

20. フラストレートした2次元イジングモデルの相関関数の臨界挙動

東大 理 知久哲彦

京大教養 宮下精二

§ 1 はじめに

2次元イジングモデルは相転移を示す厳密に解けるモデルとして、Onsager¹⁾以来、多くの人々によって研究されてきた。スピングラスの研究において、フラストレーションの果たす役割の重要性が認識されてきたとともに、周期的なイジングモデルにおいても、フラストレーションによって、リエントラント現象²⁾、相関関数の非単調な振舞い等³⁾、強磁性的なモデルに見られない現象が起こることが分かった。系の持つ揺らぎの情報は相関関数に豊富に含まれているが、フラストレーションの存在は、この相関関数の振舞いに大きく影響を及ぼす。こうした相関関数の振舞いを解析的に評価しようとする研究⁴⁾がされてきているが、相関関数の漸近形の求まっている系は、系の周期単位であるユニットセルが小さく、相関をとる2点が対称性のいい位置関係にある時に限られている。特に、フラストレーションが本質的に効くのは、ユニットセルが大きい系になるため、これらの解析的評価はBlock-Toeplitz行列式の解析を伴い、一部の特別な例⁵⁾を除いて、できていない。そこで我々は、自由エネルギーの厳密な表式から、そこに含まれている相関関数の振動モードに関する情報を取り出すことを試み、三角格子の厳密な結果と比較してみた。

§ 2 自由エネルギーの厳密表式

隣接相互作用をもつ周期的なイジングモデルの自由エネルギーは(1)のように厳密に表せる。

$$F = \frac{1}{n} \sum_i \log(\cosh(J_i/k_B T)) + \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \log\{\det D(p, q; T)\} dp dq \quad (1)$$

(n_s : ユニットセル内のスピン数。 Σ は、ユニットセル内のボンドに関する和。 $D(p, q; T)$ は、系によって決まるある行列。)

(1) において第一項は、 $T \neq 0$ で特異性を示さず、相転移についての情報は第二項に含まれている。つまり $\det D(p, q; T) = 0$ が解をもつ T においてこの系は相転移を示す。そしてその時の p, q は、出現するオーダーパラメーターの波数に対応している。例えば正方格子上的モデルにおいて、強磁性的相互作用では $p = q = 0$ 、反強磁性相互作用では $p = q = \pi$ のとき、 $\det D(p, q; T) = 0$ は $T = T_c$ で解をもつ。さらに、 $T \neq T_c$ においても $\log \{ \det D(p, q; T) \}$ は、 (p, q) モードの自由エネルギーへの寄与を表しているものと思われる。そこで、 $T = T_c$ において成り立つこの対応関係を $T \neq T_c$ へと拡張した2通りの方法を考案し、それを反強磁性三角格子の場合で試みる。

§ 3 三角格子上的反強磁性イジングモデル

三角格子上的イジングモデルの相関関数は Stephenson³⁾ によって詳細に解析されている。その主な性質をあげてみる。このモデルは等方的な場合、フラストレーションのため基底状態が無限に縮退している。そして相関関数は距離に関してべきで減少する。さらに基底状態の幾何学的拘束条件により、3つの副格子内の相関が強くなるため、相関関数の漸近形は $p = 2\pi/3$ で振動している。 $T = 0$ での漸近形は(2)のようになる。

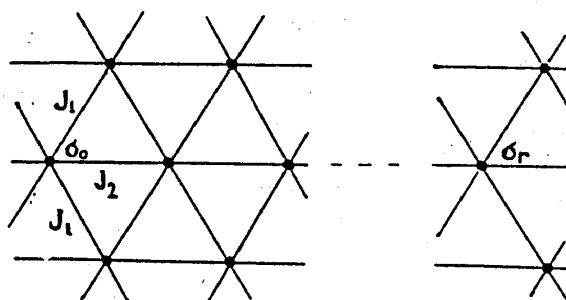


図1: 考察するイジングモデルの三角格子と相関をみるスピンの位置関係

$$\langle \sigma_0 \sigma_r \rangle \sim C_0 r^{-1/2} \cos(2\pi r/3) \quad (2)$$

$T > 0$ で重要なのは、相関関数の振動モードの波数が温度の関数になっており、連続的に変化することである。これは相関関数の振動モードは必ずしも基底状態の周期に束縛されていないことを示しており、有限温度での揺らぎによって引き起こされる現象といえる。さ

