

K -開発閉包な左線形項書換えシステムの合流性*

島根大学 総合理工学部 岩見 宗弘 (Munehiro Iwami)

Faculty of Science and Engineering, Shimane University

Matsue, Shimane, Japan, 690-8504

e-mail: munehiro@cis.shimane-u.ac.jp

概要

Huet は, 左線形かつ並行閉包な項書換えシステム (TRS) は合流性を持つことを示した. Toyama は, 並行閉包の条件を拡張し, 左線形かつ緩和並行閉包な TRS は合流性を持つことを示した. Oostrom は, Huet と Toyama の条件を拡張し, 左線形かつ開発閉包な TRS は合流性を持つことを示した. さらに, Oyamaguchi らは, Toyama の結果を一般化した K -閉包の概念を導入し, 左線形かつ K -閉包な TRS は, 合流性を持つことを示している. 本稿では, Oyamaguchi らと同様の手法により, 開発閉包を一般化した K -開発閉包の条件を与え, 左線形かつ K -開発閉包な TRS は合流性を持つことを示す.

1 はじめに

項書換えシステム (TRS) は, 等式による柔軟な計算と効率的な推論を与えることができる [8]. TRS は, 関数・論理型言語の計算モデルや定理自動証明, 記号処理, 代数的仕様記述, 検証等に広く応用されている. TRS の合流性は, 与えられた項の最も単純な形 (正規形) が一意であることを保証する. しかしながら, 合流性は一般に決定不能であることが知られており, 合流性を示すために多くの十分条件が与えられている.

Huet は, 左線形かつ並行閉包な TRS は合流性を持つことを示した [2]. Toyama は, 並行閉包の条件を拡張し, 左線形かつ緩和並行閉包な TRS は合流性を持つことを示した [9]. Oostrom は, Huet と Toyama の結果を, 開発閉包の概念を導入し, 高階項書換えシステム (HRS) へ拡張した [4], すなわち, 左線形かつ開発閉包な HRS は, 合流性を持つことを示した. Oyamaguchi らは, 上側並行閉包の概念を与え, 左線形かつ上側並行閉包な TRS は合流性を持つことを示した [6]. Gramlich は, 並行危険対の概念を与え, 左線形かつ並行危険対条件を満たす TRS は, 合流性を持つことを示した [1]. Okui は, 同時危険対の概念を与え, 左線形かつ強閉包な TRS は, 合流性を持つことを示した [3]. Oyamaguchi らは, Toyama の結果を一般化した K -閉包の概念を導入し, 左線形かつ K -閉包な TRS は, 合流性を持つことを示した [7].

*This paper is an extended abstract and the detailed version will be published elsewhere.

本稿では, Oyamaguchi ら [7] と同様の手法により, 開発閉包を一般化した K -開発閉包の条件を与える. 次に, 左線形かつ K -開発閉包な TRS は合流性を持つことを示す. さらに, 本結果の有用性を示すために, 例を与える.

2 準備

本節では, 本稿で使用する定義と概念を述べる. 定義と概念は文献 [7], [8] に準ずる.

