

Yang - Baxter - 方程式と表現論

阪大 理学部 村上 順

1. Yang - Baxter 方程式

1.1 Yang - Baxter 方程式 (以下 YBE と略す) は、古典及び量子可積分系において重要な役割を担っている。古典 YBE の解とは、ある線型空間 V に対し、次の関係式 (1.1) をみたす 1 つのパラメータ x をもった $\text{End}(V \otimes V)$ の元 $T(x)$ のことである。 (1.2) で $T^{12}(x)$ は、 $\text{End}(V \otimes V \otimes V)$ の元で、 $V \otimes V \otimes V$ の i 番目と j 番目の V には $T(x)$ で作用し、残りの V には恒等写像で作用するものである。

$$[T^{12}(x), T^{13}(x)] + [T^{12}(x), T^{23}(x)] + [T^{13}(x), T^{23}(x)] = 0 \quad (1.1)$$

$\mathfrak{g}$ を有限次元単純リ - 環とし、 V を有限次元 $\mathfrak{g}$ - 加群とする。 $V^{\otimes n} = V \otimes V \otimes \cdots \otimes V$ (n 階のテンソル積) に対し $\mathfrak{g}$ が対角作用で作用する。このとき、 $\text{End}(V \otimes V)$ 中の古典 YBE の解で、 $\mathfrak{g}$ の作用と可換になり、unitarity をみたすものが分類されている。

一方, 量子化された YBE 方程式の解とは, ある線型空間 V に対し, 1 つのパラメータ q と量子化のパラメータ q を含む $R(x) = R(x, q) \in \text{End}(V \otimes V)$ で, $r(x)$ のときと同様の記法のもとで, 次の式 (1.2) を満たすものである。

$$R^{12}(x) R^{13}(xy) R^{23}(y) = R^{23}(y) R^{13}(xy) R^{12}(x) \quad (1.2)$$

V を古典型単純リ-環 $\mathfrak{g}$ の基本表現とする。このとき, q を 1 にした極限が [B-D] の解 $r(x)$ になるような (1.2) の解が [J] により求められた。このとき, V は $\mathfrak{g}$ の展開環の q -analogue $\hat{U}_q(\mathfrak{g})$ の基本表現とみなせる。そして [J] の解は $\hat{U}_q(\mathfrak{g})$ の対角作用と可換になっている。

1.2. 解の具体的な形

特に A 型と C 型に対応する (1.2) の解を書いておく。

A_n 型に対応する解:

$$\dim V = n+1$$

$$R(x) = (x - q^2) \sum_{\alpha=1}^{n+1} E_{\alpha\alpha} \otimes E_{\alpha\alpha} + q(x-1) \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^{n+1} E_{\alpha\alpha} \otimes E_{\beta\beta} \\ - (q^2 - 1) \left(\sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha < \beta}}^{n+1} + x \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha > \beta}}^{n+1} \right) E_{\alpha\beta} \otimes E_{\beta\alpha} \quad (1.3)$$

但し, $E_{\alpha\beta}$ は α 行 β 列成分のみが 1 で他が 0 という行列単位を表わす。

C_n 型に対応する解:

$$\dim V = 2n$$

$$\begin{aligned} R(x) = & (x - q^2)(x - q^{2n+2}) \sum_{\alpha \neq \alpha'} E_{\alpha\alpha} \otimes E_{\alpha\alpha} + q(x-1)(x - q^{2n+2}) \sum_{\alpha \neq \beta, \beta'} E_{\alpha\alpha} \otimes E_{\beta\beta} \\ & - (q^2 - 1)(x - q^{2n+2}) \left(\sum_{\substack{\alpha < \beta \\ \alpha \neq \beta'}} + x \sum_{\substack{\alpha > \beta \\ \alpha \neq \beta'}} \right) E_{\alpha\beta} \otimes E_{\beta\alpha} \\ & + \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha\beta}(x) E_{\alpha\beta} \otimes E_{\alpha'\beta'} \end{aligned} \quad (1.4)$$

但し、 α, β は $1, 2, \dots, 2n$ まで正整数。また、 $\alpha' = 2n+1 - \alpha$ を表わす。そして

$$\bar{\alpha} = \begin{cases} \alpha - \frac{1}{2} & (1 \leq \alpha \leq n) \\ \alpha + \frac{1}{2} & (n+1 \leq \alpha \leq 2n) \end{cases},$$

$$\varepsilon_{\alpha} = \begin{cases} 1 & (1 \leq \alpha \leq n) \\ -1 & (n+1 \leq \alpha \leq 2n) \end{cases}$$

