

$SU_3(5)$ の特徴づけ

名大 理 原 田 耕一郎

(T.T.生 記)

中肉中背, やゝ円顔, まるいまなこ(炯々とかいやく),
まるいめがねをかけ, にこにこしながら黒板の前に立つ
原田耕一郎氏から柔和なしかし若々しい空気がたいてよう。
自称, 他称して 小学校先生タイプ。にこにこしながらか
んでふくめる様に話しかけられ 説明されると だまってい
るのがわるいような気がして そうだそうだとうなづいてし
まう, というような進行をたどりながら, 氏の話をきいて
て さて 小学生程にもよく理解出来たかと問われれば い
ささか心もとないが, とにかく 彼がとき明してくれたと
思われることを記してみることにしよう。

1961年 R. Ree は Suzuki group が 単純
Lie algebra E_6 に対応する Chevalley group を少し
変形することによって得られることに注目して それと類似

の方法により type G_2 の simple Lie algebra に関連して新しい有限単純群を発見した。(2G_2 で記し, 以下において Ree group とよぶ。Amer. Jour. Math., 83 (1961))。

1963年 H.N. Ward は この Ree group 2G_2 を特徴づけようとして 2G_2 のもつ性質の中から 次の5つの性質をとりだし それらをみたす有限群 G を考へた。(Trans. Amer. Math. Soc., 121 (1966))。

- I. G の Sylow 2-subgroup は 位数 8 の elementary abelian group である。
- II. G は index 2 の normal subgroup を ふくまぬ。
- III. G の involution J で $C_G(J) = \langle J \rangle \times L$, $L \cong LF(2, q)$ なる性質をみたすものがある。従つて I より $q \equiv 4 + e \pmod{8}$, $e = \pm 1$ である。
- IV. $\langle R \rangle$ を L の order $q+e/2$ の cyclic subgroup とすると, $\langle R \rangle$ の任意の subgroup $\langle R_0 \rangle \neq \langle 1 \rangle$ の正規化群 $N_G(\langle R_0 \rangle)$ は $C_G(J)$ に入る。
- V. J' を L の involution, S を L の order $q-e/4$ の元で $C_G(J')$ に入るものとする。 $\langle J, J' \rangle$ を normalize し, S と可換でない order 3 の元が存在する。

この様な群 G は 現在 Ree type の group とよばれているがそれは Ward が 上記論文において, この群が Ree の

simple group 2G_2 にかなり近い性質をもつことを示したことによっている。(たゞし Ree type の group がはたして Ree の group 2G_2 に一致するかどうかは open の様である。)

一方 Ree group の発見者 Ree は 2G_2 を置換群として特徴づけることに試みようとし、1964年、次の3つの条件をみたす群 G を考へた。(Can. Jour. 16., 1964).

1) G は set Ω 上の 2 重可移群, $\therefore |\Omega| = m+1$, m は odd $m \geq 3$.

2) $\Omega \ni \alpha, \beta (\neq)$ に対して G の α, β の stabilizer H は 3 点以上を固定する non identity 元を唯一つ含む。

3) すべての involution は少なくとも 3 点を固定する。

そして Ree はこの論文の中でこれらの条件をみたす群は Ree type の group となることを証明している。(この Ree の論文を以下 [R] で記す。)

さて 原田氏は この Ree の定理の証明の中に少し不備な点のあることを指摘した (Proposition 2.3 in [R]).

事実 $SU_3(5)$ が 1), 2), 3) の条件をみたすことを注意し、そして更に $SU_3(5)$ がその唯一つの例外であることを

明かにした。即ち 次の定理が成立つことを示した。

定理 1), 2), 3) をみたす Ree type の Γ は $SU_3(5)$ である。

ここで $SU_3(5) = \{A \mid A \in GL(3, F), A^t \bar{A} = E, \det A = 1\}$
 / center, $F = GF(5^2)$, $F \ni a$ に対して $\bar{a} = a^5$,
 $A = (a_{ij})$ に対して $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$, である。(原田氏のこの
 仕事の背景には order の小さい 2-group を Sylow 2-
 group とする simple group をしらべるといふ一連の仕事
 (近藤氏などと一緒にやっている) があるようで それ
 らをしらべている過程において Ree のあやまりをけつけたも
 ののようである。)

くわしいことは preprint 又は いずれ発表される 氏
 の論文を勉強することにして, 以下同氏ののべた “証明の
 概略” の概略(筋道)をたどることにしよう。

G を 1), 2), 3) をみたす群, B を Ω の 1 点 α の stabilizer,
 w を involution z $\alpha^w = \beta$ なるもの, H の unique involution
 を h_0 , $H_0 = \langle h_0 \rangle$ とする。次の性質はわかってゐる。

- $H^w = H$, $w h_0 = h_0 w$, $|G| = m(m+1)|H|$,
- G の involution は single conjugate class をつくる。
- $B \triangleright U$, $|U| = m$, $(U, \Omega - \alpha)$ は regular,

- d) $G = UH + UHwU$ で G の $\bar{z}$ は unique に $u\bar{h}$ 又は $u_1\bar{h}w u_2$ とかける。 ($u, u_1, u_2 \in U, \bar{h} \in H$)
- e) $\forall p$ に対して H の Sylow p -group は cyclic.
- f) $C(h_0)/H_0$ は Zassenhaus group で order $q(q+1)|H|/2$, $\therefore q = |C_U(h_0)|$.
- g) $m = (qn + n + 1)q$, $\therefore n$ は $Hw = \lambda$ の involution の数。

