

Stable map-germ of corank 1 の

$\Sigma^{n-p+1, \underbrace{1, \dots, 1}_k}$ ($k=0, 1, 2, 3, 4$) について

東工大 友延 政彦 (Masahiko Tomonobu)

導入

generic な写像芽 $f: \mathbb{C}^n_0 \rightarrow \mathbb{C}^p_0$ ($n \geq p$) に対し、Thom-Boardman 特異点集合 $\Sigma^{n-p+1}f$, $\Sigma^{n-p+1,1}f$, $\Sigma^{n-p+1,1,1}f$, ... を考える。これらの集合は滑らかだが、その閉包は特異点を持つことが知られている。この論文で我々は、 f を corank 1 の安定写像芽とし $\Sigma^{n-p+1}f$, $\Sigma^{n-p+1,1}f$, ..., $\Sigma^{n-p+1,1,1,1,1}f$ の desingularization を構成する。

$n \leq p$ の場合には、[1]で Gaffney が generic な f に対し Σ^1f , ..., $\Sigma^{1,1,1,1}f$ の desingularization をつくった。彼の論文ではバクトル束や準同型が局所的に定義されている。なぜこれらの大域的に定義されるのかは、きりしていない。[4]で Turnbull は、より自然なバクトル束や準同型がどのように構成されるかを示し、それを用いて Σ^1f , ..., $\Sigma^{1,1,1,1}f$ だけでなく $\Sigma^{1,1,1,1,1}f$ (ただし $\Sigma^1 \cup \Sigma^2$ 上) の desingularization を作る。

一方、 $n \geq p$ の場合における $\Sigma^{n-p+1}f, \Sigma^{n-p+1}f$ の desingularization は、Ronga の Σ^1f, Σ^1f に関する結果 [3] によ、作られていて、しかし、 $\Sigma^{n-p+1,1,1}f, \Sigma^{n-p+1,1,1,1}f, \dots$ に対する desingularization は知られていない。

我々の desingularization を作るために、我々は Turnbull がつくった道具を使い、[1][2][3][4] に見られるようなよく知られた desingularization を作るための方法に従う。我々の場合、 f は $f: \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^p, 0$ ($n \geq p$) で corank 1 の安定写像芽とする。すると、 f の特異点集合 C は滑らかで次元 $p-1$ となり、同型 $e: \mathbb{C}^{p-1}, 0 \rightarrow C, 0$ がとれる。そこでこの方法を e と f の合成写像 $f \circ e: \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^p, 0$ に適用する。これを可能にする命題を §2 で述べる。しかしこの写像 $f \circ e$ はある種の対称性をもっているので、より多くの工夫が要する。これを、desingularization を構成する §3 以降で述べる。

Ronga, Gaffney と Turnbull は、desingularization を Thom-Boardman 特異点集合の閉包の Thom 多項式の計算に使、[5]。我々の desingularization もこの目的に使う。

我々の結果は複素の場合に述べるが、実の場合にも成り立つ。

§1 Turnbull の高次微分

この節では、我々の desingularization の構成に使われる Turnbull の高次微分をまとめ書く。くわしくは Turnbull [4] を見よ。

1 以上の整数 r に対し、 $S_r(\mathbb{C}^n) = \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^n$ とおく。ただし、 $\otimes$ は対称積を表わし、 $\bigotimes \mathbb{C}^n$ が r 重対称積を表わす。 $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{C}^n$ に対し $v_1 \cdots v_r = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma_r} (v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(r)}) \in \bigotimes \mathbb{C}^n$ とおく。ここで、 Σ_r は r 次の対称群を表わす。 $\mathbb{C}^{i_1, \dots, i_r}$ は、 $\sum_{k=1}^r i_k$ 個の元をもつ集合の、 $i_1, \dots, i_r$ 個の元をもつ集合たちへの異なる分割の総数を表わすことにする。

$\mathbb{C}^n$ の開集合 U 上の正則写像 $f: U \rightarrow \mathbb{C}^m$ の点 $x \in U$ での r 回高次微分 $S_r(f): S_r(\mathbb{C}^n) \rightarrow S_r(\mathbb{C}^m)$ を、

$$S_r(f) = \left(\sum f_i, \sum C_{i_1 i_2} f_{i_1} f_{i_2}, \dots, f_i^r \right)$$

