

# Rankin-Selberg L 関数の zero-free region

## - Siegel-Tatuzawa 型の定理について -

名古屋大・多元数理 市原 由美子 (Yumiko Ichihara)

Graduate School of Mathematics, Nagoya University

Dirichlet L 関数について以下の  $\sigma$  の zero-free region が知られている。

定理1.  $\chi \pmod{d}$  の primitive Dirichlet character とする。この時、

$$\exists c > 0 \text{ s.t. } L(s, \chi) \neq 0 \text{ in } \sigma > 1 - \frac{c}{\log(d(|t|+2))}$$

ここで  $s = \sigma + it$  である。また  $\chi$  が単位指標でない実指標の時は  
実軸上においては高々1つの例外を除いて成立する。

この定理における高々1つの例外の real zero を Siegel zero と呼び、それが存在しないことを示すことが多くの人の望みとなっている。また、 $\chi$  が実指標の時の real zero の問題は、 $\sigma = 1$  付近には real zero が存在しないことを Siegel の定理 と呼ばれる次の定理によって命じられている。

定理2.  $\chi \pmod{d}$  の real primitive Dirichlet character とする。

$$\text{この時 } \forall \varepsilon > 0 \text{ かつ } \exists c(\varepsilon) > 0$$

$$\text{s.t. } L(s, \chi) \neq 0 \text{ in } \sigma > 1 - \frac{c(\varepsilon)}{d^\varepsilon}$$

ただ、この定理で与えられた定数  $c(\varepsilon) > 0$  は具体的に計算できるわけではなく、あくまで理論上の存在が保障されたにすぎない。計算可能な定数で実軸上の zero-free region は次のように 1951 年に Tatuzawa [9] によって示された。

これは定理2とあわせて Siegel-Tatuzawa の定理 と呼ばれる。

定理3.  $\forall \varepsilon > 0$  に対し effective な正定数  $\exists C(\varepsilon) > 0$

$$\text{s.t. } L(1, \chi) > \frac{C(\varepsilon)}{d^\varepsilon}$$

ここで  $d$  は  $\chi$  の conductor であり、この主張は高々1つの例外を除き全ての real primitive character  $\chi$  に対して成り立つ。

この主張から可成り高々1つの例外を除き、real character  $\chi$  に対して

$L(s, \chi)$  の実軸上の zero-free region について計算可能な正定数  $C'(\varepsilon) > 0$  で

$$L(\sigma, \chi) \neq 0 \quad \text{if} \quad 1 - \frac{C'(\varepsilon)}{d^\varepsilon} \leq \sigma$$

と与えられることが導ける。

以上が「現在命じられている zero-free region であり、Siegel zero の非存在や

Siegel-Tatuzawa の定理において例外なしに effective な正定数で zero-free region と与えることは大きな問題となっている。

さて、上記の3つの定理を導くための議論は古典的なものである。それは Dirichlet  $L$  関数が Euler 積を持ちこれを利用し、ある正值性を持つ補助関数を導入し展開される。特に定理2.3 においては次の補助関数

$$\psi(s, \chi_1, \chi_2) = \zeta(s) L(s, \chi_1) L(s, \chi_2) \quad \chi_i: \text{real}, \chi_1 \chi_2 \neq \text{trivial}$$

の Dirichlet 級数展開の係数の正值性を用いる。この正值性は

$$\log \psi(s, \chi_1, \chi_2) = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} (1 + \chi_1^m(p))(1 + \chi_2^m(p)) m^{-1} p^{-ms}$$

において  $p^{-ms}$  の係数が正であることが示される。逆に言えば、 $p^{-ms}$  の

係数が正になるように  $\zeta(s) L(s, \chi_1)$  という積を作ることができる。 $(\chi_1, \chi_2$  と

考える理由は証明のテクニカルな部分に依る。Davenport [1] 参照)。

つり, Euler 積を持ち, Dirichlet  $L$  関数に似た性質を持つ  $L$  関数に关しては  
この古典的な議論やその類似として zero-free region と non-trivial 範囲  
に关する二つの可能となる場合がある。その一例として Rankin-Selberg  $L$  関数  
の zero-free region を紹介する。