とおくとき、

$$a_{\alpha\beta}(x) = \begin{cases} (q^2 x - q^{2n+2})(x-1) & (\alpha = \beta) \\ (q^2 - 1)(\varepsilon_{\alpha} \varepsilon_{\beta} q^{2n+2} q^{\bar{\alpha} - \bar{\beta}}(x-1) - \delta_{\alpha\beta'}(x - q^{2n+2})) & (\alpha < \beta) \\ (q^2 - 1)x(\varepsilon_{\alpha} \varepsilon_{\beta} q^{\bar{\alpha} - \bar{\beta}}(x-1) - \delta_{\alpha\beta'}(x - q^{2n+2})) & (\alpha > \beta) \end{cases}$$

である。

1.3. ブレイド群との関係

$P^{ij} \in \text{End}(V^{\otimes n})$ を次の元とする。 入れ替える。

$$P^{ij}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_i \otimes \cdots \otimes v_j \otimes \cdots \otimes v_n) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_j \otimes \cdots \otimes v_i \otimes \cdots \otimes v_n$$

として $R^{ij}(x) \in \text{End}(V^{\otimes n})$ を、 i 番目と j 番目の V に $R(x)$ で作用し、残りは恒等写像で作用するものとし

$$\check{R}^{ij}(x) = R^{ij}(x) P^{ij}$$

と置く。すると関係式 (1.2) は次のようになる。

$$\check{R}^{12}(x) \check{R}^{23}(xy) \check{R}^{12}(y) = \check{R}^{23}(y) \check{R}^{12}(xy) \check{R}^{23}(x) \quad (1.5)$$

ここでブレイド群の定義を思い出してみよう。 n 本の糸をもつブレイド群 B_n は次の関係式で定まる。

$$B_n = \langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad (|i-j| \geq 2) \rangle \quad (1.6)$$

$S_i = \check{R}^{i(i+1)}(0)$ と置く。式 (1.5) と (1.6) とにより、 σ_i を S_i に対応させることにより、 B_n の $\text{End}(V^{\otimes n})$ への表現が得られる。

さらに $\text{End}(V^{\otimes n})$ 上の “量子化された” 指標を考える
と絡み目の不変量である二変数 Jones 多項式や Kauffman

多項式と関係していることがわかる。[W], [T]

2. Brauer の中心環とその q -analogue

2.1. 中心環とその q -analogue

$\mathcal{A}$ を リー-環とし, V を $\mathcal{A}$ -加群とする。 $\mathcal{A}$ の $V^{\otimes n}$ への対角作用を Δ_n で表わす。そして

$$Z_n = \{ x \in \text{End}(V^{\otimes n}) \mid \Delta_n(g)x = x\Delta_n(g) \text{ for } \forall g \in \mathcal{A} \} \quad (2.1)$$

を $\mathcal{A}$ と V に関する 中心環 と呼ぶ。

例 1. $\mathcal{A} = \mathfrak{gl}_m(\mathbb{C})$, $V = \mathbb{C}^m$ (基本表現) の場合.

Z_n は n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の群環 $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ の商に同型になる。特に, $m \geq n$ のときには同型となる。

2. $\mathcal{A} = \mathcal{AP}_{2m}(\mathbb{C})$ または $\mathcal{AQ}_{2m+1}(\mathbb{C})$ で基本表現の場合.

Z_n の構造は [B] 及び [W] によりわかる。(§2.3 参照)

さて, 中心環の q -analogue を考えてみよう。リー-環 $\mathcal{A}$ の展開環の q -analogue $\hat{\mathcal{U}}_q(\mathcal{A})$ についても, Hopf algebra としての対角作用 Δ_n を考えることから, 上と同様に $\text{End}(V^{\otimes n})$ 中に中心環を考えることができる。但し, V は $\hat{\mathcal{U}}_q(\mathcal{A})$ -加群とする。

2.2. A_m 型の場合

A_m 型の基本表現に対応する中心環 Z_n の q -analogue $\check{Z}_n$ は、神保氏により、 A_{n-1} 型の Iwahori-Hecke algebra の商となることが示された。特に、 $m \geq n$ のときには、同型になる。ここで、 A_{n-1} 型の Iwahori-Hecke algebra H_n とは、次の関係式で定義される algebra である。

$$\begin{aligned} H_n = \langle T_1, T_2, \dots, T_{n-1} \mid & T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1}, \\ & T_i T_j = T_j T_i \quad (|i-j| \geq 2), \\ & T_i^2 - (q + q^{-1}) T_i - 1 = 0 \quad \rangle \quad (2.2) \end{aligned}$$