で定義する。ここで、 f_i は f の i 回微分であり、 i 番目の和は $\{i_1, \dots, i_r : i_1 + \dots + i_r \leq r, 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_r\}$ の上にとり、 $\sum$ は $f_{i_1} \cdots f_{i_r}$ は $\bigotimes^{i_1 + \dots + i_r} \mathbb{C}^n$ に作用する。

この定義は、うまく chain rule $S_r(g) \circ S_r(f) = S_r(g \circ f)$ が成立するようになされている。chain rule は、合成写像の通常の高次微分についての Faà de Bruno の公式、

$$(g \circ f)_r = g_1(f_r) + \sum C_{i_1 i_2} g(f_{i_1} f_{i_2}) + \cdots + g_r(f_i^r)$$

を用いて示される。

chain rule が成り立つと chart のはり合わせがうまくゆき、
 次が成立する。

命題

i) 多様体 M^n に対し、fibre が $S_r(\mathbb{C}^n)$ 2. M の chart の任意の組 $(U, \psi), (V, \varphi)$ に対し変換写像 $S_r(\varphi \circ \psi|_{U \cap V})^{-1}$ をもつ M 上のベクトル束 $T_r M$ が存在する。

ii) 多様体 M_1^n, M_2^m と正則写像 $f: M_1 \rightarrow M_2$ に対し、局所的には $S_r(f)$ で与えられる束準同型 $T_r f: T_r M_1 \rightarrow T_r M_2$ が存在する。

iii) 多様体 M_1^n, M_2^m, M_3^p と正則写像 $f: M_1 \rightarrow M_2, g: M_2 \rightarrow M_3$ に対し、 $T_r(g \circ f) = T_r g \circ T_r f$ が成立する。

iv) 多様体 M に対し、ベクトル束たちの自然な包含たち $T_1 M \hookrightarrow T_2 M \hookrightarrow \dots \hookrightarrow T_r M \hookrightarrow \dots$ が存在する。さらに、 $T_r M$ を包含 $T_{r-1} M \hookrightarrow T_r M$ によりその像と同一視したとき、任意の正則写像 $f: M \rightarrow N$ に対し $T_r f|_{T_{r-1} M} = T_{r-1} f$ が成立する。

最後に、 $T_r M$ の部分束同士をかけ算をするために、写像 $\sigma: T_r M \rightarrow T_r M \otimes T_r M$ を

$$\sigma(v_1 \cdots v_r) = \sum (v_{i_1} \cdots v_{i_t}) \otimes (v_{i_{t+1}} \cdots v_{i_r})$$

で定義する。(= 2 に、 $\{i_1, \dots, i_s\} = \{1, \dots, r\}$ であり、和は

$\{1, \dots, s\}$ の、互いに交わらず空でない部分集合 $\{i_1, \dots, i_t\}$ と $\{i_{t+1}, \dots, i_s\}$ ($1 \leq t \leq \frac{s}{2}$) への分割の上でとる。) 二これは明らかではないが、よく定義されている。

§2 $\Sigma^{n-p+1, \frac{s}{2}} f$ の特徴付け

この節では、 $f: \mathbb{C}^n_0 \rightarrow \mathbb{C}^p_0$ ($n \geq p$) を corank 1 の T-B generic な写像芽とする。すると f の特異点集合 C は次元 $p-1$ の滑らかな多様体となり同型 $e: \mathbb{C}^{p+1}_0 \rightarrow \mathbb{C}_0$ がとれる。このとき、 $\Sigma^{n-p+1, \frac{s}{2}} f = \Sigma^{\frac{s}{2}} (f \circ e)$ が成立する。

命題

$n \geq p$ とする。 $f: \mathbb{C}^n_0 \rightarrow \mathbb{C}^p_0$ を corank 1 の T-B generic な写像芽とする。すると f の特異点集合 C は次元 $p-1$ の滑らかな多様体となり同型 $e: \mathbb{C}^{p+1}_0 \rightarrow \mathbb{C}_0$ がとれる。このとき、 $\Sigma^{n-p+1, \frac{s}{2}} f = \Sigma^{\frac{s}{2}} (f \circ e)$ が成立する。

そこで我々は、 $g = f \circ e$ とおき f の代わりに g を考える。

g について、(source の次元) $\leq$ (target の次元) となる。

命題

f, e, g を上のものとする。さらに $0 \in \Sigma^1(g)$ を仮定する。すると、もし $0 \in \Sigma^{\frac{s}{2}} g$ であるならば、曲線 $C: \mathbb{C}_0 \rightarrow \mathbb{C}^{p+1}_0$ で $1 \leq i \leq \frac{s}{2}$ なる任意の整数 i に対し $\frac{d^i}{dt^i} (g \circ C)(0) = 0$ をみたすものが存在する。かつ、逆も成り立つ。

