

## factorial Schur function に対する Tokuyama-type formula

北里大学一般教育部 中筋麻貴 (Maki Nakasuji)  
College of Liberal Arts and Sciences,  
Kitasato University

Tokuyama([6]) によって得られた Tokuyama formula は, ワイル指標公式の  $t$ -deformation を組合せ論の言葉で表示したものであり, 表現論, 組合せ論の両分野において応用範囲の広い公式である. 本稿ではこれを factorial Schur 関数を用いて拡張したものを可解格子模型を用いて表す. なお, ここで得られた結果はアメリカ, Stanford 大学の Daniel Bump 氏および同大学の Peter J. McNamara 氏との共同研究 ([3]) で得られたものである.

### 1 Tokuyama formula

$G$  を連結な古典群,  $T$  を  $G$  に含まれる対角行列からなる極大トーラス,  $W$  を  $G$  の  $T$  に関するワイル群,  $\Phi^+$  を正ルート系とする. このとき, 次の指標公式が成り立つ.

**Theorem 1.1** (ワイルの指標公式) 指標群を  $X^*(T)$  とする.  $\lambda \in X^*(T)$  を最高ウェイトとする既約有理表現  $L_\lambda$  の指標を  $\chi_\lambda$  とすると,

$$\chi_\lambda(t) = \frac{\sum_{w \in W} \varepsilon(w) t^{w(\lambda+\rho)}}{\sum_{w \in W} \varepsilon(w) t^{w\rho}} \quad (t \in T).$$

ここで,  $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha$  であり,  $\varepsilon: W \rightarrow \{\pm 1\}$  は群準同型写像である.

$G$  が  $GL(r+1, \mathbb{C})$  の場合, 有限次元既約表現は,

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_{r+1} \quad (1.1)$$

を満たす列 (partition)  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{r+1}) \in \mathbb{Z}^{r+1}$  でパラメトライズされる. 対応する既約指標  $\chi_\lambda$  は  $g \in G$  の固有値にのみ依存し, これを  $z_1, \dots, z_{r+1}$  とすると, 次が成り立つ.

$$\chi_\lambda(g) = s_\lambda(z_1, \dots, z_{r+1}).$$

ここで,  $s_\lambda$  は Schur 関数を表し,  $z_1, \dots, z_{r+1}$  についての対称多項式である. これより,  $G = GL(r+1, \mathbb{C})$  における Weyl 指標公式は次のように書き換えられる.

**Theorem 1.2**

$$s_\lambda(z_1, \dots, z_{r+1}) = \frac{\det(z_i^{\lambda_j+r-j})}{\det(z_i^{r-j})}. \quad (1.2)$$

$\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_{r+1})$  とおく. (1.2) 式右辺の分母は Vandermonde 行列式であり, 定理の主張は以下と書くこともできる.

$$\prod_{i < j} (z_i - z_j) s_\lambda(\mathbf{z}) = \det(z_i^{\lambda_j+r-j}). \quad (1.3)$$

これに対し Tokuyama は, (1.3) 式の  $t$ -deformation を Gelfand-Tsetlin pattern を用いて表した (Gelfand-Tsetlin pattern の具体的な表示は 4 節 (4.1) を参照).

**Theorem 1.3** (Tokuyama formula)[6] (1.1) を満たす *partition* を  $\lambda, \rho = (r, r-1, \dots, 0)$  とする.  $GT_{\lambda+\rho}$  を *top row* が  $\lambda + \rho$  の *strict* な Gelfand-Tsetlin pattern とする.  $T \in GT_{\lambda+\rho}$  に対して, *left-leaning* の個数を  $l(T)$ , *right-leaning* の個数を  $s(T)$ ,  $T$  の  $k$ -列目の数の和を  $d_k(T)$  とする. このとき次が成り立つ.

$$\prod_{i < j} (z_j + tz_i) s_\lambda(\mathbf{z}) = \sum_{T \in GT_{\lambda+\rho}} t^{l(T)} (t+1)^{s(T)} \left( \prod_{k=1}^{r+1} z_k^{d_k(T) - d_{k+1}(T)} \right). \quad (1.4)$$

Tokuyama formula (1.4) からは表現論や組合せ論における色々な公式を導くことができる. 例えば,  $t = -1$  とすると, 明らかに  $G = GL(r+1, \mathbb{C})$  におけるワイル指標公式 (1.3) が得られ,  $t = 0$  とすると Schur 関数の組合せ論的定義が得られる. また,  $t = 1$  とすると, Stanley の公式,  $t = -q^{-1}$  とすると, Casselman-Shalika formula ([4]) に対する組合せ論的表示が得られる. また, Tokuyama formula については, 組合せ論だけでなく, 量子群などの対象物を用いた表示も報告されている. その一部を紹介する.