まず Rankin-Selberg  $L$  関数を定義する。これは振る舞い物として  $SL_2(\mathbb{Z})$  に  
関する Hecke eigen cusp form を考えることにする。  $f, g \in SL_2(\mathbb{Z})$  の重さ  $k, l$   
の normalized Hecke eigen cusp form として,  $a_n, b_n$  をそれぞれ  $n$ -th  
Fourier 係数とする。このとき,  $\alpha_p, \beta_p$  と  $\alpha_p + \bar{\alpha}_p = a_p$ ,  $|\alpha_p| = p^{\frac{k-1}{2}}$   
 $\beta_p + \bar{\beta}_p = b_p$ ,  $|\beta_p| = p^{\frac{l-1}{2}}$  なる複素数として, 次のように Rankin-Selberg  $L$  関数  
 $L_{f \otimes g}(s, \chi)$  を定義する。  $\text{Re}(s) > 1$  において,

$$L_{f \otimes g}(s, \chi) = \prod_p (1 - \alpha_p \beta_p \chi(p) p^{-s - \frac{k+l}{2} + 1})^{-1} (1 - \alpha_p \bar{\beta}_p \chi(p) p^{-s - \frac{k+l}{2} + 1})^{-1} \\ (1 - \bar{\alpha}_p \beta_p \chi(p) p^{-s - \frac{k+l}{2} + 1})^{-1} (1 - \bar{\alpha}_p \bar{\beta}_p \chi(p) p^{-s - \frac{k+l}{2} + 1})^{-1}$$

これは極を除き  $s$ -平面全体に解析接続される。極は  $f=g$  の  $\chi$  の単位  
指標のとき  $s=1$  に 1 位の極を持つ。また関数等式を持つこと  $Li[6]$   
に示されている。

この Rankin-Selberg  $L$  関数について

$$\log L_{f \otimes g}(s, \chi) = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \left( \left( \frac{\alpha_p}{|\alpha_p|} \right)^m + \left( \frac{\bar{\alpha}_p}{|\alpha_p|} \right)^m \right) \left( \left( \frac{\beta_p}{|\beta_p|} \right)^m + \left( \frac{\bar{\beta}_p}{|\beta_p|} \right)^m \right) \chi(p) m^{-1} p^{-ms}$$

の Euler 積より命題 2.2.2.  $f=g$  であるならば

$$\log L_{f \otimes f}(s, \chi) = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \left( \left( \frac{\alpha_p}{|\alpha_p|} \right)^m + \left( \frac{\bar{\alpha}_p}{|\alpha_p|} \right)^m \right)^2 \chi(p) m^{-1} p^{-ms}$$

とあり  $\left(\left(\frac{\alpha_p}{|\alpha_p|}\right)^m + \left(\frac{\bar{\alpha}_p}{|\bar{\alpha}_p|}\right)^m\right)^2 \geq 0$  であることから, この  $\alpha_p, \bar{\alpha}_p$  達は悪影響を与えることなく, Dirichlet L 関数の場合と全く同じ構成法を用いて, Dirichlet L 関数と全く同じタイプの補助関数をつくり, 古夢時議論で, 定理 1.2.3 と同様の主張を得ることはできる. 定理 1.2 については Perelli [8] (著者 [3] による Perelli [8] の不十分な点は証明されている. [4] 参照) により得られ, 定理 3 については [5] で紹介されている.