これから Faà de Bruno の公式 (51) を使い、次の特徴付けをうる。

i) $x \in \mathbb{C}^{p1}$ が $x \in \Sigma^1 g$ であるための必要十分条件は、

$$g_1(v_1) = 0 \quad \dots ①$$

をみたす 0 でない $v_1 \in T_x \mathbb{C}^{p1}$ が定数倍を除いて一意に存在することである。

ii) $x \in \Sigma^1 g$ が $x \in \Sigma^{1,1} g$ であるための必要十分条件は、上の ① の v_1 に加えて

$$g_1(v_2) + g_2(v_1^2) = 0 \quad \dots ②$$

をみたす 0 でない $v_2 \in T_x \mathbb{C}^{p1}$ が存在することである。

iii) $x \in \Sigma^{1,1} g$ が $x \in \Sigma^{1,1,1} g$ であるための必要十分条件は、上の ①, ② の v_1, v_2 に加えて

$$g_1(v_3) + 3g_2(v_1, v_2) + g_3(v_1^3) = 0 \quad \dots ③$$

をみたす 0 でない $v_3 \in T_x \mathbb{C}^{p1}$ が存在することである。

iv) $x \in \Sigma^{1,1,1} g$ が $x \in \Sigma^{1,1,1,1} g$ であるための必要十分条件は、上の ①, ②, ③ の v_1, v_2, v_3 に加えて

$$g_1(v_4) + 4g_2(v_1, v_3) + 3g_2(v_2^2) + 6g_3(v_1^2, v_2) + g_4(v_1^4) = 0 \quad \dots ④$$

をみたす 0 でない $v_4 \in T_x \mathbb{C}^{p1}$ が存在することである。

(i) から iv) において、 g_k は g の x における ^{通常の} 微分を表わす。)

§3 $\Sigma^{n-p+1}f, \Sigma^{n-p+1,1}f$ の desingularizations

この節から我々の desingularization の構成を始める。

以下の節を通し $f: \mathbb{C}^n_0 \rightarrow \mathbb{C}^p_0$ ($n \geq p$) を corank 1 で安定な正則写像群とする。

まず、 f の特異点集合 $C = \Sigma^{n-p+1}f$ となり、さらにこの集合は次元 $p-1$ の滑らかな多様体となる。そこで同型 $\rho: \mathbb{C}^{p-1}_0 \rightarrow C, 0$ をとり、この $\mathbb{C}^{p-1}$ を $\Sigma^{n-p+1}f$ の desingularization と呼ぶことにする。この $\mathbb{C}^{p-1}$ を $\tilde{\Sigma}^{n-p+1}f$ とかく。

次に、 $\Sigma^{n-p+1,1}f$ を考える。以下この節でバクトル束は、必要に応じて引き戻し $\tilde{\Sigma}^{n-p+1}f$ (以下) 上のものを考える。

$T, \tilde{\Sigma}^{n-p+1}(f)$ を $\mathcal{Z}_1$ とかくことにする。 $\mathcal{Z}_1$ の直線からなる Grassmannian を $G_1(\mathcal{Z}_1)$ とかく。 $G_1(\mathcal{Z}_1)$ 上には、 $\mathcal{Z}_1$ の fibre が $G_1(\mathcal{Z}_1)$ の点に対応する直線からなる totalological 直線束 $\mathcal{Z}_1'$ がとれる。

$T, \mathbb{C}^p$ を η_1 とかく。今、 $T, g = T, (f \circ \rho)$ は rank 一定なので、 $\mathcal{Z}_1$ の像からなるバクトル束 $\mathcal{Z}_0$ がとれる。 $\tilde{\Sigma}^{n-p+1}f$ 上で $T, g: \mathcal{Z}_1 \rightarrow \mathcal{Z}_0 \subset \eta_1$ となる。これを制限することで、束準同型 $\mathcal{Z}_1' \rightarrow \mathcal{Z}_0$ をうる。これより $G_1(\mathcal{Z}_1)$ 上のバクトル束 $\text{Hom}(\mathcal{Z}_1', \mathcal{Z}_0)$ の切断面が誘導される。

この切断面の零点集合 α 点において、 $\mathcal{Z}_1'$ は T, g の核の中に入る。 $\tilde{\Sigma}^{n-p+1,1}f$ をこの切断面の零点集合とする。 $\Sigma^{n-p+1,1}f$ の

