

二相境界の量子揺らぎと振動場における量子核生成

京都大学理学部物理学教室

小貫 明

1 液滴に対する Hamiltonian

超低温ヘリウムにおける相分離現象は大変興味深い [1-4]。そこでは核生成がもはや熱揺らぎとしとは起こらず、量子的なトンネル現象としで起こる。実験 [3,4] はこのことを示している。Lifshitz-Kagan[1] は準安定状態のヘリウムにおける液滴 (droplet) の半径 R を量子力学的変数と考えて次のような Hamiltonian を仮定した。

$$H = 2\pi\rho_{eff}R^3\dot{R}^2 + 4\pi\sigma R^2 - \frac{4\pi}{3}\mu_{eff}R^3 \quad (1)$$

ここで ρ_{eff} はある質量密度、 $\dot{R} = \partial R / \partial t$ は半径の変化率、 σ は表面張力、 μ_{eff} は二相間の実効的な化学ポテンシャルである。始めの項は液滴の周りの流体の運動エネルギーに等しい。後の二つの項は核生成理論でお馴染みの液滴を作るのに必要な自由エネルギーである。特に He4 における超流動ヘリウムと固体ヘリウムの共存圧力 $P_{cx} = 25 \text{atm}$ 近くでは、液体のまま圧力 P が P_{cx} を超えると液体は準安定になる。ここでは固体の球状ドメインに対して [1]

$$\rho_{eff} = (\rho_s - \rho_l)^2 / \rho_l \quad (2)$$

$$\mu_{eff} = (\rho_s / \rho_l - 1)(p - p_{cx}) \quad (3)$$

ここで ρ_s と ρ_l は固体と液体の質量密度である。一方 He3-He4 系では準安定な He4-rich 相の中に He3-rich 相の液滴ができて

$$\rho_{eff} = (1 + \beta)(\Delta\rho_3)^2 / \rho_3 + (\rho_4 + \beta\Delta\rho_3)^2 / (\rho_4 - \beta\rho_3) \quad (4)$$

ここで $\Delta\rho_3 = \rho'_3 - \rho_3$ と $\Delta\rho_4 = \rho'_4 - \rho_4 \cong -\rho_4$ は二相間の He3 と He4 の密度の差である。プライムをつけない量は He4-rich 相での値であり、つけた量は He3-rich での値である。 $\beta + 1$ は He3 の He4-rich 相での有効質量 m_3^* と裸の質量 m_3 の比である。即ち $\beta = m_3^* / m_3 - 1 \cong 1.4$ 。また

$$\mu_{eff} = A_{34}[\delta c - \left(\frac{\partial c}{\partial p}\right)_{cx} \delta p_{\infty}] \quad (5)$$

ここである基準共存状態を考え δc_{∞} は He3 質量濃度のずれ、 δp_{∞} は圧力のずれである (ともに液滴から遠く離れた場所での値)。 $(\partial c / \partial p)_{cx}$ は共存線上での微分であり、係数 A_{34} については

$$A_{34} = (\Delta\rho_3)\left(\frac{\partial\mu_3}{\partial c}\right)_p + (\Delta\rho_4)\left(\frac{\partial\mu_4}{\partial c}\right)_p \quad (6)$$

低圧では $A_{34} = 2 \times 10^6 \text{ erg/cm}^3$ であり $(\partial c / \partial p)_{cx} = 0.5 \times 10^{-2} \text{ atom}^{-1}$ である。He4 の場合に比較して He3-He4 の場合は ρ_{eff} が驚くべきことに4桁以上大きい。上式は著者が導いたが [5,6], 文献2に示されていた結果と一致していた。著者には文献2がさっぱり理解できないので考え直してみたのであった。

2 二相境界の量子揺らぎ

次に平衡状態において二相が共存しているとする。二相境界面は重力方向 (z 軸方向) と垂直とする。面の変位 $\zeta(x, y)$ の揺らぎを考えよう。小さい変位に対して良く知られているようにエネルギーは次の様に増加する。

$$H_{dis} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r}_\perp [\sigma (\nabla_\perp \zeta)^2 + g(\Delta\rho) \zeta^2] \quad (7)$$