すなわち  $f=g$  の場合は zero-free region を言及するにあたり,  $\alpha_p, \bar{\alpha}_p$  の存在は邪魔にならないから,  $f \neq g$  については  $\left(\left(\frac{\alpha_p}{|\alpha_p|}\right)^m + \left(\frac{\bar{\alpha}_p}{|\bar{\alpha}_p|}\right)^m\right) \left(\left(\frac{\beta_p}{|\beta_p|}\right)^m + \left(\frac{\bar{\beta}_p}{|\bar{\beta}_p|}\right)^m\right)$  の存在が影響し, 単純に Dirichlet L 関数の時の議論を適用できない. しかし, 著者 [3] により  $f \neq g$  の場合も  $L_{f \otimes g}(s, \chi)$  の zero-free region について定理 1.2 の形で与えられている. ([3], [4] 参照).  $\chi = 1$  の Siegel-Tatuzawa 型を考える. 以下指標は全実指標とする. すなわち,  $\chi$  の前段階である定理 2 の  $L_{f \otimes g}(s, \chi)$   $f \neq g$  の場合にはどのように得られたかを振り返る. 実は  $\chi$  の証明は

$$\begin{aligned} \varphi(s, \chi_1, \chi_2) &= L_{f \otimes f}(s) L_{f \otimes f}(s, \chi_1) L_{f \otimes f}(s, \chi_2) L_{f \otimes f}(s, \chi_1 \chi_2) \\ &\quad \times \left( L_{f \otimes g}(s) L_{f \otimes g}(s, \chi_1) L_{f \otimes g}(s, \chi_2) L_{f \otimes g}(s, \chi_1 \chi_2) \right)^2 \\ &\quad \times L_{g \otimes g}(s) L_{g \otimes g}(s, \chi_1) L_{g \otimes g}(s, \chi_2) L_{g \otimes g}(s, \chi_1 \chi_2) \end{aligned}$$

という補助関数の導入がポイントになる. これは

$$\log \varphi(s, \chi_1, \chi_2) = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{\alpha_p}{|\alpha_p|}\right)^m + \left(\frac{\bar{\alpha}_p}{|\bar{\alpha}_p|}\right)^m + \left(\frac{\beta_p}{|\beta_p|}\right)^m + \left(\frac{\bar{\beta}_p}{|\bar{\beta}_p|}\right)^m \right\}^2 \frac{1}{(1+\chi_1(p))(1+\chi_2(p)) m^{-1} p^{-ms}}$$

と表すことができる. これは,  $\log \varphi(s, \chi_1, \chi_2)$  の  $p^{-ms}$  の係数の正値性から

$\varphi(s, x_1, x_2)$  の Dirichlet 級数展開における係数の正値性に導ける。

定理 2 の Siegel の定理は次を満たす補助関数を用いて証明できる。

- (\*)  $\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \text{ Dirichlet 級数展開における係数 } \geq 0, \text{ 初項 } > 0 \\ \textcircled{2} \text{ } s=1 \text{ で極を持つ} \\ \textcircled{3} \text{ } \{ (s-1)^{-n}, n \in \mathbb{N} \text{ の係数} \} \ll \{ L\text{-関数の } s=1 \text{ の値} \} d^\varepsilon \\ \quad (\text{すなわち } \varepsilon > 0 \text{ で } d \text{ は指標の conductor}) \end{array} \right.$

$\varphi(s, x_1, x_2)$  は この ①, ②, ③ を満たしており,  $L_{fg}(s, x)$ ,  $f \neq g$  については古典的議論に適用され, 定理 2 の主張が成立するのである。しかし,

Siegel-Tatuzawa 型の定理 3 を得るためには この ①, ②, ③ よりも更に「良い性質」が必要とされる。それは次の性質である。

- (\*\*)  $\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \text{ Dirichlet 級数展開における係数 } \geq 0, \text{ 初項 } > 0 \\ \textcircled{2}' \text{ } s=1 \text{ で奇数位数の極を持つ} \\ \textcircled{3}' \text{ 留数 } \ll \{ L\text{-関数の } s=1 \text{ の値} \} d^\varepsilon \end{array} \right.$