点の上では、 $T_1 f$ の核は一意的な直線となる。そこで、 $\tilde{\Sigma}_0^{n-p+1,1} f$ を、 $\mathbb{Z}_1 = \ker T_1 f$ となる $\tilde{\Sigma}^{n-p+1,1} f$ の点の部分集合とする。

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{Hom}(\mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_0) & \\
 & \downarrow \text{写} & \\
 \tilde{\Sigma}_0^{n-p+1,1} f & \hookrightarrow \tilde{\Sigma}^{n-p+1,1} f & \hookrightarrow G(\mathbb{Z}_1) \\
 & \downarrow \pi_1 & \\
 & \tilde{\Sigma}^{n-p+1,1} f &
 \end{array}$$

定理

$e \circ \pi_1 : \tilde{\Sigma}^{n-p+1,1} f \rightarrow \bar{\Sigma}^{n-p+1} f$ が定義され、これは $\bar{\Sigma}^{n-p+1,1} f$ の desingularization となる。

次の節のため、 $\tilde{\Sigma}^{n-p+1,1} f$ の双対を作る。 $\mathcal{E}'$ を自明な直線束とし、 $\mathbb{Z}_1^* = \text{Hom}(\mathbb{Z}_1, \mathcal{E}')$ 、 $\mathbb{Z}_0^* = \text{Hom}(\mathbb{Z}_0, \mathcal{E}')$ とおく。 $\tilde{\Sigma}^{n-p+1,1} f$ 上に Grassmannian $G_1(\mathbb{Z}_0^*)$ が、さらに Σ の上に topological 直線束 $\mathbb{Z}_0^*$ がとれる。 $T_1 f : \mathbb{Z}_1 \rightarrow \mathbb{Z}_0$ から $G_1(\mathbb{Z}_0^*)$ 上の束 $\text{Hom}(\mathbb{Z}_0^*, \mathbb{Z}_1^*)$ の切断 π_1^* が誘導される。 $\tilde{\Sigma}^{n-p+1,1} f^*$ をこの切断の零点集合とする。

定理

$e \circ \pi_1^* : \tilde{\Sigma}^{n-p+1,1} f^* \rightarrow \bar{\Sigma}^{n-p+1} f$ が定義され、これは $\bar{\Sigma}^{n-p+1,1} f$ の desingularization となる。さらに埋め込み

$\pi_1^* \circ \pi_1: \tilde{\Sigma}_0^{n-p+1,1} f \rightarrow \tilde{\Sigma}_0^{n-p+1,1} f^*$ は自然に同型 $\overline{(\pi_1^* \circ \pi_1)}$

$\tilde{\Sigma}_0^{n-p+1,1} f \rightarrow \tilde{\Sigma}_0^{n-p+1,1} f^*$ に拡張される。

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Hom}(\mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_0) & & & & \text{Hom}(\mathbb{Z}_0^*, \mathbb{Z}_1^*) \\
 \downarrow \cong & & & & \downarrow \cong \\
 G_1(\mathbb{Z}_1) \leftarrow \tilde{\Sigma}_0^{n-p+1,1} f & \xrightarrow[\sim]{\overline{\pi_1^* \circ \pi_1}} & \tilde{\Sigma}_0^{n-p+1,1} f^* & \hookrightarrow & G_1(\mathbb{Z}_0^*) \\
 \searrow \pi_1 & & \circlearrowright & & \swarrow \pi_1^* \\
 & \tilde{\Sigma}_0^{n-p+1,1} f & & &
 \end{array}$$

このとき、 $\mathbb{Z}_0$ と $\mathbb{Z}_0^* = \text{Hom}(\mathbb{Z}_0, \mathbb{Z})$ の間の自然な pairing により $\mathbb{Z}_0^* \subset \mathbb{Z}_0^*$ から定義される $\mathbb{Z}_0$ の超平面部分束を $\mathbb{Z}_1$ とかくことにする。

