

氏 名	ま 真 の 野 げん 元
学位(専攻分野)	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	理 博 第 3104 号
学位授与の日付	平 成 19 年 3 月 23 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研 究 科 ・ 専 攻	理 学 研 究 科 数 学 ・ 数 理 解 析 専 攻
学 位 論 文 題 目	Radon transform of functions supported on a homogeneous cone (等質錐上に台をもつ関数のラドン変換)
論文調査委員	(主 査) 教 授 小 林 俊 行 教 授 齋 藤 恭 司 教 授 柏 原 正 樹

論 文 内 容 の 要 旨

不定値直交群 $O(p+1, q+1)$ (ただし p, q は $p+q$ が 4 以上の偶数となる正の自然数) の極小表現に対する小林-Orsted の L^2 モデルを考える。すなわち、 R^{p+q} における符号 (p, q) の錘 C 上の自然な測度に関する二乗可積分関数全体のなす Hilbert 空間 $L^2(C)$ を表現空間とする既約ユニタリ表現を考えるのである。

このとき、不定値直交群 $O(p+1, q+1)$ の作用のうち、極大放物型部分群 P の作用は幾何的に実現できるので、最後の一つのユニタリ反転作用素を理解することがこの極小表現の L^2 モデルを理解する鍵と言える。

申請者 真野元氏は、その反転作用素が

- 1) Hankel 変換を一般化した特異積分、と
- 2) 錘 C に台をもつ関数空間に関する Radon 変換

に分解できることを証明し、さらに、申請論文では Radon 変換の解析を、参考論文では Hankel 変換を一般化した特異積分の解析をリー群論の手法を用いて行っている。

すなわち、参考論文[1]では、群論的考察によってユニタリ反転作用素の核関数の満たす微分方程式を決定し、さらに、Meijer の G 関数や Appell の超幾何関数を援用することによってその具体的な形を完全に決定した。参考論文[1]によればユニタリ反転作用素を表す核関数は

1-A) p, q が共に 3 以上の場合： $\frac{1}{2}(p+q-6)$ 回の法微分を含む

1-B) p または q の一方が 2 の場合：局所可積分関数

となる。核関数の具体形から、「ユニタリ反転作用素が特異積分作用素 $\Leftrightarrow$ 対応する表現は最高ウェイトを有しない極小表現である」という現象や、「 $p, q \geq 3$ のとき、核関数の台は p, q の偶奇によって異なる」という現象も発見された。

さて、錘 C と超平面の交わりは、超平面のパラメータ t が 0 でなければ余次元 2 の非特異な曲面であるが、 $t=0$ のとき特異となる。この幾何的な特異性に対応して、錘 C に台をもつ関数の Radon 変換は $t=0$ のときに特異性をもつ。

申請論文の主結果はこの解析的特異性を綿密に研究したものであり、次の形で記述される：いま、 $p+q$ が 6 以上と仮定すると、コンパクトかつ錘 C に台をもつ関数 f の Radon 変換 Rf は、

2-A) $t=0$ のとき、 $\left\lfloor \frac{1}{2}(p+q-6) \right\rfloor$ 回連続微分可能である。

2-B) $t=0$ のとき、 $\left\lfloor \frac{1}{2}(p+q-4) \right\rfloor$ 回連続微分可能でない関数 f を構成できる。

ここで $[x]$ は x を越えない最大の整数を表す。

さらに、参考論文[1]の結果と合わせることによって、次の系が証明された：コンパクトかつ錘 C に台をもつ関数 f に

対して、そのラドン変換 Rf が満たす超双曲型方程式に関する特異超曲面 C^* 上の値だけから f を復元することができる。

なお、逆変換の公式は、Hankel 変換を一般化した特異積分とユニタリ反転作用素を合成することで得られる。

また、参考論文 [2, 3] では複素解析的半群（縮小作用素）の観点から極小表現の解析を研究し、参考論文 [4] では2つの異なる群の極小表現を連続パラメータでつなぐという意欲的な試みが行われている。

論文審査の結果の要旨

実代数群の任意のユニタリ表現は既約な表現の直積分として一意的に分解することができることが知られている (Mackey-Teleman)。さらに、これらの既約なユニタリ表現は半単純リー群の既約ユニタリ表現から構成できる (Duflo)。従って、半単純リー群の既約ユニタリ表現をすべて理解することは、ユニタリ表現論の中心的な課題の1つといえる。

半単純リー群の既約ユニタリ表現については、1940年代に Bargmann や Gelfand-Naimark がそれぞれ $SL(2, \mathbb{R})$, $SL(2, \mathbb{C})$ に対して分類を完成して以来、半世紀以上にわたって代数・幾何・解析の種々の手法を用いた研究が多くの人によって行われてきた。しかし、今なお、不定値直交群 $O(p, q)$ やシンプレクティック群 $Sp(n, \mathbb{R})$ 等の古典群の場合でさえ、既約ユニタリ表現はまだ十分に理解されておらず、その分類は大きな未解決問題として残されている。この中心問題として、現在特に注目されているのが、極小表現を典型例とする“小さな無限次元表現”である。

不定値直交群 $O(p, q)$ に関しては、Gelfand-Kirillov 次元が $p+q-3$ となる既約ユニタリ表現(=“極小表現”)は、 $p+q$ が9以上の奇数の時には存在しないことが Howe と Vogan によって証明された。逆に $p+q$ が偶数の時には Kostant (1990) により $(p, q)=(4, 4)$ の場合に存在が証明され、その後、Binegar 等によって $p+q$ が8以上の偶数の場合に拡張され、さらに小林-Orsted によって共形モデルと L^2 モデルが構成された (2003)。

さて、極小表現に関して、例外的に古くから研究が行われていた表現が1つだけある(ただし、“極小表現”という観点はずっと最近になってから顕在化した)。すなわちそれは、(保型形式の整数論にも現れる) Weil 表現である。さらに、 $L^2(\mathbb{R}^n)$ を表現空間とする Schrodinger モデル (L^2 モデル) におけるユニタリ反転作用素は通常の Fourier 変換に一致することが知られている。

申請者の真野元氏は、参考論文 [2, 3] で、まず $O(n, 2)$ に対する極小表現に関して Weil 表現の Schrodinger モデルの一般化を行った。特に、Hermite 半群の極限值として Fourier 変換が得られるのと同様に、Hankel 変換を境界値としてもつような複素半群の公式を発見し、Gelfand-Gindikin プログラムをこの場合に遂行した。標語的に言えば、“無限次元空間に対する佐藤の超関数”のアイデアを追求したものであり、約60頁の論文(参考論文 [3])は Howe 教授の還暦記念の論文集に掲載が決定している。

この結果を出発点とし、さらに2編で100頁を越す申請論文および参考論文 [1] においては、先行する結果もなく、手法さえ手探りの未知の世界に踏みこんだ。申請者は、他分野の手法、特に、Meijer の G 関数などの特殊関数を援用して、ユニタリ反転作用素を具体的に発見した。これに加えて、この発見を数学的に論証するために、錘状に台をもつ Radon 変換という新しい対象に対して、幾何的な特異性が解析的な特異性にどのように影響するかについての解析的評価式を綿密に求めた。

よって、本論文は博士(理学)の学位論文として価値あるものと認める。また、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。