記号 ϵ は空列を表し, $\emptyset$ は空集合を表す. V は変数の集合, F は関数記号の集合とする. T は V と F から生成される項の集合とする. 項 M に対して, $P(M)$ は M の出現の集合を表す. $P_F(M)$ は項 M における関数記号の出現の集合を表し, M/u は出現 u の M の部分項を表し, $M[u \leftarrow N]$ は部分項 M/u を項 N により置き換えることにより得られる項を表す. 項 M における任意の変数の出現が 1 より大きくないとき線形であるという. 書換え規則 $l \rightarrow r$ は, 項上の方向付けられた等式であり, 次の条件を満たす: $l \notin V$ かつ $V(r) \subseteq V(l)$. 書換え規則 $l \rightarrow r$ に対して, l が線形であるとき, 左線形であるという. 項書換えシステム (TRS) は, 書換え規則の有限集合である. 任意の書換え規則が左線形であるとき, TRS R が左線形であるという. TRS R により, 項 M が出現 u において N に書換えられるとは, ある代入 σ と書換え規則 $l \rightarrow r \in R$ が存在し, $M = M[u \leftarrow \sigma(l)]$ かつ $N = M[u \leftarrow \sigma(r)]$ を満たすときをいい, $M \rightarrow_R^u N$ により表す. TRS R が合流性を持つとは, $\leftarrow_R^* \cdot \rightarrow_R^* \subseteq \rightarrow_R^* \leftarrow_R^*$ が成り立つときをいう. TRS R により, それ以上書換えることができない項を R の正規形と呼び, R のすべての正規形の集合を $NF(R)$ により表す. $\gamma: M_0 \rightarrow_R^{u_0} M_1 \rightarrow_R^{u_1} \dots \rightarrow_R^{u_{n-1}} M_n$ を書換え列とする. このとき, $\mathcal{R}(\gamma) = \{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}\}$, すなわち, γ のリデックス出現の集合とする. $\mathcal{R}(\gamma)$ が互いに素ならば, γ は並行書換えであるといい, $M \twoheadrightarrow_R^{\mathcal{R}(\gamma)} M_n$ により表す. TRS R_1 と R_2 の書換え規則から得られる危険対の集合 $CP(R_1, R_2)$ を次のように定義する: $CP(R_1, R_2) = \{ \langle \theta(l_1)[u \leftarrow \theta(r_2)], \theta(r_1) \rangle_u \mid l_1 \rightarrow r_1 \in R_1, l_2 \rightarrow r_2 \in R_2, u \in P_F(l_1), l_1 \rightarrow r_1 \neq l_2 \rightarrow r_2, \theta(l_1/u) = \theta(l_2) \}$. ここで, $V(l_1) \cap V(l_2) = \emptyset$ かつ θ は l_1/u と l_2 の最汎単一子である. $CP(R)$ は $CP(R, R)$ で定義される危険対の集合である. TRS R に対して, 同時書換え $\twoheadrightarrow_R$ を次のように帰納的に定義する. 1. x を変数とする. $x \twoheadrightarrow_R x$. 2. f を項数 n の関数記号とする. $s_i \twoheadrightarrow_R t_i$ ($1 \leq i \leq n$) ならば, $f(s_1, \dots, s_n) \twoheadrightarrow_R f(t_1, \dots, t_n)$. 3. $l \rightarrow r \in R$ とする. $\sigma \twoheadrightarrow_R \tau$ を満たす代入 σ, τ , すなわち, 任意の変数 x に対して $\sigma(x) \twoheadrightarrow_R \tau(x)$ に対して, $\sigma(l) \twoheadrightarrow_R \tau(r)$.

3 K -開発閉包な左線形項書換えシステムの合流性

本節では, K -開発閉包の定義を与える. 次に, 左線形かつ K -開発閉包な TRS は合流性を持つことを示す.

K -開発閉包は, Oostrom による大方開発閉包 [4] を一般化した条件であり, $\emptyset$ -開発閉包 ($K = \emptyset$) は, 大方開発閉包と一致する.

定義 3.1 次の条件を満たすとき, 左線形 TRS R は K -開発閉包 (K -development closed) であるという.

1. $K \subseteq R$ かつ K は合流性を持つ.

2. $\forall \langle P, Q \rangle_u \in CP(K, R - K) \ (u \neq \epsilon)$ に対して, $P \rightarrow_K Q$.
3. $\forall \langle P, Q \rangle_u \in CP(R - K, R) \ (u \neq \epsilon)$ に対して, $P \rightarrow_{R-K} \cdot \rightarrow_K^* \cdot \leftarrow_K^* Q$.
4. $\forall \langle P, Q \rangle_\epsilon \in CP(K, R - K)$ に対して,
 $P \rightarrow_K^* \cdot \leftarrow_K^* \cdot \leftarrow_{R-K} Q$.
5. $\forall \langle P, Q \rangle_\epsilon \in CP(R - K, R - K)$ に対して,
 $P \rightarrow_K^* \cdot \rightarrow_{R-K} \cdot \rightarrow_K^* \cdot \leftarrow_R Q$.

定理 3.2 左線形かつ K -開発閉包な TRS R は, 合流性を持つ.