そして T_i を $-q \check{R}^{(i+1)}(0)$ に移すことにより、 H_n の $\check{Z}_n$ への表現を作れる。但し、 $\check{R}^{(i+1)}(0)$ は、解 (1.3) から §1.3 のようにして作ったものとする。上の H_n から $\check{Z}_n$ への写像は全射である。

2.3. C_m 型の場合の中心環

まず C_m 型の単純リ-環とし、 V をその基本表現とする。

$\text{End}(V^{\otimes n})$ 中の中心環 Z_n は m が n に対して十分大きいときには、[B] での algebra $D_n(\lambda)$ で $\lambda = -2m$ とおいたものに等しい。 $D_n(\lambda)$ は単位元を持つ algebra で生成元と関係式で次により定義される。 λ は不定元

$$\begin{aligned}
D_n(X) = & \langle \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1}, e_1, e_2, \dots, e_{n-1} \mid \\
& \Delta_i^2 = 1, \Delta_i e_i = e_i \Delta_i = e_i, e_i^2 = x e_i, \\
& \Delta_i \Delta_{i+1} \Delta_i = \Delta_{i+1} \Delta_i \Delta_{i+1}, \\
& \Delta_i \Delta_j = \Delta_j \Delta_i, \Delta_i e_j = e_j \Delta_i, e_i e_j = e_j e_i \\
& \quad (|i-j| \geq 2) \\
& e_i e_{i+1} e_i = e_i, \\
& \Delta_i e_{i+1} e_i = \Delta_{i+1} e_i, e_i e_{i+1} \Delta_i = e_i \Delta_{i+1} \rangle
\end{aligned} \tag{2.3}$$

$D_n(X)$ を Brauer の中心環 と呼ぶ。

C_m 型のリ-環の基本表現に関する中心環は、一般には、 $D_n(-2m)$ の商である。

2.4. C_m 型の場合の中心環の q -analogue

まず algebra $C_n(d, q)$ (d, q は不定元) を定義する。(単位元を 1)

$$C_n(d, q) =$$

$$\langle \tau_i, \tau_i^{-1}, \varepsilon_i \mid$$

$$\tau_i \tau_{i+1} \tau_i = \tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+1}, \quad \varepsilon_i = \varepsilon_i,$$

$$\tau_i^{\pm 1} \varepsilon_{i+1} \varepsilon_i = \tau_{i+1}^{\mp 1} \varepsilon_i, \quad \tau_i^{\pm 1} \varepsilon_{i-1} \varepsilon_i = \tau_{i-1}^{\mp 1} \varepsilon_i,$$

$$\varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \tau_i^{\pm 1} = \varepsilon_i \tau_{i+1}^{\mp 1}, \quad \varepsilon_i \varepsilon_{i-1} \tau_i^{\pm 1} = \varepsilon_i \tau_{i-1}^{\mp 1},$$

$$\tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i, \quad \varepsilon_i \tau_j = \tau_j \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \varepsilon_j = \varepsilon_j \varepsilon_i \quad (|i-j| \geq 2),$$

(終端)

$$\begin{aligned} z_i z_i^{-1} &= z_i^{-1} z_i = 1, \quad z_i \varepsilon_i = \varepsilon_i z_i = (-\alpha^2 q)^{-1} \varepsilon_i, \\ z_i - z_i^{-1} &= (q - q^{-1}) (1 - \varepsilon_i) > \end{aligned} \quad (2.4)$$

このとき、次が成り立つ。

命題 $\alpha = q^{-\frac{\lambda}{2}}$ とおき、 $C_n(\alpha, q)$ の $q \rightarrow 1$ とした極限をとると、 $D_n(\lambda)$ と同型になる。但し、 z_i, z_i^{-1} は λ_i に対応し、 ε_i は e_i に対応する。

証明 $C_n(\alpha, q)$ では次が成り立つ。

$$\varepsilon_i^2 = \left(1 - \frac{\alpha^2 q - \alpha^{-2} q^{-1}}{q - q^{-1}} \right) \varepsilon_i.$$