1) Okada(1993)[7] によつて,  $\lambda = 0$  に対する Tokuyama formula の alternating sign matrix を用いた以下の定理が示された. なお, [7] では,  $A$  型のみではなく,  $B, C, D$  型の表示も報告されている.

**Theorem 1.4** [7]  $\mathcal{A}_n$  を  $n \times n$  の alternating sign matrix とする.  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{A}_n$  に対し,  $i(A) = \sum_{i < k, j > l} a_{ij} a_{kl}$ ,  $s(A)$  を  $A$  における  $-1$  の数,  $\delta(\mathcal{A}_{n-1}) = {}^t \left( \frac{n-1}{2}, \frac{n-3}{2}, \dots, -\frac{n-1}{2} \right)$  とおく. このとき, 次が成り立つ.

$$\prod_{i < j} (z_i + tz_j) = \sum_{A \in \mathcal{A}_n} t^{i(A)} (t+1)^{s(A)} \mathbf{z}^{\delta(\mathcal{A}_{n-1}) - A\delta(\mathcal{A}_{n-1})}.$$

2) Hamel-King (2007) により可解格子模型, 特に six vertex model を用いた以下の定理が示された. なお, six vertex model の詳しい定義および状態については次節参照のこと.

**Theorem 1.5**  $\mathfrak{S}_\lambda$  を  $\lambda$  によって決まる *six vertex model* の *system* とする.  $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}_\lambda$  に対し,

$SE(\mathfrak{s})$  を  の個数,  $NS(\mathfrak{s})$  を  の個数,  $NE(\mathfrak{s})$  を  の個数とする. このとき, 次が成り立つ.

$$\prod_{i < j} (z_i + tz_j) s_\lambda(\mathbf{z}) = \sum_{\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}_\lambda} t^{SE(\mathfrak{s})} (t+1)^{NS(\mathfrak{s})} \mathbf{z}^{NE(\mathfrak{s})}.$$

本定理 (Theorem 1.5) については, Brubaker-Bump-Friedberg(2010) により, 量子群の特徴である Yang-Baxter 方程式を用いた別証明が報告されている ([1]).

3) Bump-Nakasuji(2010) により,  $t = -q^{-1}$  の場合について結晶基底を用いた以下の定理が示された ([2]).

**Theorem 1.6**  $\mathcal{B}_{\lambda+\rho}$  を最高ウェイトが  $\lambda + \rho$  の *crystal*,  $\mathcal{T}_{-\lambda-\rho}$  をウェイトが  $-\lambda - \rho$  である元 1 つのみで生成される *crystal* とする. また,  $G_\Omega$  を Tokuyama 関数とする. このとき, 次が成り立つ.

$$\prod_{i < j} (z_i - q^{-1} z_j) s_\lambda(\mathbf{z}) = \sum_{v \in \mathcal{B}_{\lambda+\rho} \otimes \mathcal{T}_{-\lambda-\rho}} G_\Omega(v) q^{-\langle w_0(\text{wt}(v)), \rho \rangle} \mathbf{z}^{w_0(\text{wt}(v))}.$$

本報告集では, Schur 関数  $s_\lambda(\mathbf{z})$  を factorial Schur 関数  $s_\lambda(\mathbf{z}|\alpha)$  に置き換えることにより, Tokuyama formula を拡張し, これを Brubaker-Bump-Friedberg([1]) の手法にそって 2) と同様に可解格子模型を用いて表示する.

## 2 Tokuyama formula の拡張

factorial Schur 関数は, 任意の複素数列  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  によって Schur 関数を shift し定義される対称関数であり, もともと Biedenharn と Louck によって特別な場合 ( $\alpha_n = 1 - n$  の場合) について, Gelfand-Tsetlin pattern の言葉を用いて定義された. その後, Macdonald および Goulden-Greene 等によって独立に任意の  $\alpha$  に拡張された. 詳しい定義は以下となる.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  を複素数の列としたとき,  $z \in \mathbb{C}$  に対し,

$$(z|\alpha)^m = (z + \alpha_1) \cdots (z + \alpha_m)$$

と定義する.  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{Z}^n$  が effective, すなわち, すべての  $\mu_i \geq 0$  であると仮定する. このとき, スペクトルパラメータ  $z_1, \dots, z_n$  に対し,

$$A_\mu(\mathbf{z}|\alpha) = \det((z_i|\alpha)^{\mu_j})_{i,j}$$

と定義する. factorial Schur 関数は, この  $A_\mu$  を用いて, partition  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{r+1})$ , および  $\rho = (r, r-1, \dots, 0)$  に対して次のように定義される:

$$s_\lambda(\mathbf{z}|\alpha) = \frac{A_{\lambda+\rho}(\mathbf{z}|\alpha)}{A_\rho(\mathbf{z}|\alpha)}.$$