§4 $\tilde{\Sigma}_0^{n-p+1,1,1} f$ の desingularization

この節でバクトル束は、必要に応じて引き戻して $\tilde{\Sigma}_0^{n-p+1,1} f$ (X) 上のものを考える。

$\mathbb{Z}_1$ の定義より $\pi_1^*(\mathbb{Z}_1) = \mathbb{Z}_0$ 。一方、 $\mathbb{Z}_1$ の定義より $\pi_1^*(\mathbb{Z}_1) \subset \mathbb{Z}_1$ 。従って準同型 $\pi_1: \mathbb{Z}_1/\mathbb{Z}_1 \rightarrow \mathbb{Z}_1$ をうる。Thom-Boardman 特異点の定義より、この準同型の $\tilde{\Sigma}_0^{n-p+1,1} f$ 上の退化集合は $\mathbb{Z}_0$ により $\tilde{\Sigma}_0^{n-p+1,1} f$ の外、 $\bigcup_{i>1} \tilde{\Sigma}_0^{n-p+1,i}$ の中へ写すことに注意する。

$\mathbb{Z}_2$ を σ による $\mathbb{Z}_1 \circ \mathbb{Z}_1$ の逆像とする。 $\mathbb{Z}_1 \subset \ker \pi_1$ より π_1 は $\mathbb{Z}_2$ を η_1 へ写し、さらに $\mathbb{Z}_0$ へ写すことがわかる。 $\mathbb{Z}_1 \subset \mathbb{Z}_2$ と、 $\pi_1|_{\mathbb{Z}_1} = \pi_1$ より、準同型 $\pi_1: \mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_1 \rightarrow \mathbb{Z}_0$ が

考えらる。§2の $\Sigma^{n-p+1,1,1}f$ の特徴付けの式②より、
 $\Sigma_0^{n-p+1,1}f$ における π の準同型の退化集合が $\rho \circ \pi_1$ により
 $\Sigma^{n-p+1,1}f_1$ に同型に写ることがわかる。ところが上の注意より、
 $T_1g = T_2g : \mathbb{A}_1/\mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_1/\mathbb{A}_1$ は非退化で、 T ので、

$\Sigma_0^{n-p+1,1}f$ における、合成

$$\mathbb{A}_1/\mathbb{A}_1 \xrightarrow{T_2g} \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_1/\mathbb{A}_1$$

により定義される準同型 ϕ_2 の退化集合が $\rho \circ \pi_1$ で $\Sigma^{n-p+1,1,1}f$
 に同型に写ることがわかる。

$\Sigma^{n-p+1,1}f$ 上準同型 ϕ_2 により誘導される $\text{Hom}(\mathbb{A}_2/\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_1/\mathbb{A}_1)$
 の切断を Φ_2 とかく。 Φ_2 の零点集合を $\Sigma^{n-p+1,1,1}f$ とし、また
 $\Sigma_0^{n-p+1,1,1}f = \Sigma^{n-p+1,1,1}f \cap \Sigma_0^{n-p+1,1}f$ とかく。

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_0^{n-p+1,1,1}f & \hookrightarrow & \Sigma^{n-p+1,1,1}f \\ & \searrow & \swarrow \\ & \Sigma^{n-p+1,1}f & \hookrightarrow \Sigma^{n-p+1,1}f \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{Hom}(\mathbb{A}_2/\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_1/\mathbb{A}_1) \\ \downarrow \Phi_2 \end{array}$$

定理

$\rho \circ \pi_1 : \Sigma^{n-p+1,1,1}f \rightarrow \Sigma^{n-p+1,1,1}f$ が定義され、これは
 $\Sigma^{n-p+1,1,1}f$ の desingularization となる。

§5 $\Sigma^{n-p+1,1,1}f$ の desingularization

この節でハクトル束は、必要に応じて引き戻して $\Sigma^{n-p+1,1,1}f$
 (X)上のものを考える。

また前節と同様に、 $T_3 g(\mathbb{Z}_1) = \mathbb{Z}_1$ であり、 $\tilde{\Sigma}_0^{n+1,1,1,1}$ 上では準同型 $T_3 g: \mathbb{Z}_1/\mathbb{Z}_1 \rightarrow \mathbb{Z}_1$ は非退化となる。また前節より $\tilde{\Sigma}_0^{n+1,1,1,1}$ 上では $T_3 g(\mathbb{Z}_2) \subset \mathbb{Z}_1$ となる。