(\*\*) を用いた古典的な議論は Hoffstein-Lockhart [2] でまとめ直されている。

Dirichlet  $L$ -関数や  $L_{fg}(s, x)$  の時は Siegel の定理 (定理 2) を得るための補助関数  $\psi(s, x_1, x_2)$  は (\*), (\*\*) を共に満たしていることが Siegel-Tatuzawa の定理 (定理 3) より得られるが,  $L_{fg}(s, x)$ ,  $f \neq g$  についてはさらに, 先に導いた  $\varphi(s, x_1, x_2)$  は その因子である  $L_{fg}(s)$ ,  $L_{gg}(s)$  が  $s=1$  で 1 位の極を持ち,  $\varphi(s, x_1, x_2)$  は  $s=1$  で 2 位の極を持つこととなる。よって (\*\*) における ②' は満たしていない。 (すなわち ③ と ③' は "ある" 違いの異なる条件であることに注意しておく。定義より  $\varphi(s, x_1, x_2)$  が ① ③' を満たすことが示される)。

ここで少し一般化的な  $L$  関数、Euler 積を持つ  $L$  関数、についてコメントする。  
 Euler 積の性質を用いて補助関数を作る場合、①、②、③、③' を満たすものを作るのはたぶん可能であると思われる。これらの条件のうち一番強い要求は③' の位数の奇数性である。今までこの奇数性を満たさない  $L$  関数について Siegel-Tatuzawa の定理は議論されはあらず、今回  $f \neq g$  の  $L_{f \otimes g}(s, \chi)$  について③' を満たさないものについて Siegel-Tatuzawa 型の主張を具体的に与えたことは意味がある。これからその議論を紹介するが、この証明方法は他の  $L$  関数に対しても応用可能な点で著者は期待している。この証明は名古屋大学・多元数理科学研究科の松本耕二先生との共同研究である。(〔5〕参照。)

まず最初に次の2つの補助関数を導入する。

$$\varphi(s, \chi) = L_{f \otimes f}(s) L_{f \otimes f}(s, \chi) \left\{ L_{f \otimes g}(s) L_{f \otimes g}(s, \chi) \right\}^2 L_{g \otimes g}(s) L_{g \otimes g}(s, \chi)$$

$$\varphi_0(s, \chi) = \zeta(s) \varphi(s, \chi)$$

ここで  $\varphi(s, \chi)$  の構成は  $\varphi(s, \chi_1, \chi_2)$  と全く同様であり、持っている性質も同じで、

①、③' を満たし、 $s=1$  で2位の極を持ち、 $f \neq g$  での  $L_{f \otimes g}(s, \chi)$  の

Siegel-Tatuzawa 型定理の証明のポイントは、新しいタイプの補助関数  $\varphi_0(s, \chi)$

を導入とそれを利用した議論展開である。 $\varphi_0(s, \chi)$  は単純に Riemann zeta と

$\varphi(s, \chi)$  にかけただけで①、③' の性質を持つように作られた。しかし、強引に Riemann

zeta をかけたことで一般に③' を満たすかどうかは分からない。 $\varphi(s, \chi_1, \chi_2)$ ,

$\varphi(s, \chi)$ ,  $\varphi_0(s, \chi)$  を用いて  $L_{f \otimes g}(s, \chi)$   $f \neq g$  についても次の Siegel-Tatuzawa 型の主張を示せる。

主定理.  $\forall \varepsilon > 0$  に対し, effective な正定数  $\exists c(\varepsilon) > 0$

$$\text{s.t.} \quad L_{\log}(1, \chi) > \frac{c(\varepsilon)}{d^\varepsilon} \quad (f \neq g)$$

ここで  $d$  は  $\chi$  の conductor であり, この主張は高さ 1 の例外を除き  
全 real primitive character  $\chi$  に対して成り立つ。

実際に証明を説明する前に準備として次の命題を紹介する。

命題  $\frac{3}{4} \leq \beta < 1$  を fix する。この時  $\exists c, c' > 0$

$$\text{s.t.} \quad \frac{\tilde{\varphi}(\beta)}{r!} + \frac{\text{Res}_{s=1} \tilde{\varphi}(s) \dots d^{c(1-\beta)}}{(1-\beta) \dots (1+r-\beta)} \geq c' \quad (r \text{ は十分大})$$