なお,  $\alpha = (0, \dots, 0)$  のとき, (1.2) と一致することから, factorial Schur 関数は Schur 関数の拡張とみなすことができる.

次に可解格子模型 (six vertex model) について復習する. まず, 格子点には酸素原子 O, 各辺に水素イオン H をおいた 2 次元の結晶格子に次の条件を付加した格子模型を考える. 水素イオン H は各 O 原子に対し 2 個 (多くも少なくもなく) つくため, Figure 1 上段に示した 6 通りの状態が考えられる. この状態を酸素原子 O が配置される格子点は  $\bullet$ , 各辺に配置された水素原子が上もしくは左の酸素原子についている場合は  $\oplus$ , 下もしくは右の酸素原子につく場合は  $\ominus$  を用いて表す (Figure1, 下段).

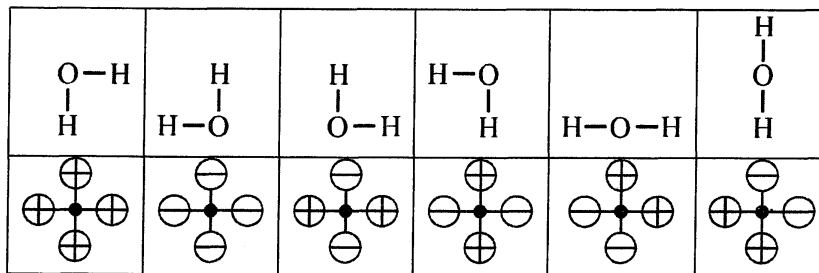


Figure1. 2次元の結晶格子模型

格子上にこのような酸素原子と水素原子の状態を条件にそって並べたものを「配置 (state)」という. 各配置  $\mathbf{s}$  に対する頂点  $v$  (酸素原子) のボルツマン・ウエイト  $\beta(v, \mathbf{s})$  に対し,

$$Z = \sum_{\mathbf{s}} \prod_v \beta(v, \mathbf{s})$$

と定義される関数を分配関数と呼ぶ.

$\rho = (r, r-1, \dots, 0) = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{r+1})$  に対し,  $\rho_i^* = \rho_i + 1$  とする. ここで partition  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{r+1})$  を 1 つ定め,  $r+1$  行  $(\lambda_1 + \rho_1^*)$  列の長方形の格子を考える. 各行には上から順に 1 から  $r+1$  まで通常の順序で, 各列には左から順に  $\lambda_1 + \rho_1^*$  から逆順序で番号をつける. この長方形の格子に次の境界条件を課す.

**境界条件.** 長方形格子の左端の列と一番下の行の各辺は  $\oplus$ , 右端の列の各辺には  $\ominus$  をおく. 一番上の行の各辺に  $(\lambda_i + \rho_i^*)$  番の列の辺に  $\ominus$ , それ以外の列の辺には  $\oplus$  をおく.

この  $\lambda$  に依存する境界条件のもとで、構成可能な配置 (state) を考えていく。  $z_1, \dots, z_{r+1}$  をスペクトルパラメータ、  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  を別の複素数の列、  $t$  を別のパラメータとする。このとき、長方形格子の  $i$  行  $j$  列成分、および  $i, k$  行に関する頂点に対し、Figure2 で表したボルツマンウエイトを与える。なお、状態には2段目で表した「ねじれの状態」も含める。配置の集合 (system) は  $\lambda$  と  $t$  に依存するため、これを  $\mathfrak{S}_{\lambda, t}$  と表す。このとき、主定理となる以下の factorial Schur 関数に対する Tokuyama formula が得られる。

**Theorem 2.1**

$$\prod_{i < j} (z_i + tz_j) s_{\lambda}(\mathbf{z} | \alpha) = Z(\mathfrak{S}_{\lambda, t}). \quad (2.1)$$

