

散乱の理論における定常的方法について

浅野 潔 (京大教研)

§ 1. 問題と結果.

我々が考察する問題は、自己共役作用素の絶対連続スペクトルの摂動論、およびいわゆる散乱理論の抽象的取扱いに關するものである。ここでは、文献 [1] - [4] において、Birman 等により述べられた結果 (の 1 部) について解説する。

Hilbert space $\mathcal{H}$ における 2 つの自己共役作用素 H_0, H_1 を考える。 H_j ($j=0, 1$) の spectral 分解を $\int \lambda dE_\lambda^j$ とし、また $R_\pm^j = (H_j - \pm iI)^{-1}$ とかく。 E_λ^j から作られる spectral measure を $E^j(\Delta)$ (Δ は $\mathbb{R}$ の Lebesgue 可測集合) とし、 $\mathcal{M}_j = \{ f \in \mathcal{H} ; (E^j(\Delta)f, f) \text{ が } \mathbb{R} \text{ 上の絶対連続測度} \}$ とする。 $\mathcal{M}_j$ は H_j を reduce する $\mathcal{H}$ の閉部分空間である。 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{M}_j$ への正射影を P_j とかく。

我々の目的は、 H_0 と H_1 とが適当な意味で '近い' ときは、

(i) H_0 と H_1 の絶対連続な部分 (i.e. $H_0 P_0$ と $H_1 P_1$) の unitary equivalence を示す。

(ii) Wave operator $W_\pm = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH_1} e^{-itH_0} P_0$ の存在を示す。

(iii) Scattering operator $S = W_+^* W_-$ の性質を調べるなどである。

$\mathcal{H}_\alpha, \mathcal{H}_\beta$ を任意の Hilbert space とするとき、 $\mathcal{H}_\alpha$ から $\mathcal{H}_\beta$ への nuclear

operator の全体を $C_1(\mathcal{H}_\alpha, \mathcal{H}_\beta)$, Hilbert-Schmidt operator の全体を $C_2(\mathcal{H}_\alpha, \mathcal{H}_\beta)$ とかくことにする. $C_p(\mathcal{H}_\alpha, \mathcal{H}_\alpha)$ を, たんに $C_p(\mathcal{H}_\alpha)$ とかく. また $\mathcal{H}_\alpha$ における bounded operator の全体を, $B(\mathcal{H}_\alpha)$ で表わす. 問題 (i) および (ii) に関して, 次の定理が成立つ.

定理 1. 次の条件:

$$(I) \quad H_1 - H_0 = V \in C_1(\mathcal{H})$$

を仮定する. このとき, 次の条件を満たす $W_\pm \in B(\mathcal{H})$ が存在する:

$$1) \quad W_\pm E_0(\Delta) = E_1(\Delta) W_\pm, \quad W_\pm P_0 = P_1 W_\pm = W_\pm,$$

$$W_\pm^* W_\pm = P_0, \quad W_\pm W_\pm^* = P_1 \quad \neq$$

$$W_\pm H_0 P_0 = H_1 P_1 W_\pm.$$

$$2) \quad W_\pm = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH_1} e^{-itH_0} P_0 \quad \neq$$

$$W_\pm^* = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH_0} e^{-itH_1} P_1.$$

上の定理の内容自体は, よく知られた結果である. 証明には, 大別して, “時間を含む方法” と “時間を含まない方法 (定常的方法)” とがある (文献 [5], [7] - [10] 参照). ここでは, [3] においてスケッチされた方法で証明を与えよう.

簡単な考察により, 条件 (I) のもとでは, $\mathcal{H}$ を separable と仮定しても一般性を失わないことがわかる. 従って, $\mathcal{H}_j$ をいわゆる “direct integral” の形で表わすことにより, $H_j P_j$ を “対角化” することができる. $\mathcal{H}_j = \int \Lambda_j \oplus \mathcal{H}_\lambda^j d\lambda$ としよう. 定理 1 により, $\Lambda_0 = \Lambda_1 = \Lambda$. かつ, $\mathcal{H}_\lambda^0$ から $\mathcal{H}_\lambda^1$ への unitary (i.e. isometric & onto) operator

$W_{\pm}(\lambda)$ ($\lambda \in \Lambda$) が存在して, $f(\lambda) \in \mathcal{Q}_0$ に対して $(W_{\pm}f)(\lambda) = W_{\pm}(\lambda)f(\lambda) \in \mathcal{Q}_1$ が a.e. $\lambda \in \Lambda$ に対して成立つ.