ここで  $\tilde{\varphi}(s)$  は  $\varphi(s, \chi)$ ,  $\varphi(s, \chi_1, \chi_2)$  or  $\varphi_0(s, \chi)$  である。

この命題は厳密には正しくはない。しかし, 証明の本質を表しているので, これを用いて主定理の証明をする。命題の正しい statement は [5] を参照して頂きたい。

この命題は次の流れで示される。まず次の積分を考える

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\tilde{\varphi}(s+\beta) x^s}{s(s+1) \dots (s+r)} ds$$

$\tilde{\varphi}(s)$  が ① を満たすならばこの積分は下からある正定数で評価され, 更に

$$\frac{\tilde{\varphi}(\beta)}{r!} + \text{Res}_{s=1-\beta} \left( \frac{\tilde{\varphi}(s+\beta) x^s}{s(s+1) \dots (s+r)} \right) + O(d^{r'} x^{\frac{1}{2}-1}) \quad r': \text{定数}$$

と留数定理を用いて書き換えることができる。ここで  $\beta > \frac{1}{2}$  に注意して,

$x$  を十分大の値 ( $r$  だけ依存) をとることで  $O$ -term が十分に小さくなり

命題を得ることができる。(Hoffstein-Lockhart [2], [5] 参照)

以下, いよいよ主定理の証明について述べる。まず, 命題の結果から  $\tilde{\varphi}(\beta) < 0$

となる  $\beta$  を探す。すると  $\frac{\text{Res}_{s=1} \tilde{\varphi}(s) \cdot d^\varepsilon}{(1-\beta) \dots (1+r-\beta)} \geq c'$  が得られるので,  $\tilde{\varphi}(s)$  が

① を満たせば主定理が得られる。従って  $\tilde{\varphi}(\beta) < 0$  なる適当な  $\beta$  を見つける

さて ③' の条件を満足する  $\sigma$  について証明のポイントである。  $\frac{1}{4} > \varepsilon_1 > 0$  を fix する。

Case 1  $\varphi(s, X)$  が  $1 - \varepsilon_1 \leq \sigma \leq 1$  で奇数個の real zero を持つと仮定。

$\varphi(s, X)$  は ① を満たし、 $s = 1$  での値が  $\infty$  を持つ。  $\varphi(s, X) \rightarrow +\infty$  as  $s \rightarrow 1-0$

が成り立つ。つまり  $\beta = 1 - \varepsilon_1$  とすると仮定より  $\varphi(\beta, X) \leq 0$ 。更に  $\varphi(s, X)$  は ③' の

条件を満たしている。よってこの場合は主張を得られる。

Case 2  $\varphi(s, X)$  が  $1 - \varepsilon_1 \leq \sigma \leq 1$  で偶数個 (0 を含む) の real zero を持つと仮定。

(i) 仮定より  $\varphi(s, X)$  の zero が  $\sigma < 1$  かつ  $\varphi(s, X)$  の因子  $L_{f \circ g}(s, X)$  の zero である場合。

この  $L_{f \circ g}(s, X)$  は  $L_{f \circ g}(s, X_1)$  と  $L_{f \circ g}(s, X_2)$  の積で表され、 $\beta_1$  と  $\beta_2$  は  $\beta = \beta_1$  とする。

$\varphi(s, X_1, X_2)$  を用いて  $X_1 + X_2$  なる全  $X_2$  について主定理が成立する  $\sigma$  を示す。

この議論は Dirichlet  $L$  関数や  $L_{f \circ g}(s, X)$  の場合の議論と同じなので

ここでは説明を省略する。(Hofstein-Lockhart [2] 1 = この議論は分りやすくまとめられている。)

(ii)  $\varphi(s, X)$  の因子  $L_{f \circ g}(s, X)$  は  $1 - \varepsilon_1 \leq \sigma \leq 1$  で real zero を持たない場合