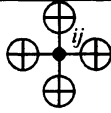
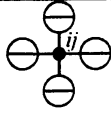
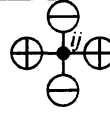
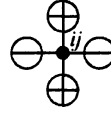
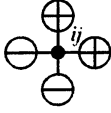
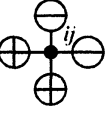
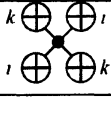
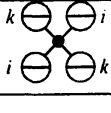
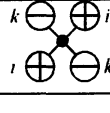
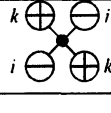
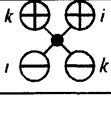
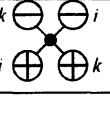
|                             |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                    |                                                                                     |                                                                                     |
|-----------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| $v_{\Gamma}(i, j, t)$       |  |  |  |  |  |  |
| ボルツマン<br>ウエイト               | 1                                                                                 | $z_i - t\alpha_{j+1}$                                                             | $t$                                                                               | $z_i + \alpha_{j+1}$                                                               | $z_i(t+1)$                                                                          | 1                                                                                   |
| $v_{\Gamma\Gamma}(i, k, t)$ |  |  |  |  |  |  |
| ボルツマン<br>ウエイト               | $tz_i + z_k$                                                                      | $tz_k + z_i$                                                                      | $t(z_k - z_i)$                                                                    | $z_i - z_k$                                                                        | $(t+1)z_i$                                                                          | $(t+1)z_k$                                                                          |

Figure2. 各状態におけるボルツマンウエイト

### 3 Yang-Baxter 方程式と主定理の証明

主定理 (Theorem 2.1) の証明には、six vertex model の特長である Yang-Baxter 方程式が鍵となる。

Figure1 で表した 6 種類の状態において、頂点 (酸素原子) にボルツマンウエイトを、それぞれ  $a_1(v)$ ,  $a_2(v)$ ,  $b_1(v)$ ,  $b_2(v)$ ,  $c_1(v)$ ,  $c_2(v)$  を与える。このとき、各頂点  $v$  において、

$$a_1(v)a_2(v) + b_1(v)b_2(v) - c_1(v)c_2(v) = 0$$

を満たすとき、この頂点を *free-fermionic* と呼ぶ。

**Theorem 3.1** (*Yang-Baxter equation*, [1], [3, Theorem 4])  $v$  と  $w$  を *free-fermionic* な頂点とする。  $v$ ,  $w$  と異なる頂点  $u$  に対し、

$$\begin{aligned} a_1(u) &= a_1(v)a_2(w) + b_2(v)b_1(w), & a_2(u) &= b_1(v)b_2(w) + a_2(v)a_1(w), \\ b_1(u) &= b_1(v)a_2(w) - a_2(v)b_1(w), & b_2(u) &= -a_1(v)b_2(w) + b_2(v)a_1(w), \\ c_1(u) &= c_1(v)c_2(w), & c_2(u) &= c_2(v)c_1(w) \end{aligned}$$

を満たすとき, 任意の符号  $\varepsilon_i \in \{\pm\}$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ) に対して次が成り立つ:

$$Z \left( \begin{array}{c} \varepsilon_3 \\ \text{---} v \text{---} \varepsilon_4 \\ \text{---} \gamma \text{---} \\ \text{---} \mu \text{---} w \text{---} \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{array} \right) = Z \left( \begin{array}{c} \varepsilon_3 \\ \text{---} w \text{---} \phi \\ \text{---} \delta \text{---} \\ \text{---} v \text{---} \phi \\ \varepsilon_6 \end{array} \right) \quad (3.1)$$

前節 Figure2. で与えた状態  $v_{\Gamma\Gamma}(i, k, t)$  および  $v_{\Gamma}(i, k, t)$  に対して,  $u = v_{\Gamma\Gamma}(i, k, t)$ ,  $v = v_{\Gamma}(i, j, t)$ ,  $w = v_{\Gamma}(k, j, t)$  とすると, Theorem 3.1 の条件が成立することは簡単な計算から確かめられる. これを用いることにより, 次の命題が得られる.

**Proposition 3.2** Figure2. で与えたボルツマンウェイトをもつ任意の system  $\mathfrak{S}$  に対し,

$$\left[ \prod_{i>j} (tz_j + z_i) \right] Z(\mathfrak{S}) \quad (3.2)$$

は  $t$  および  $z_i$  の多項式である. また  $z_i$  に関して対称である.