ここで σ は表面張力, g は重力加速度, $\Delta\rho$ は二相間の密度の差である。 $\mathbf{r}_\perp = (x, y)$ は面上の位置であり, 積分は x, y 平面上でおこなう。 $\nabla_\perp$ は面上での空間微分である。しかし超低温では変位の運動エネルギーも重要である。このことは Lifshitz-Kagan 理論の教えるところである。以下では $\dot{\zeta}$ を ζ の時間微分として

$$H_{ki} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r}_\perp \int d\mathbf{r}'_\perp G(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp) \dot{\zeta}(\mathbf{r}_\perp) \dot{\zeta}(\mathbf{r}'_\perp) \quad (8)$$

ここで $G(r)$ は積分核であって

$$G(r) = \rho_{ca} \frac{1}{2\pi r} \quad (9)$$

で与えられる。 ρ_{ca} は表面波にでてくる密度である。全 hamiltonian $H = H_{dis} + H_{ki}$ をフーリエ変換してみると

$$H = \frac{1}{2} (2\pi)^{-2} \int d\mathbf{k} [(\rho_{ca}/k) \dot{\zeta}_{\mathbf{k}} \dot{\zeta}_{-\mathbf{k}} + (\sigma k^2 + g(\Delta\rho)) \zeta_{\mathbf{k}} \zeta_{-\mathbf{k}}] \quad (10)$$

かくして $\zeta_{\mathbf{k}}$ は調和振動子であり, その量子化は

$$p_{\mathbf{k}} \equiv \partial H / \partial \dot{\zeta}_{-\mathbf{k}} = (\rho_{ca}/k) \dot{\zeta}_{\mathbf{k}} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \zeta_{-\mathbf{k}}} \quad (11)$$

のように運動量 $p_{\mathbf{k}}$ を微分オペレータで置き換えればよい。その固有周波数は表面波の振動周波数であり次の式で与えられる。

$$\omega_{\mathbf{k}}^2 = (\sigma/\rho_{ca}) k^3 + g(\Delta\rho/\rho_{ca}) k \quad (12)$$

平衡状態は Boltzmann 分布であるから変位の平衡揺らぎは次のようになる。

$$S_{\mathbf{k}} = \langle \zeta_{\mathbf{k}} \zeta_{-\mathbf{k}} \rangle = \frac{1}{2} [(\hbar\omega_{\mathbf{k}})/(\sigma k^2 + g(\Delta\rho))] \coth(\hbar\omega_{\mathbf{k}}/2k_B T) \quad (13)$$

実際に高温極限 $\hbar\omega_k \ll 2k_B T$ では古典的表式が得られる。

$$S_k = k_B T / [\sigma k^2 + g(\Delta\rho)] \quad (14)$$

低温極限 $\hbar\omega_k \gg 2k_B T$ では基底状態での量子揺らぎとして

$$S_k = \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{k}{\rho_{ca}(\sigma k^2 + g(\Delta\rho))}} \quad (15)$$

が得られる。重力を無視すれば 高温では $S_k \propto 1/k^2$ であり低温では $S_k \propto 1/k^{1/2}$ となる。この結果は大変基本的なものであるが誰もまだ過去に導いていないように思う（発表準備中）。将来において散乱実験などの手段によって二相界面の量子揺らぎが確認できれば面白い。ここでの結果以外にも様々な問題が将来の宿題として考えられる。

さて質量密度 ρ_{ca} について、He4 の 固体-液体の場合は 式 (2) の ρ_{eff} と一致しているが、He3-He4 の場合には次の表式が得られる [6]。

$$\rho_{ca} = \rho + \rho' - 4 / \left[\frac{1+\beta}{\rho_3} + \frac{\beta^2}{\rho_4 - \beta\rho_3} + \frac{1}{\rho_3'} \right] \quad (16)$$