らに完全等方的でなく、一方向の相互作用の大きさを変えたときの結果について述べる。 $J_1, J_2 < 0$ とすることにすると、このモデルは $|J_2| < |J_1|$ のとき $T > 0$ で相転移を示す。基底状態は $|J_2| < |J_1|$ では J_1 からなる正方格子が反強磁性的秩序を示し、 $|J_2| > |J_1|$ では J_2 方向に反強磁性的、垂直方向にはフリーである。これを反映して、振動モードの波数 p は $|J_1| < |J_2|$ では高温極限 $p = \pi$ ($T \rightarrow \infty$ では、スピン相関は最も近い相互作用が優先し、 $p = \pi$ となる。)から温度を下げるにつれ一度 $p < \pi$ 方向に移動し、 $T \rightarrow 0$ で基底状態の波数 $p = \pi$ へと接近する。 $|J_1| > |J_2|$ では、より温度を下げるにつれて p は減少し、 $T \rightarrow T_c + 0$ において出現する秩序の波数 $p = 0$ へと接近する。 $|J_1| = |J_2|$ ではその中間となり、 $T \rightarrow 0$ において $p \rightarrow 2\pi/3$ という振舞いを示す。(図2)

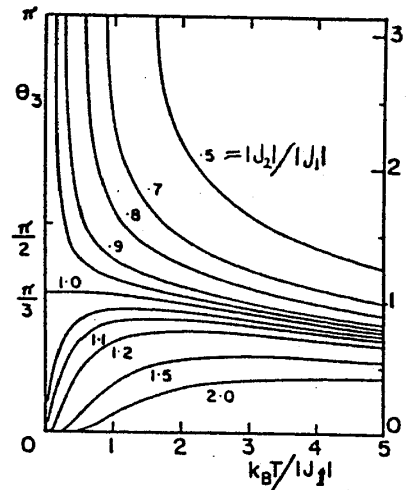


図2：図1の系における相関関数の漸近形の振動モード p_{cor} の振舞い (Stephensonによる)。
ただし $\theta_3 = \pi - p_{cor}$ 。

§4 det D (p, q; T) の解析法 (1)

§2において、 $\det D (p, q; T)$ が0に近いところの (p_0, q_0) のモードが自由エネルギーに大きく寄与していることが示唆されているが、ここでは解析法(1)として $\det D (p, q; T)$ を最小にする (p_{min}, q_{min}) を調べてみた。正方格子においてはすべての T で、強磁性では $p_{min} = q_{min} = 0$ 、反強磁性では $p_{min} = q_{min} = \pi$ であり、これは相関関数の振動モードと一致している。図1に示した系における (p_{min}, q_{min}) は図3のように振舞う。これを§3の相関関数の振動モード p_{cor} (図2)と比較すると、 $|J_1| = |J_2|$ の場合、 p_{cor} は T によって変化するが、 $p_{min} = 2\pi/3$ であり T に依存しない、というように一般には p_{cor} と p_{min}

