$ の非特異 4 次曲面に微分同相な複素曲面を意味する。Ricci-flat Kähler metric をもつ K3 曲面の大体の様子を想像するには、4 次元実トーラス上の 16 個の 2-division points に Eguchi-Hanson space を置いたもの (それを involution (-1) で割ったもの) を思い浮かべるとよい。

それはほとんど flat で, 16 個の 2-division points にのみ曲率が集中した形である。2次元トーラスを (-1) で割って正四面体を得られるが, その頂点に曲率が集中しているという描像に近い。

このように, Ricci-flat metric (もっと一般に, Einstein metric) では, 変形パラメータを極端な場合にとばすことにより曲率の集中という現象が起こる。この曲率の集中を拡大鏡で見ると, 物理で言う所の gravitational instantons が見えてくる。これの解析的取扱については, 板東, 加瀬栄, 中島の新しい研究がある。

この稿では, affine algebraic manifold の多くが, 遠方で曲率が $\frac{1}{r^2}$ の order で減衰する Ricci-flat Kähler metric をもつことを示す。減衰の order は, 無限遠の複素解析的様相によっても, 計量に対する遠方での境界条件によっても変わりうる。まず, 結果を述べてからいろいろなコメントを書くことにする。

定理 (板東, 小林). X を射影代数多様体で第1 Chern 類が正であるとする。 D を X の非特異超曲面で, $[D]$ をその Poincaré dual とすると, $c_1(X) = \alpha [D]$, $1 < \alpha \in \mathbb{Q}$ であるとする。もし, D が Kähler-Einstein 計量を許容すれば, $X - D$ は Ricci-flat complete Kähler metric を許容する。

例 Siu, Tian によれば, F は degree $n+1$, n の Fermat hypersurface in $\mathbb{P}_n \mathbb{C}$ とすると, F は Kähler-Einstein metric を許容する. $(\mathbb{P}_n \mathbb{C}, F)$ は定理の条件を満たすから, $\mathbb{P}_n \mathbb{C} - F$ は Ricci-flat complete Kähler metric をもつ. この場合, $\alpha = \frac{n+1}{n-1}$ or $\frac{n+1}{n} > 1$ である.

注意 $\alpha \geq n+1 \Rightarrow (X, D) = (\mathbb{P}_n \mathbb{C}, \mathbb{P}_{n+1} \mathbb{C})$, $X - D = \mathbb{C}^n$ となり, 標準的な flat metric が入る. 以下, $\alpha < n+1$ と仮定する.

定理を証明する前に, 多くの ALE gravitational instanton が以下の証明を modify することにより得られ, 曲率の遠方での評価も自動的に得られることに注意する. たとえば, S^3 を $SU(2)$ の有限部分群で割ったものを無限遠とする ALE 4-manifold は, 2次元 Ricci-flat complete Kähler manifold で, $\text{curvature} = O(\frac{1}{r^6})$ となる. 詳しくは, "Bando-Kobayashi: Ricci-flat Kähler metrics on affine algebraic manifolds, II" を参照していただきたい. ([EGH], [K], [BK])

証明には2つのアプローチがあるが, ここでは直観的な (1) に基づいて説明する:

(1) compact manifold 上の Kähler metric で, Ricci 曲率を遠方に localize せる極限をとる,

(2) 直接 non-compact な $X - D$ 上で存在を示す (Monge-Ampère eq. を

解く)。

仮定: D は Kähler-Einstein, により, 次の様にできる:

L_D を, D の定める正則直線束とする。 L_D の Hermitian metric $\|\cdot\|^2$

をうまくとればその曲率型式 θ は,

(i) θ は X の Kähler form, i.e., $\theta \gg 0$,

(ii) $\theta|_D$ は Kähler-Einstein で, $\text{Ric}(\theta|_D) = (\alpha - 1) \theta|_D$ である。

を満たすとしてよい。今, $\sigma \in H^0(X, \mathcal{O}(L_D))$ で, $(\sigma=0) = D$

なるものとする。 $t := \log \|\sigma\|^{-2}$ とおくと, $\theta = \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} t$

である。 $X - D$ の Kähler metric ω_0 を次のように作ると, そ

れは遠方で 曲率 $= O(\frac{1}{t^2})$ となる complete な metric である:

$$\omega_0 = \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} F$$

F は $X - D$ 上の strictly plurisubharmonic function で,

$$\textcircled{1} D \text{ の近くでは } F := \frac{n}{\alpha - 1} \exp\left(\frac{\alpha - 1}{n} t\right),$$

$\textcircled{2} X - D$ の中の方へ, strictly psh. となる様に振る舞う。

ここで次の事実を思い出そう: $X - D$ 上には Ricci-flat volume

form V_{R-f} で, D に沿って 2α 位の極を持つものが存在する。

$X - D$ 上の関数 f を, 関係式

$$\omega_0^n = e^f V_{R-f}$$

により定めると、次がわかる。

補題 f は X 上の C^∞ -function に振張り, $f|_D \equiv \text{constant}$ である。

補題 $f \equiv 0$ on D としてよい。更に, $D \neq \emptyset$ となる X 上の関数 a をうまくとって $\|\cdot\|^2$ を $e^{-a}\|\cdot\|^2$ にとりかえることにより, 同じ構成法により $\tilde{\omega}_0; \tilde{f}$ を得た時, $\tilde{f} = O(\|\sigma\|^2)$ near D とできる。