*Proof.* partition function の定義より, (3.2) は  $t$  および  $z_i$  の多項式である. このため, これが  $z_i$  と  $z_{i+1}$  を交換について不変であることを示せば十分である. すなわち,  $i$  行目と  $i+1$  行目のウェイトを入れ替えた system  $\mathfrak{S}'$  に対し,

$$(tz_i + z_{i+1})Z(\mathfrak{S}) = (tz_{i+1} + z_i)Z(\mathfrak{S}')$$

の成立を示す. system  $\mathfrak{S}$  の  $i$  行目,  $i+1$  行目の左側に  $v_{\Gamma\Gamma}(i, i+1, t)$  を作用させる. これにより, 新しく得られた system のボルツマンウェイトの積は,  $(tz_i + z_{i+1})Z(\mathfrak{S})$  となる. 一方, Figure2 で述べたボルツマンウェイトは Theorem 3.1 の条件を満たしていることから, この新 system に (3.1) を繰り返し用いると, これが system  $\mathfrak{S}'$  の  $i$  行目,  $i+1$  行目の右側に  $v_{\Gamma\Gamma}(i, i+1, t)$  を作用させたものと等しいことがわかる. すなわち, Yang-Baxter 方程式を繰り返し用いた最終の system におけるボルツマンウェイトの積は  $(tz_{i+1} + z_i)Z(\mathfrak{S}')$  であり, 定理の主張が示せた.

Gelfand-Tsetlin pattern の  $ij$  成分に six vertex model の system の  $i$  行の列成分を対応させることにより, 次の補題が得られる.

**Lemma 3.3**  $\lambda$  を dominant とする. すなわち  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots$ . このとき,  $\lambda$  によって決まる six vertex model の system  $\mathfrak{S}_{\lambda,t}$  と top row が  $\lambda + \rho$  の Gelfand-Tsetlin pattern は bijection が成り立つ.

**Lemma 3.4**

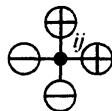
$$\frac{Z(\mathfrak{S}_{\lambda,t})}{\prod_{i < j} (tz_j + z_i)} \quad (3.3)$$

は  $t$  によらない多項式である.

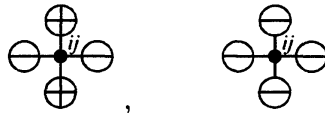
*Proof.* Proposition 3.2 より, (3.2) は因数分解の一意性の成り立つ多項式環  $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_{r+1}, t]$  の元である. 明らかに, (3.2) は  $tz_j + z_i$  ( $i > j$ ) で割り切れ,  $z_i$  に対する対称性からすべての  $tz_j + z_i$  ( $i \neq j$ ) において割り切れる. それらが互いに素であることから, (3.3) が多項式であることは明らかである.

一方,  $t$  に依存しないことについては, 分母と分子の degree が一致することを示せばよい. 分母の  $t$  に対する degree は  $\frac{1}{2}r(r+1)$  である. 分子については, Lemma 3.3 より Gelfand-Tsetlin pattern を対応させると, 分子の  $t$  に対する degree は, top row が  $\lambda + \rho$  の strict な Gelfand-Tsetlin pattern の整数の個数に一致することがわかる. すなわち,  $\frac{1}{2}r(r+1)$  である. 分母と分子の degree が一致することから, (3.3) が  $t$  によらない多項式であることがわかる.

Lemma 3.4 より, (3.3) について, 任意の  $t$  について議論することができる. 以下,  $t = -1$  とおき, 主定理を導く. Lemma 3.3 の対応より,  $t = -1$  の system に対応する Gelfand-Tsetlin pattern は, 任意の  $1 \leq i \leq r+1$  に対し,  $i+1$  行目の整数列から一つ除いた整数列が  $i$  行目に対応する.  $i+1$  行目の  $k$  番目の列の数  $\mu_k$  をそれとする. このとき, Gelfand-Tsetlin pattern に対応する system において,



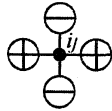
は起こらない. 一方, 次の2つ



は同じウエイト  $(z_i + \alpha_{j+1})$  をもつ. これより, system における  $i$  行目の  $\mu_k$  番目より右からはじまる行については,

$$\prod_{j=0}^{\mu_k-1} (z_i + \alpha_{j+1}) = (z_i | \alpha)^{\mu_k}$$

が成り立つ. また,  $j = \mu_l$  ( $l < k$ ) 番目については,



が対応する。これよりボルツマンウエイトは  $(-1)$  の積となる。以上を総合すると、 $i$  行目については、 $(-1)^{k-1}(z_i|\alpha)^{\mu_k}$  が成立する。