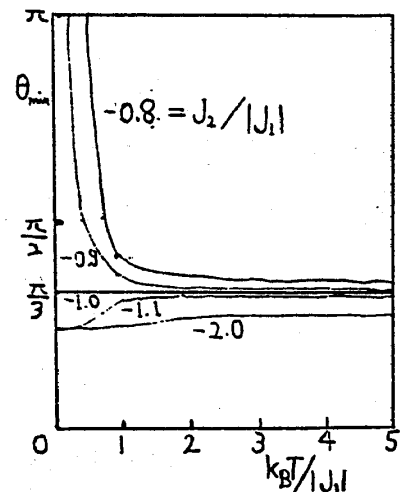


図3：図1の系における p_{min} の振舞い。
ただし $\theta_{min} = \pi - p_{min}$ 。

は一致しない。しかし、 T_c が存在するときは $T = T_c$ で $p_{\text{cor}} = p_{\text{min}}$ であり、 $T \rightarrow 0$ では $p_{\text{cor}} = p_{\text{min}}$ が成り立つ。 $T > T_c$ における p_{cor} と p_{min} の不一致は、 $T > T_c$ において相関関数が指数的に減少していること、そして p_{cor} が相関をとるスピンの方向を決めたときに定まるものであるのに対し、 p_{min} は格子上の全スピンを一度に見たときに決まるものであることに起因しているように思われる。よって p_{min} は p_{cor} と比較するよりも、グローバルな $\int \exp(i\vec{p}\vec{r}) \langle \sigma_0 \sigma_{\vec{r}} \rangle d\vec{r}$ のような量と比較すべきであろう。

§5 $\det D(p, q; T)$ の解析法 (2)

もう一つの解析法は、 p, q を複素空間にまで広げることで実現される。 $\det D(p, q; T)$ が $\xi = \exp(ip)$ と $\eta = \exp(iq)$ について一価関数であることに注意すると、 $\det D(p, q; T) = d(\xi, \eta; T)$ とおくことができる。そのとき §2 の $\det D(p, q; T) = 0$ という条件は、

$$\begin{cases} d(\xi, \eta; T) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \eta} d(\xi, \eta; T) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

というように拡張できる。このとき (3) 式における偏微分は相関を見る方向の変数 ξ を固定して行うところがポイントである。この条件を満たす点のうち $|\xi| < 1$ を満たし、絶対値の一番大きいものを ξ_0 とすると、 ξ_0 と相関関数の漸近形の振動モード p_{cor} 、相関距離 r_0 の間には (4) のような関係が認められる。

$$\xi_0 = e^{-1/r_0 \pm i p_{\text{cor}}} \quad (4)$$

関係式 (4) は図 1 のような系では厳密に成り立つ。この関係式は、もっと一般的にユニットセルの大きな系でも厳密に成り立つように思われるが、証明はない。

§6 まとめと展望

フラストレーションのある 2 次元イジングモデルの相関関数を解析的に評価するのは一

般に難しいが、我々はもっと簡単に、自由エネルギーの表式中の $\det D(p, q; T)$ からこれらの情報を引き出す方法を提案した。その解析法(2)では、相関関数の漸近形に関する情報が正しく得られ、解析法(1)ではむしろ χ_p に相当する $\int \exp(i\vec{p}\vec{r}) \langle \sigma_0 \sigma_r \rangle d\vec{r}$ に関する情報が得られそうである。これについては、さらに一致度を見る必要がある。一方で $T = T_c$ において、 $\det D(p, q; T)$ の零点が $p, q \neq 0, \pi$ であるような、強磁性でも反強磁性でもない対称性の破れの可能性も否定されていないので、こうした相転移の可能性も探してみたい。

参考文献

- 1) L. Onsager, Phys. Rev. **65** (1944) 117.
- 2) V. G. Vaks, A. I. Larkin and N. Ovchinnikov, Sov. Phys. JETP **22** (1966) 820.
H. Kitatani, S. Miyashita and M. Suzuki, Phys. Lett. **108A** (1985) 45.
- T. Chikyu and M. Suzuki, Progr. Theor. Phys. **78** (1987) 1242.
- 3) J. Stephenson, J. Math. Phys. **11** (1970) 413.
- 4) T. T. Wu, Phys. Rev. **149** (1966) 380.
- 5) H. Au-Yang and B. McCoy, Phys. Rev. **B10** (1974) 3885.
- 6) M. Kac and J. C. Ward, Phys. Rev. **88** (1952) 1332.
N.V.Vdovichenko, Sov. Phys. JETP **20** (1965) 477.