① ③' を満たす  $\sigma$  が ②' を満たさない補助関数  $\varphi_0(s, X)$  を作る場合。この

$\varphi_0$  を考える必要がある。ここで新しいタイプの補助関数  $\varphi_0(s, X)$  を

活躍させる。まず  $\varphi_0(s, X)$  は ①, ②' を満たしている  $\sigma$  で  $\varphi_0(s, X) \rightarrow -\infty$  as  $s \rightarrow 1-0$

が成り立つ。よって  $\beta = 1 - \varepsilon_1$  とすると仮定より  $\varphi_0(\beta, X) \leq 0$ 。さて  $\varphi_0(s, X)$  は

一般には ③' を満たす  $\sigma$  からない。しかし、この (ii) の場合は ③' を満たしている。

実際には ④ ...  $L'_{f \circ g}(1, X) \ll L_{f \circ g}(1, X) d^\varepsilon$  を確かめれば、 $\varphi_0(s, X)$

の定義より  $L_{f \circ g}(1, X) \ll d^\varepsilon$  に注意すると ③' の成立が成り立つ。よって

④ が成立している  $\sigma$  を説明する。まず Perelli [7] によれば一般に

$$\frac{L'_{f \otimes g}}{L_{f \otimes g}}(1, X) = \sum_{\substack{p: \text{zero} \\ 0 \leq \operatorname{Re} p \leq 1 \\ 0 \leq \operatorname{Im} p \leq 1}} \frac{1}{1-p} + O(\log d)$$

が得られている。こゝで [3], [4] の  $L_{f \otimes g}(s, X)$  の zero-free region

の結果 (定理 1 に相当) より  $\sum_{p \neq \text{real zero}} \frac{1}{1-p} \ll \sum \log d \ll d^\varepsilon$

が成り立つ。更に (ii) の仮定より  $\sum_{p \neq \text{real zero}} \frac{1}{1-p} \ll \sum \frac{1}{\varepsilon_1} \ll d^\varepsilon$  が

得られる。(Perelli [7] 1.6.2  $\sum_{\substack{p: \text{zero} \\ |\operatorname{Im} p| < 1}} 1 \ll d^\varepsilon$  も成り立つ)。

従って  $\frac{L'_{f \otimes g}}{L_{f \otimes g}}(1, X) \ll d^\varepsilon$  が導かれ、 $\textcircled{\#}$  が示される。

こゝで  $\varphi_0(s, X)$  が  $\textcircled{3}'$  を満たすことが示されるのである。  $\square$

## References

- [1] H. Davenport, *Multiplicative Number Theory* (Second ed.), Springer-Verlag 1980
- [2] J. Hoffstein and P. Lockhart, *Coefficients of Maass forms and the Siegel zero*, *Ann. of Math.* 140 (1994) 161-181.
- [3] Y. Ichihara, *The Siegel-Walfisz theorem for Rankin-Selberg L-functions associated with two cusp forms*, *Acta Arith.* 92 no.3 (2000), 215-227.
- [4] 市原由美子, 2つの cusp form の Fourier 係数の積に対する算術級数の素数定理と Rankin-Selberg L 関数の zero-free region, 数理解析研究所講義録 1091 (1999), 27-35.
- [5] Y. Ichihara and K. Matsumoto, *An analogue of the Siegel-Tatuzawa theorem for Rankin-Selberg L-functions*, preprint.
- [6] W. Li, *L-series of Rankin type and their functional equations*, *Math. Ann.* 244 (1979), 135-166.
- [7] A. Perelli, *General L-functions*, *Ann. Mat. Pura Appl.* 130 (1982) 287-306.
- [8] A. Perelli, *On the prime number theorem for the coefficients of certain modular forms*, in *Banach Center Publ.* 17, PWN-Polish Sci. Publ., Warszawa (1985) 405-410
- [9] T. Tatuzawa, *On a theorem of Siegel*, *Japanese J. Math.* 21 (1951) 163-178.