ここで、 $\sigma$  を  $\{1, 2, 3, \dots, r+1\}$  の permutation とし、 $i$  行目から 1 行目の  $\sigma(i)$  を除いたものが  $\lambda_{i+1}$  とする。すなわち、 $\mu_k = (\lambda + \rho)_{\sigma(i)}$  と表す。これにより、次が成り立つ。

$$Z(\mathfrak{S}_{\lambda, -1}) = \pm \sum_{\sigma \in S_{r+1}} (-1)^{l(\sigma)} \prod_i (z_i|\alpha)^{(\lambda+\rho)_{\sigma(i)}} = \pm A_{\lambda+\rho}(\mathbf{z}). \quad (3.4)$$

(3.4) および factorial Schur 関数の定義から、(3.3) が  $\pm s_\lambda(\mathbf{z}|\alpha)$  と等しいことがわかる。最後に符号の決定のため、 $t = 0$ ,  $z_i = 1$  とすると符号が正と定まり、主定理が導かれる。

## 4 応用

Theorem 2.1 の応用として、 $t$  の選び方によって factorial Schur 関数の様々な表示を得ることができる。特に  $t = 0$ ,  $t = \infty$  の場合についてここでとりあげる。

Gelfand-Tsetlin pattern は、 $1 \leq i \leq j \leq r$  に対し、 $p_{i,j} \geq p_{i,j+1}$ ,  $p_{i,j} \geq p_{i+1,j} \geq p_{i,j+1}$  で順序付けされた整数列  $\{p_{ij}\}$  を用いて  $n = r+1$  とすると、次のように表すことができる。

$$\mathfrak{T} = \left\{ \begin{array}{ccccccc} p_{11} & & p_{12} & & \cdots & & p_{1n} \\ & p_{22} & & & & & p_{2n} \\ & & \ddots & & & & \\ & & & p_{nn} & & & \end{array} \right\} \quad (4.1)$$

とくに、 $p_{ii} > p_{i,i+1} > \cdots > p_{in}$  を満たすとき、*strict* な pattern と呼ぶ。また、すべての  $p_{i,j}$  に対して  $p_{i-1,j-1} > p_{i,j}$  が成り立つ場合、これを *special* な Gelfand-Tsetlin pattern と呼ぶ。

Gelfand-Tsetlin pattern  $\mathfrak{T}_{\lambda+\rho}$  に対し、各行 ( $i$ -行とする) から  $\rho_{n-i+1} = (n-i+1, n-i, \dots, 1)$  を引いてできる新しい Gelfand-Tsetlin pattern (top row は  $\lambda$  となる) を  $\mathfrak{T}_\lambda$  とする。例えば、 $\lambda = (4, 2, 0)$ ,  $n = 3$  とすると、Gelfand-Tsetlin pattern として、

$$\mathfrak{T}_{\lambda+\rho} = \left\{ \begin{array}{ccc} 7 & 4 & 1 \\ & 5 & 3 \\ & & 4 \end{array} \right\} \text{ をとることができる。これに対応する } \mathfrak{T}_\lambda \text{ は } \mathfrak{T}_\lambda = \left\{ \begin{array}{ccc} 4 & 2 & 0 \\ & 3 & 2 \\ & & 3 \end{array} \right\}$$

である。こうして得られた  $\mathfrak{T}_\lambda$  に対する shape  $\lambda$  の semi-standard Young tableau を  $T(\mathfrak{T}_\lambda)$  とする。 $T(\mathfrak{T}_\lambda)$  の  $i$ -行、 $j$ -列の成分を  $T(i, j)$  としたとき、 $T^*(i, j) = T(i, j) + j - i$  を  $i$ -行、 $j$ -列

の成分とする semi-standard Young tableau を  $T^*(\mathfrak{T}_\lambda)$  とし,

$$(\mathbf{z}|\alpha)^T = \prod_{(i,j)} (z_{T(i,j)} + \alpha_{T^*(i,j)})$$

と定義する. 例えば, 上の  $\mathfrak{T}_\lambda$  の例では,

$$T(\mathfrak{T}_\lambda) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 2 & & \\ \hline \end{array}, \quad T^*(\mathfrak{T}_\lambda) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 6 \\ \hline 1 & 2 & & \\ \hline \end{array} \quad (4.2)$$

となり,

$$(\mathbf{z}|\alpha)^T = (z_1 + \alpha_1)(z_1 + \alpha_2)(z_1 + \alpha_3)(z_3 + \alpha_6)(z_2 + \alpha_1)(z_2 + \alpha_2)$$

と表される. Macdonald([6]) は, factorial Schur 関数に  $(\mathbf{z}|\alpha)^T$  を用いた組合せ論的表示を与えた.