$S = W_+^* W_-$ により scattering operator S を定義しよう. S は $\mathcal{Q}_0$ における unitary operator となり, かつ, $\mathcal{Q}_{\lambda}^0$ における unitary operator S_{λ} が存在して, $f(\lambda) \in \mathcal{Q}_0$ に対して $(Sf)(\lambda) = S_{\lambda}f(\lambda)$ が a.e. $\lambda \in \Lambda$ に対して成立つ. S_{λ} を S -matrix とよぶ.

条件 (I) の下で, $T_{\Sigma} = P_0(I - VR_{\Sigma})VP_0 \in \mathcal{C}_1(\mathcal{Q}_0)$. 故に, $\mathcal{Q}_0 = \int_{\Lambda} \oplus \mathcal{Q}_{\lambda}^0 d\lambda$ において, T_{Σ} は“核表示”をもつ, すなわち $T_{\Sigma}(\lambda, \mu) \in \mathcal{C}_1(\mathcal{Q}_{\mu}^0, \mathcal{Q}_{\lambda}^0)$ ($\lambda, \mu \in \Lambda$) が存在して, $f(\lambda) \in \mathcal{Q}_0$ に対して $(T_{\Sigma}f)(\lambda) = \int_{\Lambda} T_{\Sigma}(\lambda, \mu)f(\mu) d\mu$ (a.e. $\lambda \in \Lambda$). $T_{\Sigma}(\lambda, \mu)$ は, (λ, μ) の (強) 可測函数であり, さらに $T_{\Sigma}(\lambda, \lambda)$ も λ の (強) 可測函数である. S_{λ} に関して, 次の定理が成立つ.

定理 2. 条件 (I) のもとで,

1) $t\text{-}\lim_{\substack{z \rightarrow \nu \pm i0}} T_{\Sigma}(\lambda, \mu) \equiv T_{\nu \pm i0}(\lambda, \mu)$ が, a.e. $\nu \in R$, a.e. $\lambda \in \Lambda$, a.e. $\mu \in \Lambda$ に対して存在する ($t\text{-}\lim$ は, $\mathcal{C}_1(\mathcal{Q}_{\mu}^0, \mathcal{Q}_{\lambda}^0)$ の位相に関する収束の意),

2) $S_{\lambda} = I_{\lambda} - 2\pi i T_{\lambda + i0}(\lambda, \lambda)$ (a.e. $\lambda \in \Lambda$),

3) $K(\lambda) \in \mathcal{C}_1(\mathcal{Q}_{\lambda}^0)$ (a.e. $\lambda \in \Lambda$) が存在して, $S_{\lambda} = e^{-2\pi i K(\lambda)}$, かつ $\int_{\Lambda} \|K(\lambda)\|_1 d\lambda \leq \|V\|_1$. ただし, $\|K(\lambda)\|_1$ は $\mathcal{C}_1(\mathcal{Q}_{\lambda}^0)$ における trace norm, $\|V\|_1$ は, $\mathcal{C}_1(\mathcal{Q})$ における trace norm とする.