($C_n(\alpha, q)$ の定義 (2.4) の最後の関係式に ε_i をかける)。

ここで $q \rightarrow 1$ とすると、 $\varepsilon_i^2 = \lambda \varepsilon_i$ となる。 $D_n(\lambda)$ の

他の関係式は、 $C_n(\alpha, q)$ の関係式から直ちに従う。

さらに $C_n(\alpha, q)$ と $D_n(\lambda)$ の次元が共に、 $(2n-1)(2n-3)\cdots 3$

となることから、上の命題が成り立つ。 ■

algebra $C_n(\alpha, q)$ は、絡み目の不変量である Kauffman
の項式に 関係する algebra として [B-W] & [M] で
導入された。その後、 $C_n(q^m, q)$ の z_i を量子化された YBE の
解 (1.4) に 対応する $R^{(u)}(0)$ の 適当な q の中乗倍に
対応させる ことにより、 $C_n(q^m, q)$ の、 $\hat{u}_q(y)$ 作用と

可換な $\text{End}(V^{\otimes m})$ への表現ができることがわかった。
 それゆえ、次の比較をして、 $\hat{U}_q(\mathfrak{g})$ と V に関する中心環が
 $C_n(q^m, \mathfrak{g})$ の商となることがわかる。特に、 m が n にくら
 べて十分大きいときは同型になる。

3. Brauer の中心環とその q -analogue の表現

3.1 表現の分類

§2 で導入した algebras $D_n(x)$ と $C_n(\alpha, \mathfrak{g})$ の既約表現は
 次のようにして分類される。

記号: $\Lambda = \{(\lambda_1, \lambda_2, \dots) \mid \lambda_i \geq \lambda_{i+1} \geq 0 \ (i \in \mathbb{N}),$
 $\lambda_j = 0 \ (j \gg 0)\}$.

Λ の元を 分割り と呼ぶ。

$$\Lambda(n) = \{(\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in \Lambda \mid \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i = n - 2j,$$

$$0 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \}$$

定理 $D_n(x)$, $C_n(\alpha, \mathfrak{g})$ はそれぞれ $\mathbb{C}(x)$, $\mathbb{C}(\alpha, \mathfrak{g})$ 上の
 半単純 algebra であり、これらの既約表現は $\Lambda(n)$ で
 “ハロマトライズ” される。

証明 $D_n(X)$ の場合は古典的に知られている。 $C_n(\alpha, q)$ の場合については、 $C_n(\alpha, q)$ が $D_n(X)$ の 1-parameter deformation であることから、半単純 algebra の剛体性定理より従う。

3.2. 表現空間の構成

以上 $\Lambda(n)$ の λ に対応する $C_n(\alpha, q)$ の既約表現の構成法について述べる。 $D_n(X)$ の既約表現は、以下で得られた表現で、 $\alpha = q^{-\frac{1}{2}}$ とおき、 q を 1 にした極限をとれば得られる。
 λ に対応する $C_n(\alpha, q)$ の既約表現を (P_λ, V_λ) とする。まず V_λ の基底を与える。

記号: $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$, $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \dots) \in \Lambda$ に対し、
 $\lambda \underset{1}{\sim} \lambda' \iff \exists j \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \lambda_j = \lambda'_j \pm 1, \lambda_i = \lambda'_i \text{ (} i \neq j \text{)}$

また、

$$P(\lambda) = \{ P = (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(n)}) \mid \lambda^{(i)} \in \Lambda, \lambda^{(0)} = (0, 0, \dots), \lambda^{(n)} = \lambda, \lambda^{(i)} \underset{1}{\sim} \lambda^{(i+1)} \}$$

とおく。

$$\text{そして } V_\lambda = \bigoplus_{P \in P(\lambda)} \mathbb{C}(\alpha, q) v_P \text{ とおく。}$$

$\text{End}(V_\lambda)$ 中に $C_n(\alpha, q)$ の表現を構成する。

3.3. 表現行列の構成.