2番目の補題は, $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \sigma} = 0$ を D に沿って考えると $\frac{\partial a}{\partial \sigma}$ についての方程式の可解性に帰着できるが, それは Hermitian line bundle の固有値の評価を行なうことにより示せる。

方程式

$$(E_\epsilon'') \quad \text{Ric}(\omega_\epsilon) = -\sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \log \left(\frac{\|\sigma\|^2}{\|\sigma\|^2 + \epsilon} \right)^\alpha$$

$$[\omega_\epsilon] \propto c_1(X) \quad : \text{附帯条件}$$

は, $\left(\frac{\|\sigma\|^2}{\|\sigma\|^2 + \epsilon} \right)^\alpha \mathcal{V}_{R-f}$ を volume element とする Kähler metric を $c_1(X)$ のスカラー一倍の中に求めることと同値である。Yau の Calabi conj. の解決は, この (E_ϵ'') が unique に解けることを意味する。

$X - D$ 上の関数 f_ϵ, F_ϵ を, D の近傍では $t = \log \|\sigma\|^{-2}$ のみにより,

$$f_\epsilon(t) = (e^{-t} + \epsilon)^{-\frac{\alpha-1}{n}}$$

$$F_\epsilon'(t) = f_\epsilon(t)$$

ϵ を満たすことにより定義する。 F_ϵ は、 D に近づくとき ∞ に発散する。 F_ϵ が $X - D$ 全体で strictly psh になる様に $X - D$ の有限部分に拡張することが出来る。以上により、

$$\begin{aligned}\omega_{0\epsilon} &:= \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} F_\epsilon \\ &= f(t) \theta + f'(t) \sqrt{-1} \partial t \wedge \bar{\partial} t \quad \text{near } D \\ &= \frac{1}{(e^{-t} + \epsilon)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} \left(\theta + \frac{\alpha-1}{n} \left(\frac{e^{-t}}{e^{-t} + \epsilon} \right) \sqrt{-1} \partial t \wedge \bar{\partial} t \right)\end{aligned}$$

は X 上の Kähler metric であり、

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \omega_{0\epsilon} = \omega_0 \quad \text{on } X - D$$

を満たしている。

$$\omega_\epsilon = \omega_{0\epsilon} + \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} u_\epsilon$$

$$(E'_\epsilon) \quad \omega_\epsilon^n = \left(\frac{\|\sigma\|^2}{\|\sigma\|^2 + \epsilon} \right)^\alpha \bar{V}_{R-f}$$

により定義する (Yau の Calabi 予想の解決により well-defined)。

$f_\epsilon \in C^\infty(X)$ を、

$$\left(\frac{\|\sigma\|^2}{\|\sigma\|^2 + \epsilon} \right)^\alpha \bar{V}_{R-f} = e^{-f_\epsilon} \omega_{0\epsilon}^n$$

により定義すると、 $f_\epsilon = f + O(\epsilon)$ as $\epsilon \rightarrow 0$ となる。

$$(E'_\epsilon) \Leftrightarrow (E_\epsilon) \quad \omega_\epsilon^n = e^{-f_\epsilon} \omega_{0\epsilon}^n$$

$$\omega_\epsilon := \omega_{0\epsilon} + \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} u_\epsilon$$

$$\text{normalization: } \int u_\epsilon \omega_{0\epsilon}^n = 0$$

以下、この方程式に対する a priori estimate を行う。 (E_ϵ) は

Yau により解ける。 Yau の証明にある a priori estimates を少し

modify して, u_ϵ の ϵ によらない評価を得る。

$$\begin{aligned}\omega_\epsilon^n - \omega_{0\epsilon}^n &= (e^{-f_\epsilon} - 1) \omega_{0\epsilon}^n \\ &= \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} u_\epsilon \wedge (\omega_\epsilon^{n-1} + \omega_\epsilon^{n-2} \omega_{0\epsilon} + \cdots + \omega_{0\epsilon}^{n-1})\end{aligned}$$

両辺に $|u_\epsilon|^{p-2} u_\epsilon$ をかけて積分すると

$$\begin{aligned}&\int \sqrt{-1} \partial |u_\epsilon|^{\frac{p}{2}} \wedge \bar{\partial} |u_\epsilon|^{\frac{p}{2}} (\omega_\epsilon^{n-1} + \cdots + \omega_{0\epsilon}^{n-1}) \\ &= \int (1 - e^{-f_\epsilon}) |u_\epsilon|^{p-2} u_\epsilon \omega_{0\epsilon}^n\end{aligned}$$

ここで, Gollot の等周不等式 [G] によると, Kähler metric $\omega_{0\epsilon}$ に関して, ϵ に無関係な Sobolev constant がとれる。したがって