条件 (I) のもとで, $VR_{\Sigma}^0 \in \mathcal{C}_1(\mathcal{Q})$ ($\forall \Sigma \neq \emptyset$). 従って, matrix の

determinant の拡張として, $\Delta(z) = \det(I + \nabla R_z)$ なる函数が定義される。 $\Delta(z)$ は, $iz \neq 0$ で解析的であり, かつ $\Delta(\bar{z}) = \overline{\Delta(z)}$, $\Delta(z)$ と S_λ の間には, 次の関係がある。

定理3. 条件 (I) のもとで,

$$1) \quad \Delta(z) = e^{\int \Lambda \frac{\xi(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda}, \quad \text{と } z \text{ に } \xi(\lambda) = c K(\lambda) \text{ 故に,}$$

$$\lim_{z \rightarrow \lambda \pm i0} \Delta(z) \equiv \Delta(\lambda \pm i0) \text{ が a.e. } \lambda \in \mathbb{R} \text{ に対して存在する,}$$

$$2) \quad \det S_\lambda = e^{-2\pi i \xi(\lambda)} = \frac{\Delta(\lambda - i0)}{\Delta(\lambda + i0)} \quad (\text{a.e. } \lambda \in \Lambda).$$

定理2および3にどんな数理解物理的な意味があるかは, 筆者にはわからないが, たとえば H_0 と H_1 とが適当な固有函数展開をもつ場合には, とれるの結果は, いわゆる *phase shift formula* や, S の相互作用表示などとの関係がつくようである。また, 条件 (I) は非常に強い制限なので, これをもつと緩い条件におきかえることが応用上望ましいが, この問題については, §3 でふれたい。応用上は, $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_x^n)$, $H_0 = -(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2})$ であることが多いが, この場合 H_1 が固有函数展開をもつと, いろいろと都合である。§3 にあげたい条件のもとで, H_1 の絶対連続な部分は, 一般化された固有函数をもつけれども, H_1 が特異連続な部分をもたないことを保証する条件は, 別に課さなければならない ([9] 参照)。

§2. 定理1の証明.

[3] による証明では, 次の補題が重要な役割を演ずる。

補題. A を $\mathcal{H}$ における自己共役作用素 ($A = \int \lambda dF_\lambda$), $\Gamma_z =$

$(A - zI)^{-1}$, $D \in \mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ とする。このとき,

1) 任意の $f \in \mathcal{H}$ に対して, $DF_\lambda f$ は λ の (強) 有界変動関数であり, 従って, a.e. λ に対して (強) 微分 $\frac{d}{d\lambda}(DF_\lambda f)$ が存在する。 $\frac{d}{d\lambda}(DF_\lambda f)$ は, λ の (強) 可測関数である,

2) 任意の $f \in \mathcal{H}$ に対して, $s\text{-}\lim_{\mu \rightarrow \mu \pm i0} D\Gamma_\mu f \equiv D\Gamma_{\mu \pm i0} f$ が a.e. μ で存在し, かつ p.v. $\int \frac{1}{\lambda - \mu} d(DF_\lambda f)$ も a.e. μ で存在して, a.e. μ で

$$D\Gamma_{\mu \pm i0} f = \text{p.v.} \int \frac{1}{\lambda - \mu} d(DF_\lambda f) \pm \pi i \frac{d}{d\mu}(DF_\mu f),$$

3) $D^*F_\lambda D$ は $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ の位相で (強) 有界変動関数である。従って, a.e. λ で $\frac{d}{d\lambda}(D^*F_\lambda D) \equiv K_\lambda \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ が存在し, (強) 可測となる。

4) $s\text{-}\lim_{\mu \rightarrow \mu \pm i0} D^*\Gamma_\mu D \equiv D^*\Gamma_{\mu \pm i0} D \in \mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ が a.e. μ で存在し, かつ p.v. $\int \frac{1}{\lambda - \mu} d(D^*F_\lambda D)$ も a.e. μ で存在して, a.e. μ で

$$D^*\Gamma_{\mu \pm i0} D = \text{p.v.} \int \frac{1}{\lambda - \mu} d(D^*F_\lambda D) \pm \pi i \frac{d}{d\mu}(D^*F_\mu D),$$

ここに $s\text{-}\lim$ は $\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ における収束を意味する。