先に問題として指摘された Proposition 2.3, [R], において Ree は $[H:H_0] = \text{odd}$ なることを主張しているが, $[H:H_0] = \text{odd}$ の仮定のもとには Ree の論文の残り, i.e. G が Ree type の group になること, は正しいようである。そこで $[H:H_0] = \text{even}$ と仮定する。ます

Step 1 では $C(h_0)$ の構造を定める。

$C(h_0)/H_0$ が Zassenhaus group で H/H_0 が even order なることから $C(h_0)/H_0$ は Zassenhaus の結果 (Hamb. Abh., 11, 1936) により,

$$\text{PSL}(2, q), \text{PGL}(2, q), M_q$$

のいずれかに同型である。これより $C(h_0)$ の構造を決定するのであるが 上記の群の Schur multiplier, central extension についての Schur の結果 (J. reine angew. Math., 132, 1907) を用いることにより $C(h_0)$ は次の構造をもつ事がわかる;

(途中省略)

$$C(h_0) = \langle SL(2, q), U \rangle \subset GL(2, q^2)$$

ここで $U = \begin{pmatrix} u^{2^{r-1}+1} & \\ & u^{2^r-1} \end{pmatrix}$, u は $GF(q^2)$ の乗法群にお

ける order 2^{r+1} の元, $q-1=2^r s$, s odd, $r \geq 2$. この構造はくわしくしらべることが出来, Sylow 2-group は order 2^{r+2} の semi-dihedral であること, 又 involution の個数をしらべることにより $m = q^3$, 即ち $|G| = 2(q-1)q^3(q^3+1)$, などわかる。

Step 2 は q の決定にある。

$C(h_0)$ の構造がよくわかり, とくに G の Sylow 2-group が semi-dihedral であることがわかったことから, 最近の R. Brauer の仕事を利用して G についての情報をうることが出来る。(J. of Algebra, 3, 1966). さらこの Theorem (8A) を用いて G の principal 2-block に入る character の degree をすべて定めることが出来る。更にこの Theorem (9A) を用いて $q+1$ をわる odd prime p についての principal p -block, Sylow p -group, その normalizer などの構造をしらべることにより $p=3, q=5$ が出る (途中省略)。

Final Step は G と $SU_3(5)$ とを identification する手づきである。

さて G は

- (1) degree 5^3+1 の doubly transitive group である,
- (2) 1 点の stabilizer B は regular normal subgroup U をふくむ,

- (3) B/U は order 8 の cyclic group である,

をみたす群である。一方 J. of Algebra, 2, 1965, の

鈴木通夫さんが 3 次元 Projective unitary group $U_3(q) = \{A \in GL(3, q^2), A^t \bar{A} = E\} / \text{center}$ の characterization を

行った。それを (今必要として いる) $q=5$ の場合にのべれば 次の結果である。

定理 G が上の条件 (1), (2) 及び (3) の代りに)

- (3') B/U は order 24 の cyclic group である

をみたすならば G は $U_3(5)$ となる。

従って G が $SU_3(5)$ となることをいうには, G を normal subgroup としてふくむ群 G_1 で G の構造からの自然の拡張として (1), (2), (3') をみたすものをつくることが出来ればよいことになる。そのために, G の Sylow 5-group の構造とその Automorphism group の構造をうまく利用している。即ち G の Sylow 5-group について,

- (a) G の Sylow 5-group は exponent 5 の non-abelian group,

(b) U の automorphism group $\text{Aut } U$ の Sylow 2-group は $\cong Z_4 \wr Z_2$,

(c) $\text{Aut } U$ の order 8 の cyclic subgroup は $U/D(U)$, $D(U)$ 上は regular にはたらく order 24 の $\text{Aut } U$ の cyclic subgroup にふくまれる, ($D(U)$ は Frattini subgr.), を証明し, これをつかって 次の様な G をふくむ集合 G_1 を考える:

$$G_1 = U \cdot \langle h_1 \rangle + U \cdot \langle h_1 \rangle^w U$$

ここで h_1 は $\text{Aut } U$ の order 24 の元で, $\langle h_1 \rangle$ が H をふくむものとし, $h_1^w = h_1^{-5}$ と定義する。しからば G_1 はあたえられた積 (i.e. G におけるそれを自然に拡張したもの) についてとらえていることがわかり, 且 G_1 は 1), 2), 3) をみたすことがわかる。

エピローグ

一タ 岩堀さんをおこんで ダベリ会を行った。話が数学の仕事についてのことになり, 刀をとくだけで切ろうとしない人が多い といった話がでたとき, 原田耕一郎氏曰く “僕の場合は 刀のとき方がたらないようだ。ろくろくといでない刀でたたき切ってみて まだきれる まだきれる と切っているような状態だ”。 (終わり)。

後記 Princeton の研究所に行かれた原田氏からの便りによると、Princeton で会った Gorenstein が最後の部分 $\cong U_3(5)$ の証明に誤りを発見したので、この部分は取り消される由です。従って問題の群が $U_3(5)$ に限るか否かは、未解決のようです。(1968-10-10 岩堀記)