$\mathbb{Z}_3$ を 0 による $\mathbb{Z}_1 \circ \mathbb{Z}_2$ の逆像とする。 $\mathbb{Z}_1 \subset \ker T_3 g$ より $T_3 g$ は $\mathbb{Z}_3$ を η_1 の中へ、さらに $\mathbb{Z}_0$ の中へ写すことがわかる。同型 $\rho_3: \mathbb{Z}_3/\mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_1 \circ (\mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_1)$ を合成

$$\mathbb{Z}_3/\mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\rho_3} \mathbb{Z}_1 \circ \mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_1 \circ \mathbb{Z}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_1 \circ (\mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_1)$$
 で定義する。このとき、§2 の $\tilde{\Sigma}_0^{n+1,1,1,1}$ の特徴付けの式③および④より、図式

$$\left. \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_1 \circ (\mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_1) & \xrightarrow{\text{id} \otimes T_3 g} & \mathbb{Z}_1 \circ \mathbb{Z}_0 \longleftarrow \mathbb{Z}_1 \circ \mathbb{Z}_1 \\ \uparrow \rho_3 & & \oplus \\ \mathbb{Z}_3/\mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{T_3 g} & \mathbb{Z}_0 \longrightarrow \mathbb{Z}_0/\mathbb{Z}_1 \end{array} \right\} = \eta_3$$

により定義される準同型 $\phi_3: \mathbb{Z}_3/\mathbb{Z}_2 \rightarrow \eta_3$ の $\tilde{\Sigma}_0^{n+1,1,1,1}$ における退化集合が $\emptyset \neq \pi$ であり $\tilde{\Sigma}_0^{n+1,1,1,1}$ に同型に写ることがわかる。

$\mathbb{Z}_3/\mathbb{Z}_2$ の直線からなる Grassmannian を $G_1(\mathbb{Z}_3/\mathbb{Z}_2)$ とし、 $G_1(\mathbb{Z}_3/\mathbb{Z}_2)$ 上の topological 直線束 $(\mathbb{Z}_3/\mathbb{Z}_2)'$ をとる。準同型 ϕ_3 から誘導される $G_1(\mathbb{Z}_3/\mathbb{Z}_2)$ 上のベクトル束 $\text{Hom}((\mathbb{Z}_3/\mathbb{Z}_2)', \eta_3)$ の切断を Σ とする。この切断束の零点集合を $\tilde{\Sigma}_0^{n+1,1,1,1}$ とおき、 $(\mathbb{Z}_3/\mathbb{Z}_2)' = \ker \phi_3$ となり $\tilde{\Sigma}_0^{n+1,1,1,1}$ の点からなる部分集合を $\tilde{\Sigma}_0^{n+1,1,1,1}$ とする。

$$\begin{array}{c}
 \text{Hom}((\mathbb{Z}_3/\mathbb{Z}_2)', \eta_3) \\
 \downarrow \uparrow \Phi_3 \\
 \Sigma_0^{n+1,1,1,1,1} f \hookrightarrow \tilde{\Sigma}^{n+1,1,1,1,1} f \hookrightarrow G_1(\mathbb{Z}_3/\mathbb{Z}_2) \\
 \downarrow \pi_3 \\
 \Sigma^{n+1,1,1,1,1} f
 \end{array}$$

定理

$\rho \circ \pi_1 \circ \pi_3 : \tilde{\Sigma}^{n+1,1,1,1,1} f \rightarrow \Sigma^{n+1,1,1,1,1} f$ が定義され、
 これは $\Sigma^{n+1,1,1,1,1} f$ の desingularization となる。

このとき、§3 で行、1-a と同様に、今つく、に $\tilde{\Sigma}^{n+1,1,1,1,1} f$ の双対 $\tilde{\Sigma}^{n+1,1,1,1,1} f^*$ が作られる。これに対し §3 の 2 番目の定理と同様の事が成り立ち、さらに $\tilde{\Sigma}^{n+1,1,1,1,1} f$ 上、 ϕ_3 の像から得るベクトル束 $\mathcal{E}_3$ ($\subset \eta_3$) が得られる。

§6 $\tilde{\Sigma}^{n+1,1,1,1,1} f$ の desingularization

この節の前半でベクトル束は、必要に応じて引き戻し $\tilde{\Sigma}^{n+1,1,1,1,1} f$ (1X) 上のものを考える。

まず前節同様、 $T_4 g(\mathbb{Z}_1) = \{0\}$, $T_4 g(\mathbb{Z}_2) \subset \mathbb{Z}_1$, 2、 $\Sigma_0^{n+1,1,1,1,1} f$ 上では $T_4 g : \mathbb{Z}_1/\mathbb{Z}_1' \rightarrow \mathbb{Z}_1$ は非退化であることに注意する。