定理1の証明にかかろう。 $Q_z^0 = I + \nabla R_z^0$, $Q_z^1 = I - \nabla R_z^1$ とおく。簡単な計算により,

$$(1) \quad Q_z^1 Q_z^0 = Q_z^0 Q_z^1 = I,$$

$$(2) \quad R_z^0 - R_z^1 = Q_z^{0*} (R_z^1 - R_z^0) Q_z^0,$$

$$(3) \quad Q_z^{1*} (R_z^0 - R_z^1) = (R_z^1 - R_z^0) Q_z^0.$$

(2), (3) より, 任意の $f, g \in \mathcal{H}$ に対して,

$$(4) \quad ((R_z^0 - R_z^1) f, g) = ((R_z^1 - R_z^0) Q_z^0 f, Q_z^0 g)$$

$$(5) \quad ((R_z^0 - R_z^1) f, Q_z^1 g) = ((R_z^1 - R_z^0) Q_z^0 f, g).$$

(4), (5) において, $z \rightarrow \mu \pm i0$ として両辺の極限を考える。そのためにいくつかの記号を定義する: V が自己共役であることに注意すると, $B = |V|^{\frac{1}{2}}$, $\Theta = \operatorname{sgn} V$ において, $V = B \Theta B$ とかくことができる。ここには, $B \in C_2(\mathcal{H})$, $\Theta \in B(\mathcal{H})$ 。 $f \in \mathcal{H}$ に対して, $BR_{\mu \pm i0}^j f$ が存在して補題 2) の等式が成立する μ の全体を Λ_f^j で表わす。また, $BR_{\mu \pm i0}^j B$ が存在して補題 4) の等式が成立する μ の全体を Λ^j で表わす。最後に, $f, g \in \mathcal{H}$ に対して, $\lim_{z \rightarrow \mu \pm i0} ((R_z^j - R_{\bar{z}}^j) f, g) = \pm 2\pi i \frac{d}{d\mu} (E_{\mu}^j f, g)$ となる μ の全体を $\Lambda_{f,g}^j$ で表わす。明らかに, Λ_f^j , Λ^j , $\Lambda_{f,g}^j$ 等の補集合は, 測度 0 の集合である。 $C \in B(\mathcal{H})$ とすると $CB \in C_2(\mathcal{H})$ であるが, $(CB)R_{\mu \pm i0}^j f = C(BR_{\mu \pm i0}^j f)$ であるから, 我々はこれを $CBR_{\mu \pm i0}^j f$ とかく。また, $\Delta\text{-}\lim_{z \rightarrow \mu \pm i0} Q_z^j f = \Delta\text{-}\lim_{z \rightarrow \mu \pm i0} (I + (-1)^j V R_z^j) f = f + (-1)^j \times V R_{\mu \pm i0}^j f = f + (-1)^j B \Theta B R_{\mu \pm i0}^j f$ を $Q_{\mu \pm i0}^j f$ とかく。

(4) において $z \rightarrow \mu \pm i0$ としよう。(4) の左辺は, $\mu \in \Lambda_{f,g}^j$ ならば $\pm 2\pi i \frac{d}{d\mu} (E_{\mu}^j f, g)$ に近づく。次に

$$\begin{aligned} (4) \text{ の右辺} &= ((R_z^j - R_{\bar{z}}^j)(I + V R_z^j) f, (I + V R_{\bar{z}}^j) g) \\ &= ((R_z^j - R_{\bar{z}}^j) f, g) + (\Theta B R_z^j f, B(R_{\bar{z}}^j - R_z^j) g) \\ &\quad + (B(R_{\bar{z}}^j - R_z^j) f, \Theta B R_{\bar{z}}^j g) \\ &\quad + (B(R_{\bar{z}}^j - R_z^j) B \cdot \Theta B R_z^j f, \Theta B R_{\bar{z}}^j g) \end{aligned}$$

より, 次のことがわかる: $z \rightarrow \mu \pm i0$ のとき,

$$\text{第 1 項} \rightarrow \frac{d}{d\mu} (E_{\mu}^j f, g) \quad (\mu \in \Lambda_{f,g}^j),$$

$$\text{第 2 項} \rightarrow (\Theta B R_{\mu \pm i0}^j f, \mp 2\pi i \frac{d}{d\mu} (B E_{\mu}^j g)) \quad (\mu \in \Lambda_f^j \cap \Lambda_g^j),$$

$$\text{第 3 項} \rightarrow (\pm 2\pi i \frac{d}{d\mu} (B E_{\mu}^j f), \Theta B R_{\mu \pm i0}^j g) \quad (\mu \in \Lambda_f^j \cap \Lambda_g^j),$$

$$\text{第4項} \rightarrow (\pm 2\pi i \frac{d}{d\mu} (BE_\mu^1 B) \cdot \oplus BR_{\mu \pm i0}^0 f, \oplus BR_{\mu \pm i0}^0 g) \\ (\mu \in \Lambda_f^1 \cap \Lambda_f^0 \cap \Lambda_g^0).$$