§3.2 で与えられた V_λ の基底 $\{v_p \mid p \in \Phi(\lambda)\}$ に関する $\tau_i \in C_n(\alpha, q)$ の表現行列を与える。

記号: $\{k\} = \frac{q^k - q^{-k}}{q - q^{-1}},$

$$\{k\}_m = \frac{\alpha^m q^k - \alpha^{-m} q^{-k}}{q - q^{-1}}.$$

$v = (v_1, v_2, \dots, v_\ell, 0, \dots, 0, \dots) \in \Lambda$ に対し

$$h_v(i, j) = v_i - i - j + \max \{k \mid v_k \geq j\} \\ (1 \leq i \leq \ell, 1 \leq j \leq v_i),$$

$$g_v(i) = \begin{cases} \frac{v_i + i - 1}{\prod_{j=i}^{v_i + i - 1}} \{v_i + v_j + 2 - i - j; 2\} & (v_i + i > \ell), \\ \frac{v_i}{\prod_{j=1}^{v_i}} \{j - i + 1; 1\} & \\ \frac{\ell}{\prod_{j=i}^{\ell}} \{v_i + v_j + 2 - i - j; 2\} & (v_i + i \leq \ell), \\ \frac{v_i}{\prod_{j=1}^{v_i}} \{j - i + 1; 1\} \frac{\ell - v_i - i + 1}{\prod_{j=1}^{\ell - v_i - i + 1}} \{j - 2i - j; 2\} & \end{cases}$$

$$G_v = \frac{\ell}{\prod_{i=1}^{\ell}} g_v(i) \left(\frac{v_i}{\prod_{j=1}^{v_i}} \frac{\{j - i; 1\}}{\{h_v(i, j) + 1\}} \right).$$

$A_i \in \text{End}(V_\lambda)$ の定義. $1 \leq i \leq n-1$ なる i を固定する。

$$P = (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(n)}) \text{ と } Q = (\nu^{(0)}, \nu^{(1)}, \dots, \nu^{(n)})$$

という2つの $\mathcal{P}(\lambda)$ の元に対する $A_i \in \text{End}(V_\lambda)$ の基底 v_P と v_Q に関する行列要素 $(A_i)_{Q,P}$ を以下のように定める。 $\lambda^{(r)}$ の要素を $\lambda_1^{(r)}, \lambda_2^{(r)}, \dots$ と書き, $\nu^{(r)}$ の要素を $\nu_1^{(r)}, \nu_2^{(r)}, \dots$ と書く。また,

$$l = \max\{k \mid \lambda_k^{(i-1)} \neq 0\},$$

$$n = (n_1, n_2, \dots, n_l, 0, 0, \dots) := \lambda^{(i-1)},$$

$$n(i) = n_i - i + 1$$

とおく。 δ_1 及び δ_2 は 1 又は -1 である。

Case 1. $\exists j \in \{1, 2, \dots, n-1\} \setminus \{i\}$ s.t. $\lambda^{(j)} \neq \nu^{(j)}$.

$$\Rightarrow (A_i)_{Q,P} = 0.$$

以下, Case 1 以外の場合を考える。

Case 2. $P = Q$ かつ $\exists r \in \mathbb{N}$ s.t. $\lambda_r^{(i-1)} = \lambda_r^{(i+1)} \pm 2$

$$\Rightarrow (A_i)_{P,P} = \delta.$$

Case 3. $P=Q$ かつ $\lambda^{(i-1)} = \lambda^{(i+1)}$

$$\Rightarrow \exists! r \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \lambda_r^{(i-1)} = \lambda_r^{(i)} - \delta_1,$$

$$(A_i)_{PP} = - \frac{\alpha^{-2\delta_1} q^{-2\delta_1 n(r)-1}}{\{2\delta_1 n(r)+1; 2\delta_1\}} \\ - \frac{\alpha^{-2\delta_1} q^{-2\delta_1 n(r)-1} G_{\lambda^{(i)}}}{G_{\lambda^{(i-1)}} \{2\delta_1 n(r)+1; 2\delta_1\}}.$$

Case 4. $P=Q$ かつ Case 2 $\tau \neq$ Case 3 $\tau \neq$ ない.

$$\Rightarrow \exists! r, s \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \lambda_r^{(i-1)} = \lambda_r^{(i)} - \delta_1, \lambda_s^{(i)} = \lambda_s^{(i+1)} - \delta_2,$$

$$(A_i)_{PP} = - \frac{\alpha^{\delta_2 \delta_1} q^{\delta_2 n(s) - \delta_1 n(r)}}{\{\delta_1 n(r) - \delta_2 n(s); \delta_1 - \delta_2\}}.$$