定理 3.3 TRS R が, K -閉包ならば, K -開発閉包である.

4 例

本節では, 本結果の有用性を示すために, 例を与える.

例 4.1 次の 3 つの TRS R_1, R_2, R_3 を考える. R_1, R_2, R_3 は, 文献 [3] で与えられている.

$$R_1 = \{f(g(g(x))) \rightarrow a, f(g(h(x))) \rightarrow b, \\ f(h(g(x))) \rightarrow b, f(h(h(x))) \rightarrow c, \\ g(x) \rightarrow h(x), a \rightarrow b, b \rightarrow c\}.$$

$$R_2 = \{a \rightarrow c, b \rightarrow c, f(a, b) \rightarrow d, f(x, c) \rightarrow f(c, c), \\ f(c, x) \rightarrow f(c, c), d \rightarrow f(a, c), d \rightarrow f(c, b)\}.$$

$$R_3 = \{f(x) \rightarrow x, f(x) \rightarrow f(f(x))\}.$$

Okui により, 次のような表が与えられている [3].

	R_1	R_2	R_3
Toyama-Gramlich [10], [1]	○	×	×
Oyamaguchi-Ohta [6]	×	○	×
Okui [3]	×	×	○

(○ ... 満たす, × ... 満たさない)

本稿では, 新たに次の TRS R_4 を与える.

$$R_4 = \left\{ \begin{array}{l} g(x) \rightarrow x \\ f(f(x)) \rightarrow g(x) \\ f(x) \rightarrow f(f(f(x))) \end{array} \right\}$$

TRS R_4 は, 従来までに提案されている合流条件を満たさないので, TRS R_1, R_2, R_3, R_4 に対して, 次のような表が得られる.

	R_1	R_2	R_3	R_4
Toyama-Gramlich	○	×	×	×
Oyamaguchi-Ohta [6]	×	○	×	×
Huet-Toyama-Oostrom [4], [5]	×	×	○	×
Okui	×	×	○	×
Oyamaguchi-Ohta [7]	○	○	○	×
本研究	○	○	○	○

$CP(R_4) = \{\langle g(x), f(f(f(f(x)))) \rangle_\epsilon, \langle f(f(f(f(x)))) \rangle_\epsilon, \langle f(f(f(f(x)))) \rangle_1, \langle f(g(x)), g(f(x)) \rangle_1\}$ である.

- $TRS R_4$ は, *Toyama-Gramlich* の条件 [10], [1] を満たさない, すなわち, **並行危険対条件 (parallel critical pair condition)** ([1], pp.219) を満たさない.

$\langle f(f(f(f(x)))) \rangle_\epsilon \in CP(R_4)$ に対して, $f(f(f(f(x)))) (= P) \not\vdash_{R_4} \cdot \leftarrow_{R_4}^* g(x) (= Q)$ が成立しない.

- $TRS R_4$ は, *Oyamaguchi-Ohta* の条件 [6] を満たさない, すなわち, **上側並行閉包 (upside parallel closed)** ([6], pp.190) ではない.

$\langle f(f(f(f(x)))) \rangle_\epsilon \in CP(R_4)$ に対して, $f(f(f(f(x)))) (= P) (\not\vdash_{R_4} \cup \leftarrow_{R_4}^\epsilon) \cdot (\not\vdash_{R_4}^W \cup \leftarrow_{R_4}^\epsilon) g(x) (= Q) (W \neq \{\epsilon\})$ が成立しない.

- $TRS R_4$ は, *Huet-Toyama-Oostrom* の条件 [4], [5] を満たさない, すなわち, **大方開発閉包** ではない.

$\langle f(f(f(f(x)))) \rangle_\epsilon \in CP(R_4)$ に対して, $f(f(f(f(x)))) (= P) \not\rightarrow_{R_4} \cdot \leftarrow_{R_4}^* g(x) (= Q)$ が成立しない.

- $TRS R_4$ は, *Okui* の条件 [3] を満たさない, すなわち, **強閉包 (strongly closed)** ([3], pp.10) ではない.