故に (4) の右辺は, $\mu \in \Lambda_f^0 \cap \Lambda_f^1 \cap \Lambda_g^0 \cap \Lambda_g^1 \cap \Lambda^1 \cap \Lambda_{f,g}^1 = \Sigma_{f,g}^1$ ならば,

$$(6) \quad \pm 2\pi i \left\{ \frac{d}{d\mu} (E_\mu^1 f, g) + (\oplus BR_{\mu \pm i0}^0 f, \frac{d}{d\mu} (BE_\mu^1 g)) \right. \\ \left. + (\frac{d}{d\mu} (BE_\mu^1 f), \oplus BR_{\mu \pm i0}^0 g) + (\frac{d}{d\mu} (BE_\mu^1 B) \cdot \oplus BR_{\mu \pm i0}^0 f, \oplus BR_{\mu \pm i0}^0 g) \right\} \\ = \pm 2\pi i \frac{d}{d\lambda} \left[(E_\lambda^1 f, g) + (\oplus BR_{\mu \pm i0}^0 f, BE_\lambda^1 g) \right. \\ \left. + (BE_\lambda^1 f, \oplus BR_{\mu \pm i0}^0 g) + (BE_\lambda^1 B \cdot \oplus BR_{\mu \pm i0}^0 f, \oplus BR_{\mu \pm i0}^0 g) \right]_{\lambda=\mu}$$

に近づく。一方 (6) の [] の中は ($\mu \in \Lambda_f^0 \cap \Lambda_g^0$ ならば存在して),

$(E_\lambda^1 Q_{\mu \pm i0}^0 f, Q_{\mu \pm i0}^0 g)$ に等しい。(6) の [] 内の形から, $\lambda \in \Lambda_{f,g}^1 \cap$

$\Lambda_f^1 \cap \Lambda_g^0 \cap \Lambda^1$ ならば, $\frac{d}{d\lambda} (E_\lambda^1 Q_{\mu \pm i0}^0 f, Q_{\mu \pm i0}^0 g) = \frac{d}{d\lambda} [\quad]$ が存

在する。そして $\mu \in \Sigma_{f,g}^1$ ならば, $\frac{d}{d\lambda} [\quad]$ において $\lambda = \mu$ とおくこと

ができる, (6) が得られる。結局, $\lambda, \mu \in \Sigma_{f,g}^1$ ならば $\frac{d}{d\lambda} (E_\lambda^1 Q_{\mu \pm i0}^0 f,$
 $Q_{\mu \pm i0}^0 g)$ が存在し, $\lambda = \mu$ とおくと (6) が得られることがわかった。

以上のことから,

$$(7) \quad \frac{d}{d\mu} (E_\mu^0 f, g) = \frac{d}{d\lambda} (E_\lambda^1 Q_{\mu \pm i0}^0 f, Q_{\mu \pm i0}^0 g) \Big|_{\lambda=\mu} \quad (\mu \in \Lambda_{f,g}^0 \cap \Sigma_{f,g}^1).$$

(7) の右辺は明らかに μ の可測函数である ((6) の形にかけると)。

同様に (5) において $\Sigma \rightarrow \mu \pm i0$ とすることにより,

$$(8) \quad \frac{d}{d\lambda} (E_\lambda^0 f, Q_{\mu \pm i0}^1 g) \Big|_{\lambda=\mu} = \frac{d}{d\lambda} (E_\lambda^1 Q_{\mu \pm i0}^0 f, g) \Big|_{\lambda=\mu} \\ (\mu \in \Lambda_{f,g}^0 \cap \Lambda_f^0 \cap \Lambda_g^1 \cap \Lambda_{f,g}^1).$$