$\mathbb{Z}_2$ を図式

$$\begin{array}{c}
 \mathbb{Z}_3/\mathbb{Z}_2 \xrightarrow{p_3} \mathbb{Z}_1 \cdot (\mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_1) \leftarrow \mathbb{Z}_1 \cdot \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{(\mathbb{Z}_1/\mathbb{Z}_1)'} \mathbb{Z}_2 \\
 \cup \\
 (\mathbb{Z}_3/\mathbb{Z}_2)' \xrightarrow{w} \mathbb{Z}_2^2
 \end{array}$$

で定義し、 $\tilde{z}_3$ を

$$\tilde{z}_3 = \sigma^+(z_1 \cdot z_2^2)$$

で定義する。

このとき $z_1 \subset z_2^2 \subset \tilde{z}_2 \subset \tilde{z}_3 \subset \tilde{z}_3$ となり、前節の内容及び、 z_2^2 と $\tilde{z}_3$ の定義より、 $T_4 g(z_2^2) = \{0\}$ となり、また $\Sigma_0^{n+p+1, l, l, l, l}$ 上
 $\phi_3 : \tilde{z}_3 / \tilde{z}_3 \rightarrow \tilde{z}_3 (\subset \eta_3)$ は非退化となることに注意する。

$\tilde{z}_4$ を σ による $z_1 \cdot z_3 + z_2^2 \cdot z_2^2$ の逆像とする。準同型 $f_4 :$
 $\tilde{z}_4 / \tilde{z}_3 \rightarrow z_1 \cdot (\tilde{z}_3 / \tilde{z}_2)$ を図式

$$\begin{array}{ccc} \tilde{z}_4 / \tilde{z}_3 & \xrightarrow{\sigma} & (z_1 \cdot z_3 + z_2^2 \cdot z_2^2) / z_1 \cdot z_2 \\ & \searrow f_4 & \downarrow \\ & & (z_1 \cdot z_3 + z_2^2 \cdot z_2^2) / (z_1 \cdot z_2 + z_2^2 \cdot z_2^2) \\ & & \downarrow s \\ & & z_1 \cdot (\tilde{z}_3 / \tilde{z}_2) \end{array}$$

で定義する。 f_4 は同型とは限らないことに注意する。

このとき §2 の $\Sigma_0^{n+p+1, l, l, l, l}$ の特徴付けの式④および③より、図式

$$\left. \begin{array}{ccc} z_1 \cdot (\tilde{z}_3 / \tilde{z}_2) & \xrightarrow{\text{id} \otimes T_3 g} & z_1 \cdot \tilde{z}_0 \longleftarrow z_1 \cdot \tilde{z}_1 \\ \uparrow f_4 & & \oplus \\ \tilde{z}_4 / \tilde{z}_3 & \xrightarrow{T_4 g} & \tilde{z}_0 \longrightarrow \tilde{z}_0 / \tilde{z}_1 \end{array} \right\} = \eta_3 \longrightarrow \eta_3 / \tilde{z}_3$$

で定義される準同型の $\Sigma_0^{n+p+1, l, l, l, l}$ における退化集合が

$\rho \circ \pi_1 \circ \pi_3$ により $\Sigma^{n-p+1, l, l, l, l}$ に同型に写されることがわかる。

以前の節と同様に事を進めたいが、 f_4 が同型とは限らないため、一度余分な blowing-up を要する。

$\mathcal{G}_4 = (\mathcal{G}_4, T_4 \mathcal{G}) : \mathcal{Y}_4 / \mathcal{Z}_3 \rightarrow \mathbb{P}^1 \cdot (\mathbb{P}^3 / \mathbb{P}^2) \oplus \mathbb{P}^1 / \mathbb{P}^1$ とする。

$G_1(\{\mathbb{P}^1 \cdot (\mathbb{P}^3 / \mathbb{P}^2) \oplus \mathbb{P}^1 / \mathbb{P}^1\}^*)$ を $\{\mathbb{P}^1 \cdot (\mathbb{P}^3 / \mathbb{P}^2) \oplus \mathbb{P}^1 / \mathbb{P}^1\}^*$ の直線からなる

Grassmannian とし、 Σ の上での total/直線束を $(\mathbb{P}^1 \cdot (\mathbb{P}^3 / \mathbb{P}^2) \oplus \mathbb{P}^1 / \mathbb{P}^1)^*$