**Theorem 4.1** ([6])  $\lambda$  を *partition* とする. このとき, 次が成り立つ.

$$s_\lambda(\mathbf{z}|\alpha) = \sum_T (\mathbf{z}|\alpha)^T.$$

本節では, Theorem 2.1 を  $t = 0$  として応用することにより, この別証明を与える.

$t = 0$  とすると, Figure2 より, 状態  $\oplus \oplus \oplus$  に対するボルツマン・ウエイトが 0 となる. すなわち  $\mathfrak{S}_{\lambda,0}$  に対応する Gelfand-Tsetlin pattern  $\mathfrak{T}_{\lambda+\rho}$  は,  $p_{i-1,j-1} = p_{i,j}$  が成り立たない pattern (special Gelfand-Tsetlin pattern) の集合となる.  $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}(\mathfrak{T}_{\lambda+\rho})$  を special な Gelfand-Tsetlin pattern  $\mathfrak{T}_{\lambda+\rho}$  に対応する six vertex model の state とすると,

$$w_0 \left( \prod_{v \in \mathfrak{s}} \beta(v, \mathfrak{s}) \right) = \mathbf{z}^{w_0(\rho)} (\mathbf{z}|\alpha)^T$$

が成り立つ. 両辺をすべての state にわたり和をとると,

$$Z(\mathfrak{S}_{\lambda,0}(w_0(\mathbf{z}), \alpha)) = \mathbf{z}^{w_0(\rho)} \sum_T (\mathbf{z}|\alpha)^T$$

が得られる.  $s_\lambda(\mathbf{z}|\alpha) = s_\lambda(w_0(\mathbf{z})|\alpha)$  なので, Theorem 2.1 から

$$s_\lambda(\mathbf{z}|\alpha) = \frac{Z(\mathfrak{S}_{\lambda,0}(w_0(\mathbf{z}), \alpha))}{\prod_{i < j} w_0(\mathbf{z})_i} = \frac{\mathbf{z}^{w_0(\rho)} \sum_T (\mathbf{z}|\alpha)^T}{\mathbf{z}^{w_0(\rho)}} = \sum_T (\mathbf{z}|\alpha)^T$$

となり, McDonald の定理が導かれる.

次に,  $t = \infty$  として得られる結果について述べる.

$x_1, \dots, x_{n+m}$  および  $y_1, \dots, y_{n+m}$  をパラメータとする.  $x_i$  ( $1 \leq i \leq n+m$ ) の関数  $f$  に対し, divided difference operator を次で定義する.

$$\partial_i f(x_1, \dots, x_{n+m}) = \frac{f - s_i f}{x_i - x_{i+1}}.$$

なお,  $s_i f$  は  $x_i$  と  $x_{i+1}$  を入れ替えることによって得られる関数とする.  $w \in S_{n+m}$  とし,  $w$  が simple reflection の積 (reduced expression)  $w = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$  で表されたとする. このとき,  $\partial_w = \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k}$  は,  $\partial_i$  が braid relation を満たすことから well-defined である.  $w_0$  を  $S_{n+m}$  の long element とするとき, double Schubert polynomial は次で定義される ([5]):

$$\mathfrak{S}_w(x, y) = \partial_{w^{-1}w_0} \left( \prod_{i+j \leq n+m} (x_i - y_j) \right).$$

**Theorem 4.2** [3, Theorem 6] factorial Schur 関数は double Schubert polynomial に等しい. すなわち, 次が成り立つ:

$$\mathfrak{S}_{w_\lambda}(x, y) = s_\lambda(x| - y).$$

次に, 組合せ論的表現である staircase の定義を述べる. partition  $\lambda$  に対し,  $\lambda'$  をその conjugate partition とする. staircase は, shape  $(\lambda_1 + n, \lambda_1 + n - 1, \dots, \lambda_1)'$  で, box を  $\{1, 2, \dots, \lambda_1 + n\}$  で埋めた semi-standard Young tableau で, 対角成分が南東方向に従って弱減少していくものと定義する. 例えば,  $\lambda = (5, 4, 1)$  の staircase として, 次の例が考えられる.

|   |   |   |   |  |
|---|---|---|---|--|
| 8 |   |   |   |  |
| 7 | 8 |   |   |  |
| 6 | 7 | 8 |   |  |
| 5 | 6 | 6 | 7 |  |
| 4 | 5 | 5 | 5 |  |
| 3 | 3 | 3 | 4 |  |
| 2 | 2 | 2 | 3 |  |
| 1 | 1 | 1 | 1 |  |

**Lemma 4.3** [3, Proposition 1]  $\lambda$  を dominant とする. すなわち  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots$ . このとき,  $\lambda$  によって決まる six vertex model の system  $\mathfrak{S}_{\lambda,t}$  と一番右側の列の box に  $\lambda + \rho + (1)^n$  の成分を含まない 1 から  $\lambda_1 + n$  の間の数が入る staircase には bijection が成り立つ.