(8) の両辺が μ の可測函数になることも, 各辺を (6) のような形に分解してみればわかる。

$\lambda, \mu \in \Lambda_{f,g}^1 \cap \Lambda_f^0 \cap \Lambda_g^1 \cap \Sigma_{f,f}^1 \cap \Lambda_{f,f}^0 \cap \Lambda_{g,g}^1$ とすると,

$$(7) \quad \left| \frac{d}{d\lambda} (E_{\lambda}^1 Q_{\mu \pm i0}^0 f, g) \right| \leq \left\{ \frac{d}{d\lambda} (E_{\lambda}^1 Q_{\mu \pm i0}^0 f, Q_{\mu \pm i0}^0 f) \right\}^{\frac{1}{2}} \\ \times \left\{ \frac{d}{d\lambda} (E_{\lambda}^1 g, g) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

が成立つ。(9)において $\lambda = \mu$ とおけば, (7) より

$$\left| \frac{d}{d\lambda} (E_{\lambda}^1 Q_{\mu \pm i0}^0 f, g) \right|_{\lambda=\mu} \leq \left\{ \frac{d}{d\mu} (E_{\mu}^0 f, f) \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{d}{d\mu} (E_{\mu}^1 g, g) \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

故に

$$(10) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d}{d\lambda} (E_{\lambda}^1 Q_{\mu \pm i0}^0 f, g) \right|_{\lambda=\mu} d\mu \leq \|P_0 f\| \|P_1 g\|.$$

我々は次の式によって operator $W_{\pm}$ を定義しよう:

$$(11) \quad (W_{\pm} f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\lambda} (E_{\lambda}^1 Q_{\mu \pm i0}^0 f, g) \Big|_{\lambda=\mu} d\mu \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\lambda} (E_{\lambda}^0 f, Q_{\mu \pm i0}^1 g) \Big|_{\lambda=\mu} d\mu.$$

(10) によって $W_{\pm}$ を定義する積分が収束し, $|(W_{\pm} f, g)| \leq \|P_0 f\| \|P_1 g\|$ より $W_{\pm} \in B(\mathcal{H})$ がわかる。 $W_{\pm}$ の別々の表示式は (8) による。

$W_{\pm} P_0 = P_1 W_{\pm} = W_{\pm}$ は, (11) より明らか。 $\Delta = (a, b]$ に対して,

$$\begin{aligned} (W_{\pm} E^0(\Delta) f, g) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\lambda} (E_{\lambda}^0 E^0(\Delta) f, Q_{\mu \pm i0}^1 g) \Big|_{\lambda=\mu} d\mu \\ &= \int_{\Delta} \frac{d}{d\lambda} (E_{\lambda}^0 f, Q_{\mu \pm i0}^1 g) \Big|_{\lambda=\mu} d\mu \\ &= \int_{\Delta} \frac{d}{d\lambda} (E_{\lambda}^1 Q_{\mu \pm i0}^0 f, g) \Big|_{\lambda=\mu} d\mu \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\lambda} (E_{\lambda}^1 Q_{\mu \pm i0}^0 f, E^1(\Delta) g) \Big|_{\lambda=\mu} d\mu \\ &= (W_{\pm} f, E^1(\Delta) g) \\ &= (E^1(\Delta) W_{\pm} f, g). \end{aligned}$$

故に $W_{\pm} E^0(\Delta) = E^1(\Delta) W_{\pm}$ 。これより $W_{\pm} H_0 P_0 = H_1 P_1 W_{\pm}$ も得られる。