とする。 $\mathcal{G}_4$ から誘導される Σ の Grassmannian 上の $\text{Hom}(\{\mathbb{P}^1 \cdot (\mathbb{P}^3 / \mathbb{P}^2) \oplus \mathbb{P}^1 / \mathbb{P}^1\}^*, (\mathcal{Y}_4 / \mathcal{Z}_3)^*)$ の切断を Ψ_4 とし、 Σ の零点集合を $\widetilde{\Sigma}^{n-p+1,1,1,1}$

f とし、 $\ker \mathcal{G}_4 = \{\mathbb{P}^1 \cdot (\mathbb{P}^3 / \mathbb{P}^2) \oplus \mathbb{P}^1 / \mathbb{P}^1\}^*$ となる点の部分集合を $\widetilde{\Sigma}_0^{n-p+1,1,1,1} f$ とおく。

$$\text{Hom}(\{\mathbb{P}^1 \cdot (\mathbb{P}^3 / \mathbb{P}^2) \oplus \mathbb{P}^1 / \mathbb{P}^1\}^*, (\mathcal{Y}_4 / \mathcal{Z}_3)^*)$$

$$\downarrow \Psi_4$$

$$\widetilde{\Sigma}^{n-p+1,1,1,1} f \hookrightarrow G_1(\{\mathbb{P}^1 \cdot (\mathbb{P}^3 / \mathbb{P}^2) \oplus \mathbb{P}^1 / \mathbb{P}^1\}^*)$$

$$\downarrow \pi$$

$$\widetilde{\Sigma}^{n-p+1,1,1,1} f$$

定理

$\widetilde{\Sigma}^{n-p+1,1,1,1}$ は滑らかで、 $\pi : \widetilde{\Sigma}^{n-p+1,1,1,1} f \rightarrow \widetilde{\Sigma}^{n-p+1,1,1,1} f$

が定義され、これは modification となる。

ここから、ベクトル束は $\widetilde{\Sigma}^{n-p+1,1,1,1} f$ (IX) 上のものを考える。

$\widetilde{\Sigma}^{n-p+1,1,1,1} f$ と $(\mathbb{P}^1 \cdot (\mathbb{P}^3 / \mathbb{P}^2) \oplus (\mathbb{P}^1 / \mathbb{P}^1))^*$ から定義される $\mathcal{G}_4$ の像

からなる束を λ_4 とする。準同型 $\phi_4 : \lambda_4 \rightarrow \eta_3 / \eta_3$ を

$$\lambda_4 \xrightarrow{(\text{id} \otimes \text{id}) \otimes \text{id}} \eta_3 \longrightarrow \eta_3 / \zeta_3$$

を定義する。 Φ_4 から定義される $\tilde{\Sigma}^{n-p+1,1,1,1,1} f$ 上の Λ -クトル束 $\text{Hom}(\lambda_4, \eta_3 / \zeta_3)$ の切断を Φ_4 とかき、その零点集合を $\Sigma^{n-p+1,1,1,1,1} f$ とかく。 $\Sigma_0^{n-p+1,1,1,1,1} f = \tilde{\Sigma}^{n-p+1,1,1,1,1} f \cap \Sigma_0^{n-p+1,1,1,1,1} f$ とする。

$$\begin{array}{ccc} & \text{Hom}(\lambda_4, \eta_3 / \zeta_3) & \\ & \downarrow \Phi_4 & \\ \tilde{\Sigma}^{n-p+1,1,1,1,1} f & \hookrightarrow & \tilde{\Sigma}^{n-p+1,1,1,1,1} f \end{array}$$

定理

$\rho \circ \pi_1 \circ \pi_3 \circ \pi : \tilde{\Sigma}^{n-p+1,1,1,1,1} f \rightarrow \Sigma^{n-p+1,1,1,1,1} f$ が定義され、これは $\Sigma^{n-p+1,1,1,1,1} f$ の desingularization となる。

参考文献

- [1] T. Gaffney, "The Thom Polynomial of $\Sigma^{1,1,1,1}$ "; Proceedings of Symposia in Pure Maths vol. 40 (1983) part I, 399-408.
- [2] I.R. Porteous, "Simple singularities of maps"; Proc. Liverpool Singularities Sympos. I, Springer Lecture Notes, vol. 192 (1971) 286-307.
- [3] F. Ronga, "Le calcul des classes duales aux singularités de Boardman d'ordre 2"; Comment Math. Helv. 47 (1972), 15-35.
- [4] R.J.H.A. Turnbull, "The Thom-Boardman singularities $\Sigma^1, \Sigma^{1,1}, \Sigma^{1,1,1}, \Sigma^{1,1,1,1}, \Sigma^{1,1,1,1,1}$ and their closures"; Thesis, Univ. of Liverpool (1989).