[5, Theorem 1]において, Lascoux は, double Schubert polynomial を staircase を用いて表した. これを Lemma 4.3 の bijection を用いると, 次のように表す事ができる.

**Theorem 4.4** Figure1において,  $v_{\Gamma}(i, j, t)$  のボルツマンウエイトを左から順に  $1, 1, 1, -z_i/\alpha_{j+1} - 1, z_i/\alpha_{j+1}, 1$  とした system を  $\mathfrak{S}'_{\lambda, \infty}$  とする. このとき, 次が成り立つ:

$$Z(\mathfrak{S}'_{\lambda, \infty}(\mathbf{z}, \alpha)) = \frac{\mathbf{z}^{\rho}}{(-\alpha)^{(\lambda+\rho)'}} s_{\lambda}(\mathbf{z}|\alpha).$$

ここでは, Lascoux の定理と同値であるこの定理を Theorem 2.1 を用いて証明する.

*Proof.* Theorem 2.1 で与えられた Tokuyama-type formula の両辺を  $t$  で割る:

$$\prod_{i < j} \left( \frac{z_i}{t} + z_j \right) s_{\lambda}(\mathbf{z}|\alpha) = \frac{Z(\mathfrak{S}_{\lambda, t})}{t}.$$

右辺は, Figure1 においてボルツマンウエイトを左から順に  $1, z_i/t - \alpha_{j+1}, 1, z_i + \alpha_{j+1}, z_i(1 + 1/t), 1$  とした system  $\mathfrak{S}_{\lambda, t}^*$  と同値であり, 次で書ける.

$$\prod_{i < j} \left( \frac{z_i}{t} + z_j \right) s_{\lambda}(\mathbf{z}|\alpha) = Z(\mathfrak{S}_{\lambda, t}^*). \quad (4.3)$$

(4.3) の両辺について  $t \rightarrow \infty$  とすると

$$\mathbf{z}^{\rho} s_{\lambda}(\mathbf{z}|\alpha) = Z(\mathfrak{S}_{\lambda, \infty}^*).$$

これをさらに両辺を  $-\alpha$  で割る. すなわち, 右辺については, Figure1 においてボルツマンウエイトを左から順に  $1, 1, 1, -z_i/\alpha_{j+1} - 1, z_i/\alpha_{j+1}, 1$  とした system  $\mathfrak{S}'_{\lambda, \infty}$  と同値であり, 定理を導くことができる.

**謝辞** 本研究の一部は科学研究費(研究活動スタート支援, 課題番号 23840035)の助成を受けた. また, 津田塾大学数学・計算機科学研究所から研究所員として援助を受けた. ここに記して謝意を表す.

## References

- [1] B. Brubaker, D. Bump, and S. Friedberg, Schur polynomials and the Yang-Baxter equation. *Comm. Math. Phys.*, (2010).
- [2] D. Bump and M. Nakasuji, Integration on  $p$ -adic groups and crystal bases, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 138 (2010), 1595-1605.

- [3] D. Bump and M.Nakasuji, P.J.McNamara Factorial Schur functions and the Yang-Baxter equation, Preprint (2012)
- [4] W. Casselman, The unramified principal series of  $\mathfrak{p}$ -adic groups. I. The spherical function, *Compositio Math.*, 40(3) (1980), 387-406.
- [5] A. Lascoux, The 6 vertex model and Schubert polynomials, *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.* (2007)
- [6] I. G. Macdonald, Schur functions: theme and variations. In *Seminaire Lotharingien de Combinatoire (Saint-Nabor, 1992)*, volume 498 of *Publ. Inst. Rech. Math. Av.*, Univ. Louis Pasteur, Strasbourg (1992), 5-39.
- [7] S. Okada, Alternating sign matrices and some deformations of Weyl's denominator formula, *J. Algebraic Comb.* 2(1993), 155-176.
- [6] T. Tokuyama, A generating function of strict Gelfand patterns and some formulas on characters of general linear groups, *J. Math. Soc. Japan*, 40 (4) (1988), 671-685.

*E-mail address:* nakasuji@kitasato-u.ac.jp