最後に $W_{\pm}^* W_{\pm} = P_0$ (複号同順) を示そう。やや形式的に計算すると

$$\begin{aligned} (W_{\pm} f, W_{\pm} g) &= \int \frac{d}{d\lambda} (E_{\lambda}^1 Q_{\mu \pm i0}^0 f, W_{\pm} g) \Big|_{\lambda=\mu} d\mu \\ &= \int d\mu \frac{d}{d\lambda} \left[\int_{-\infty}^{\lambda} \frac{d}{d\lambda} (Q_{\mu \pm i0}^0 f, E_{\lambda}^1 Q_{\eta \pm i0}^0 g) \Big|_{\lambda=\eta} d\eta \right]_{\lambda=\mu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int d\mu \frac{d}{d\xi} (Q_{\mu \pm i0}^0 f, E_{\xi}^1 Q_{\eta \pm i0}^0 g) \Big|_{\xi=\eta=\mu} \\
&= \int \frac{d}{d\lambda} (E_{\lambda}^1 Q_{\mu \pm i0}^0 f, Q_{\mu \pm i0}^0 g) \Big|_{\lambda=\mu} d\mu \\
&= \int \frac{d}{d\mu} (E_{\mu}^1 f, g) d\mu \\
&= (P_0 f, g).
\end{aligned}$$

これより $W_{\pm}^* W_{\pm} = P_0$ を得る。ただし上の計算を合理化するためには、

$$\begin{aligned}
&(Q_{\mu \pm i0}^0 f, E_{\xi}^1 Q_{\eta \pm i0}^0 g) \\
&= (E_{\xi}^1 f, g) + (\oplus BR_{\mu \pm i0}^0 f, BE_{\xi}^1 g) \\
&+ (BE_{\xi}^1 f, \oplus BR_{\eta \pm i0}^0 g) + (BE_{\xi}^1 B \oplus BR_{\mu \pm i0}^0 f, \oplus BR_{\eta \pm i0}^0 g)
\end{aligned}$$

より, $\xi, \eta, \mu \in \Sigma_{f, g}^1$ ならば $\frac{d}{d\xi} (Q_{\mu \pm i0}^0 f, E_{\xi}^1 Q_{\eta \pm i0}^0 g)$ が存在し、かつ $\xi = \eta = \mu$ とおくことができることに注意すればよい。

同様の計算より $W_{\pm} W_{\pm}^* = P_1$ が得られる。これで 1) の証明は完了した。

2) は, Fourier 変換と Hilbert 変換を用いて簡単に証明される ([5] 参)。

§ 3. 補足.

我々は $S = W_+^* W_-$ によって S を定義した。 $(Sf, g) = (W_- f, W_+ g)$

に, § 2 の後半の計算を適用すると, S の表示式が得られる:

$$\begin{aligned}
(12) \quad (Sf, g) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\lambda} (E_{\lambda}^1 Q_{\mu-i0}^0 f, Q_{\mu+i0}^0 g) \Big|_{\lambda=\mu} d\mu \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\lambda} (E_{\lambda}^0 Q_{\mu+i0}^0 Q_{\mu-i0}^0 f, g) \Big|_{\lambda=\mu} d\mu.
\end{aligned}$$

ここで第 1 の表示式から第 2 の表示式を得るために (8) を用いた。定理 2 の 2) は, (12) の後半の式から証明できる。

定理 2 および 3 の証明は省略して, 定理 1 の条件 (I) を緩めることを考えよう。‘作用素の函数’なる概念を用いると, 条件 (I) は次のように緩

められる ([7] 参照) :

(II) 次の条件をみたす 'admissible' の函数の列 $\{\phi_n(\lambda)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する :

1) $\phi_n(\lambda)$ は $(-n, n)$ で univalent,

2) $\phi_n(H_1) - \phi_n(H_0) \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$.

ここに $R = (-\infty, \infty)$ で定義された実数値函数 $\phi(\lambda)$ が 'admissible' とは,
 "有限個の開区間 I_k が存在して, ① $R = \bigcup \bar{I}_k$, ② 各 I_k 上で $\phi(\lambda)$ は狭義
 単調, 連続微分可能, $\phi'(\lambda) \neq 0$ かつ $\phi(\lambda)$ は有界変動" なることをいう.

たとえば, 次の条件 (II)' から (II) が従う.

(II)' ある整数 $k > 0$ と Σ ($\text{Im } \Sigma \neq 0$) に対して $(R_{\Sigma}^1)^k - (R_{\Sigma}^0)^k \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$.