Case 5. $P \neq Q$ かつ $\lambda^{(i-1)} \neq \lambda^{(i+1)}$

$$\Rightarrow \exists! r, s \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \lambda_r^{(i-1)} = \lambda_r^{(i)} - \delta_1, \lambda_s^{(i)} = \lambda_s^{(i+1)} - \delta_2,$$

$$(A_i)_{QP} = \frac{\sqrt{\{\delta_1 n(r) - \delta_2 n(s) + 1; \delta_1 - \delta_2\} \{\delta_1 n(r) - \delta_2 n(s) - 1; \delta_1 - \delta_2\}}}{\{\delta_1 n(r) - \delta_2 n(s); \delta_1 - \delta_2\}}$$

Case 6. $P \neq Q$ かつ $\lambda^{(i-1)} = \lambda^{(i+1)}$

$\Rightarrow \exists r, s \in \mathbb{N}$ s.t. $\lambda_r^{(i-1)} = \lambda_r^{(i)} - \delta_1$, $\nu_s^{(i-1)} = \nu_s^{(i)} - \delta_2$,

$$(A_i)_{\theta P} = - \frac{\alpha^{-\delta_1 \delta_2} q^{-\delta_1 \eta(r) - \delta_2 \eta(s) - 1} \sqrt{G_{\lambda^{(i)}} G_{\nu^{(i)}}}}{G_{\lambda^{(i-1)}} \{ \delta_1 \eta(r) + \delta_2 \eta(s) + 1; \delta_1 + \delta_2 \}}$$

主結果

定理 $\tau_i \in C_n(\alpha, q)$ を上で定義した $A_i \in \text{End}(V_\lambda)$ に対応させることにより, $C_n(\alpha, q)$ の λ でパラメトライズされる既約表現が得られる。

略証 上の定理の証明には, [J-M-0] で得られた, C_n 型の q -環に対応する IRF 模型の解を全面的に使う。まず, 上で構成した行列 A_i は, [J-M-0] での解の Boltzmann weight からできる face operator と呼ばれるものの, trigonometric limit の, スパワートラルパラメータに関する最低次の断係数のスカラー倍となっていることに注意する。このことさえわかれば, A_i が $C_n(\alpha, q)$ の τ_i の像となるための諸々の関係式は, [J-M-0] でのいろいろな関係式, 例えば crossing symmetry を用いて証明できる。但し, [J-M-0] での模型は, $\alpha = q^m$ の場合にあたるので, 無数の m に対して関係式が成立することから不定な α でも成り立つことがわかる。 ▢

系

Brauer の中心環 $D_n(x)$ の既約表現は、すべて $(n(\alpha, q))$ の既約表現を $\alpha = q^{-\frac{x}{2}}$ において q を 1 にした極限を定めることで得られる。

証明 x を不定元 とし、さらに、

$$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{q^{qx} - q^{-qx}}{q - q^{-1}} = qx$$

と置くことにする。すると、さきの行列 A_i の各成分は、 $\alpha = q^{-\frac{x}{2}}$ において $\lim_{q \rightarrow 1}$ としたときも定義されているので、これにより $D_n(x)$ の既約表現が定まる。 $\square$

まとめ

主結果は algebra $C_n(\alpha, q)$ の既約表現の具体的な構成法である。 $C_n(\alpha, q)$ が Brauer の中心環の q -analogue であるということは、vertex type の量子化された YBE の解を使ってわかった。また、 $(n(\alpha, q))$ の既約表現の構成法は、face type の量子化された YBE の解を用いてわかった。 A_m 型、 B_m 型の場合にも同様の議論ができる。 D_m 型の時もだいたい同じ議論ができるが、YBE を使ってわかる部分は中心環よりもわずかに小さい部分で、中心環全体についてはわからない。

References

- [B-W] J. S. Birman and H. Wenzl, *Braids, link polynomials and a new algebra*, preprint.
- [B] R. Brauer, *On algebras which are connected with the semisimple continuous groups*, Ann. of Math. **38** (1937), 854–872.
- [J] M. Jimbo, *A q -difference analogue of $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ and the Yang–Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **10** (1985), 63–69.
- [J-M-O] M. Jimbo, T. Miwa and M. Okado, *Solvable lattice models related to the vector representation of classical Lie algebras*, Comm. Math. Phys. **116** (1988), 507–525.
- [M] J. Murakami, *The Kauffman polynomial of links and representation theory*, Osaka J. Math **24** (1987), 745–758.
- [T] T. G. Turaev, *The Yang–Baxter equation and invariants of links*, Invent. math. **92** (1988), 527–553.
- [W] H. Wenzl, *On the structure of Brauer’s centralizer algebra*, preprint.