$\langle g(x), f(f(f(f(x)))) \rangle_\epsilon \in CP(R_4)$ に対して, $g(x) (= P) \rightarrow_{R_4}^* \cdot \leftarrow_{R_4} f(f(f(f(x)))) (= Q)$ が成立しない.

- $TRS R_4$ は, *Oyamaguchi-Ohta* の条件 [7] を満たさない, すなわち, すべての $K \subseteq R_4$ ($K \neq \emptyset$ かつ $K \neq R_4$) に対して, **K -閉包 (K -closed)** ([7], pp.132) ではない.

1. $K = \{g(x) \rightarrow x\}$, $R_4 - K = \{f(f(x)) \rightarrow g(x), f(x) \rightarrow f(f(f(x)))\}$ のとき ;
 $\langle f(f(f(f(x)))) \rangle_1 \in CP(R_4 - K, R_4)$ に対して, $f(f(f(f(x)))) (= P) \not\vdash_{R_4 - K} \cdot \rightarrow_K^* \cdot \leftarrow_K^* g(x) (= Q)$ は成立しない.

2. $K = \{g(x) \rightarrow x, f(f(x)) \rightarrow g(x)\}$, $R_4 - K = \{f(x) \rightarrow f(f(f(x)))\}$ のとき ;
 $\langle f(f(f(f(x)))) \rangle_1 \in CP(K, R_4 - K)$ に対して, $f(f(f(f(x)))) (= P) \not\vdash_K g(x) (= Q)$ は成立しない.

3. $K = \{g(x) \rightarrow x, f(x) \rightarrow f(f(f(x)))\}$, $R_4 - K = \{f(f(x)) \rightarrow g(x)\}$ のとき ;
 $\langle f(f(f(f(x)))) \rangle_1 \in CP(R_4 - K, R_4)$ に対して, $f(f(f(f(x)))) (= P) \not\vdash_{R_4 - K} \cdot \rightarrow_K^* \cdot \leftarrow_K^* g(x) (= Q)$ は成立しない.

4. $K = \{f(f(x)) \rightarrow g(x), f(x) \rightarrow f(f(f(x)))\}$, $R_4 - K = \{g(x) \rightarrow x\}$ のとき ;
 $TRS K$ は合流性を持たない.

$NF(K) \ni g(g(x)) \leftarrow_K^* f(f(f(f(x)))) \leftarrow_K^1 f(f(x)) \rightarrow_K^\epsilon g(x) \in NF(K).$

5. $K = \{f(x) \rightarrow f(f(f(x)))\}$, $R_4 - K = \{g(x) \rightarrow x, f(f(x)) \rightarrow g(x)\}$ のとき ;
 $\langle f(f(f(f(x)))) \rangle_1 \in CP(R_4 - K, R_4)$ に対して, $f(f(f(f(x)))) (= P) \not\vdash_{R_4 - K} \cdot \rightarrow_K^* \cdot \leftarrow_K^* g(x) (= Q)$ は成立しない.

6. $K = \{f(f(x)) \rightarrow g(x)\}$, $R_4 - K = \{g(x) \rightarrow x, f(x) \rightarrow f(f(f(x)))\}$ のとき ;
 $TRS K$ は, 合流性を持たない.
 $NF(K) \ni f(g(x)) \xleftarrow{K} f(f(f(x))) \xrightarrow{K} g(f(x)) \in NF(K)$.

1 から 6 より, $TRS R_4$ は, すべての $K \subseteq R_4$ ($K \neq \emptyset$ かつ $K \neq R_4$) に対して, K -閉包ではない.

- $TRS R_4$ の合流性を定理 3.2 を適用し示す.

$$K = \{ g(x) \rightarrow x \}$$

$$R_4 - K = \left\{ \begin{array}{l} f(f(x)) \rightarrow g(x) \\ f(x) \rightarrow f(f(f(x))) \end{array} \right\}$$