我々はまた, 条件 (II) をやや異なる方向に緩めることができる. $\Delta =$
 $[a, b]$ に対して, 次の条件 (III) は $H_0 P_0 E^0(\Delta)$ と $H_1 P_1 E^1(\Delta)$ との unitary
 equivalence を与える $W_{\pm}(\Delta)$ の存在を保証する ([2] 参照) :

(III) $E^1(\Delta) H_1 E^0(\Delta) - E^1(\Delta) H_0 E^0(\Delta) \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$, かつ $\Delta_n \subset \Delta$ が存在し
 て $\Delta = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ は測度 0 の集合で $E^1(\Delta^c) E^0(\Delta_n)$, $E^0(\Delta^c) E^1(\Delta_n) \in \mathcal{C}_{\infty}(\mathcal{H})$. ここ
 に $\mathcal{C}_{\infty}(\mathcal{H})$ は, $\mathcal{H}$ の完全連続作用素の全体を表わす.

条件 (III) のもとで, 定理 1 の結果は, P_0 を $P_0 E^0(\Delta)$ に P_1 を $P_1 E^1(\Delta)$ にあ
 つかえた形で 1), 2) とも成立する. 特に $\mathcal{D}(H_0) = \mathcal{D}(H_1)$ なるときには, 条件
 (III) の後半は, " $E^1(\Delta^c \cap [-N, N]) E^0(\Delta_n)$, $E^0(\Delta^c \cap [-N, N]) E^1(\Delta_n) \in \mathcal{C}_{\infty}(\mathcal{H})$ (N
 十分大きな N に対して)" と緩められる. このことから, たとえば次の条
 件 (III)' が $W_{\pm}(\Delta)$ の存在を保証することがわかる.

(III)' $\mathcal{D}(H_0) = \mathcal{D}(H_1)$, かつ $(R_{\Sigma}^1)^k (H_1 - H_0) (R_{\Sigma}^0)^l \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ ($k, l > 0$).

文 献

- [1] M. Š. Birman, *Conditions for the existence of wave operators*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 143 (1962), 506-509; Soviet Math. Dokl. 3 (1962), 408-411.
- [2] M. Š. Birman, *A local criterion for the existence of wave operators*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 159 (1964), 485-488; Soviet Math. Dokl., 5 (1964), 1505-1509.
- [3] M. Š. Birman and S. B. Entina, *A stationary approach in the abstract theory of scattering*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 155 (1964), 506-508; Soviet Math. Dokl., 5 (1964), 432-435.
- [4] M. Š. Birman and M. G. Kreĭn, *On the theory of wave operators and scattering operators*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 144 (1962), 475-478; Soviet Math. Dokl., 3 (1962), 740-744.
- [5] T. Kato, *On finite dimensional perturbations of self-adjoint operators*, J. Math. Soc. Japan, 9 (1957), 239-249.
- [6] 加藤敏夫, 散乱演算子と連続スペクトルの摂動, 数学, 9 (1957), 75-84.
- [7] T. Kato, *Wave operators and unitary equivalence*, Pac. J. Math., 15 (1965), 171-180.
- [8] S. T. Kuroda, *Stationary methods in the theory of scattering. Perturbation theory and its applications in quantum mechanics*, 185-214, John Wiley & Sons, New York, 1966.
- [9] S. T. Kuroda, *An abstract stationary approach to perturbations of continuous spectra and scattering theory*, to appear.

- [10] 黒田成俊, 散乱の定常論と固有函数展開, I, 数学. 18 (1966), 78-85,
II, 18 (1966), 137-144.

付記.

散乱の問題を取扱う定常的方法には, 他に黒田氏 ([8], [9]) によって開発された興味深い方法がある. Birman 等の方法が *direct integral* 的であるのに対して, 黒田氏の方法は *Hellinger-Hahn* 的であるという感じである. 黒田氏の方法は, 黒田氏自身が [10] で解説しておられるので, ここでは述べなかった. なお [10] の §1 は, 定常的方法に対する入門的解説になっている.