, ϵ に無関係に Sobolev inequality が使えて,

$$\left(\int |u_\epsilon|^{\frac{n}{n-1}} \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq C_p \int |u_\epsilon|^{p-1} |f_\epsilon| \quad (p > 1) \quad (*)$$

を得る。 $f_\epsilon = f + O(\epsilon)$, $f = O(\| \sigma \|^2)$ により,

$$\exists q < n \quad \text{s.t.} \quad \| f_\epsilon \|_{L^q(X, \omega_{0\epsilon})} \leq \text{bdd independent of } \epsilon$$

と取る。 Hölder inequality より

$$\left(\int |u_\epsilon|^{\frac{n}{n-1}} \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq C_p \left(\int |f_\epsilon|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int |u_\epsilon|^{\frac{n}{q'(p-1)}} \right)^{\frac{1}{q'}} \quad \text{と取る。}$$

$$p \frac{n}{n-1} = q'(q-1) \quad \text{と取る様に } p \text{ をとると,}$$

$$p = p_{-1} := \frac{q'}{q'-q}, \quad q' = \frac{q}{q-1} > \frac{n}{n-1} = \gamma \quad \text{とすると, } p > 1 \text{ である。}$$

$$\left(\int |u_\epsilon|^{p_{-1} \gamma} \right)^{\frac{1}{p_{-1} \gamma}} \leq C \left(\int |f_\epsilon|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \quad \text{independent of } \epsilon \quad (*)$$

$$\begin{aligned}\| u_\epsilon \|_{L^{p\gamma}}^p &= \left(\int |u_\epsilon|^{p\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \leq C_p \left(\int |f_\epsilon|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int |u_\epsilon|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} \quad (*: \text{Hölder}) \\ &\leq C_p \| f_\epsilon \|_{L^q}^{q/\gamma} \| f_\epsilon \|_{L^\infty}^{\frac{p-q}{\gamma}} \| u_\epsilon \|_{L^p}^{p-1} \quad (\text{再び Hölder})\end{aligned}$$

$p = p_i = p_{-1} \gamma^{i+1}$ とおいて iteration をすると,

$$\| u_\epsilon \|_{L^\infty} \leq C \| f_\epsilon \|_{L^q}^\theta \| f_\epsilon \|_{L^\infty}^{1-\theta} \quad \left(\theta = \frac{q}{n} \right) \quad \text{を得る。}$$

したがって, $\|u_\epsilon\|_{L^\infty}$ の ϵ によらない評価を得た。

2階微分以降の評価は比較的標準的である。[BK] には, Yau の Schwarz lemma を用いる方法が書いてある。解 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_\epsilon = u$ の遠方での decay estimate には, てきとうなモデル関数 (ユークリッド空間では Green 関数に相当するもの, あるいはその中核) を barrier として最大値原理を用いると得られる。以上で略証を終わる。

特別な場合には, exact solution が得られる。

例 1. Eguchi-Hanson space

多様体としてはアフィン2次曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ をとり,
 $t := |x|^2 + |y|^2 + |z|^2$ とおく。 $\sqrt{-1} \partial \bar{\partial} F(t)$ が Ricci-flat になるように未知関数 F を定める方程式は常微分方程式である。
 これを解くのは容易である。この場合は, holomorphic isometry として $SU(2)$ が作用しているため常微分方程式に帰着した。

例 2. $\mathbb{P}_2\mathbb{C}$ - smooth conic

$t := \frac{|x|^2 + |y|^2 + |z|^2}{|x^2 + y^2 + z^2|}$ とおいて $\sqrt{-1} \partial \bar{\partial} F(t)$ が Ricci-flat になるように F を定める。この double cover が Eguchi-Hanson である。
 この場合は holomorphic isometry として $SO(3)$ の作用がある。

注意 affine alg. surface のコンパクト化で, 無限遠を smooth でなくともよいとすると, $\alpha > 1$ となる smooth bdry のコンパクト化

もあるし, singular boundary の compact 化で $\alpha = 1$ となるものもあるようなことが起こりうる。 $\mathbb{C}^2$ は $\mathbb{P}_2$ にコンパクト化すると $\alpha = 3 > 1$ であるが, bdy を degenerate cubic curve  とすると $\mathbb{P}_2$ の 1 点 blow up にコンパクト化されて $\alpha = 1$ である。

$\alpha = 1$ の場合は今までの手法は用いられない。それは, ω_ϵ を同様につくると Sobolev inequality をそのままでは使えないからである。それは等周不等式が不成立であることによる。これは Sobolev よりつよいから、うまく Sobolev をコンパクト化で用いると $\alpha = 1$ のときもできるかも知れない。 $\alpha = 1$ のときや bdy が irreducible でなく $\alpha = 1$ となる因子があるときは, complement $X - D$ に入る complete Ricci-flat Kähler metric は Taub-NUT 型 instanton と共通の性質をもっていることが期待される。

文献 [BK] 文中に書いた。

[EGH] Eguchi-Gilkey-Hanson *Differential Geometry, Gauge Theory & Gravitation*. Phys. Report.

[G] Gallot, 日仏セミナーの proceedings.

[K] Kronheimer, ALE gravitational instantons, to appear in JDE.