1. $TRS K$ は合流性を持つ.
2. $CP(K, R_4 - K) = \emptyset$.
3. $CP(R_4 - K, R_4) = \{ \langle f(f(f(f(x)))) , g(x) \rangle_1, \langle f(g(x)), g(f(x)) \rangle_1, \langle g(x), f(f(f(f(x)))) \rangle_\epsilon, \langle f(f(f(f(x)))) , g(x) \rangle_\epsilon \}$.
 $\langle f(f(f(f(x)))) , g(x) \rangle_1 \in CP(R_4 - K, R_4)$ に対して, $f(f(f(f(x)))) (= P) \xrightarrow{R_4-K} g(g(x)) \rightarrow_K g(x) (= Q)$ が成り立つ.
4. $CP(K, R_4 - K) = \emptyset$.
5. $CP(R_4 - K, R_4 - K) = \{ \langle g(x), f(f(f(f(x)))) \rangle_\epsilon, \langle f(f(f(f(x)))) , g(x) \rangle_\epsilon, \langle f(g(x)), g(f(x)) \rangle_1 \}$.
 $\forall \langle P, Q \rangle_\epsilon \in CP(R_4 - K, R_4 - K)$ に対して, $P \xrightarrow{K} \cdot \xrightarrow{R_4-K} \cdot \xrightarrow{K} \cdot \xleftarrow{R_4} Q$ が成り立つ. 例えば,
 $f(f(f(f(x)))) (= P) \xrightarrow{R_4-K} g(g(x)) \rightarrow_K g(x) (= Q)$.

よって, R_4 は左線形かつ K -開発閉包である. 定理 3.2 から, $TRS R_4$ は合流性を持つ.

したがって, 従来までの合流条件が適用できない $TRS R_4$ の合流性を, 本結果を用いて示すことができる. さらに, $TRS R_1, R_2, R_3$ の全ての合流性を本結果を用いて示すことができる. 従来の合流条件は, $TRS R_1, R_2, R_3, R_4$ の全てには適用できない. しかしながら, 本研究の合流条件は, $TRS R_1, R_2, R_3, R_4$ の全てに適用可能であり, 合流性を示すことができる.

5 むすび

本稿では, Oyamaguchi らと同様の手法により, 開発閉包を一般化した K -開発閉包の条件を与えた. 次に, 左線形かつ K -開発閉包な項書換えシステムは合流性を持つことを示した. さらに, 本結果の有用性を示すために, 例を与えた. 今後の課題は, 本結果と Okui の条件を理論的に比較・検討することである.

謝辞

本研究に対して有益な助言を頂いた外山 芳人先生, 酒井 正彦先生に感謝致します.

参考文献

- [1] B. Gramlich, "Confluence without termination via parallel critical pairs," Proc. on 21st International Colloquium on Trees in Algebra and Programming, LNCS, 1059, pp.211 225, 1996.
- [2] G. Huet, "Confluence reductions: abstract properties and applications to term rewriting systems," J. ACM, 27, 4, pp.797 821, 1980.
- [3] S. Okui, "Simultaneous critical pairs and Church-Rosser property," Proc. on 9th International Conf. on Rewriting Techniques and Applications, LNCS, 1379, pp.2-16, 1998.
- [4] V. van Oostrom, "Development closed critical pairs," Proc. 2nd International Workshop on Higher-Order Algebra, Logic and Term Rewriting, LNCS, 1024, pp.185-200, 1995.
- [5] V. van Oostrom, "Developing developments," Theoretical Computer Science, 175, 1, pp.185 200, 1997.
- [6] M. Oyamaguchi and Y. Ohta, "A new parallel closed condition for Church-Rosser of left-linear term rewriting systems," Proc. on 8th International Conf. on Rewriting Techniques and Applications, LNCS, 1232, pp.187 201, 1997.
- [7] M. Oyamaguchi and Y. Ohta, "On the Church-Rosser property of left-linear term rewriting systems," IEICE Transactions of Information and Systems, E86-D, 1, pp.131 135, 2003.
- [8] Terese, "Term rewriting systems," Cambridge University Press, 2003.
- [9] Y. Toyama, "On commutativity of term rewriting systems," IEICE Transactions of Information and Systems, J66-D, 12, pp.1370 1375, 1983 (in Japanese).
- [10] Y. Toyama, "On the Church-Rosser property of term rewriting systems," Technical Report, 17672, NTT ECL, 1981 (in Japanese).