第一節では液中での速度場はないとしたが、He3-He4 の表面波においては両相で速度場ができるので ρ_{ca} と ρ_{eff} は違ってくる。

3 高周波場のもとでの量子核生成

Ivlev-Melnikov[7] は Josephson Junction などに高周波電場（マイクロ波）を照射した時に核生成率 J が大幅に増加しうることを見いだしている。私は超低温の準安定ヘリウムに、高周波の音波やマイクロ波を照射すると同様な J の増加が期待できないか考えた [5,6]。音波のもとでは Lifshitz-Kagan Hamiltonian (1) での μ_{eff} が定常部分 $\bar{\mu}_{eff}$ と振動部分に分けられる。

$$\mu_{eff} = \bar{\mu}_{eff} [1 + \varepsilon \cos(\omega t)] \quad (17)$$

電場のもとでは液滴の周りに dipole 場が出来る。その余分のエネルギーは次のように液滴の体積 ($\propto R^3$) に比例している。

$$H_E = \frac{1}{18\epsilon_0} (\epsilon_0 - \epsilon_i)^2 R^3 E(t)^2 \quad (18)$$

ここで ϵ_0 は液滴の外の誘電率であり、 ϵ_i は液滴の内の誘電率である。かくして電場の場合も音波の場合と同じく式 (17) が使える。

上式のような振動場がある時に WKB 近似によって量子核生成率 J を計算する。 J に対する振動場の効果は、 ω があるトンネル時間 τ_s の逆数を超えると大きくなる。まず Action ($\propto \ln J$) を ε の一次まで計算すると $\omega\tau_s > 1$ において

$$J = J_0 \exp \left[- \left(\frac{25\pi}{64\sqrt{2}\hbar_{eff}} \right) \left\{ 1 - A_2 \varepsilon (\omega\tau_s)^{-3} e^{\omega\tau_s} \right\} \right] \quad (19)$$

ここで $A_2 = 9\pi^2/5 = 17.8$. $\hbar_{eff}$ は無次元化されたプランク定数である。指数因子 $\exp(\omega\tau_s)$ のため $\omega\tau_s$ が 1 を超えると、 ε がいかに小さくとも振動場の効果は無視できなくなる。 $\omega\tau_s \gg 1$ の極限では式 (19) は使えなくなり次の核生成率が得られる。

$$J = J'_0 \exp\left[-\frac{4}{\hbar\omega} U_{max} \ln(\omega\tau_s/A_3\varepsilon^{1/2})\right] \quad (20)$$

ここで J'_0 はミクロな定数であり $A_3 = 9\pi(3e)^{1/2}/8 = 10.1$. さらに $U_{max} = \frac{4}{3}\pi\sigma R_c^2$ はポテンシャル (式 (1) の後の二つの項) の最大値である (R_c は臨界半径)。式 (20) は振動場によって大きなエネルギーが液滴に与えられポテンシャルの山が乗り越えられる確率を表している。式 (20) が振動場の無次元化された大きさ ε に比較的弱くしか依存していないことに注意する。実際に式 (20) を観測するためには ω を大きくすることが重要であり、He3-He4 では $\omega > 10^{10}/\text{sec}$ が要求される。

以上においてヘリウム系を考えたが、詳しくは私の論文を見てください。面白いことに同様な結論が異方的な磁性体に対しても導ける [6]。こちらの系のほうが実験は容易かもしれない。

参考文献

- [1] I.M. Lifshitz and Yu. Kagan: Zh. Eksp. Teor. Fiz. **62** (1972) 385 [[Sov. Phys. JETP **35** (1972) 206]].
- [2] I.M. Lifshitz, V.M. Polesskii and W.A. Khokholov: Zh. Eksp. Teor. Fiz. **74** (1978) 268 [[Sov. Phys. JETP **47** (1972) 206]].
- [3] T. Satoh, M. Morishita, M. Ogata and S. Katoh: Phys. Rev. Lett. **69** (1992) 335.
- [4] V.A. Maidanov, V.A. Mikheev, N.P. Mikhin, N.F. Omelaenko, É. Ya. Rudavskii, V.K. Chagovets and G.A. Sheshin: Sov. J. Low Temp. Phys. **18** (1992) 663 [Fiz. Nizk. Temp. **18** (1992) 943].
- [5] A. Onuki, J. Phys. Soc. Jpn. **63** (1994) 1245.
- [6] A. Onuki, preprint and in preparation.
- [7] B.I. Ivlev and V.I. Mel'nikov; Sov. Phys. JETP **63** (1986) 1295 [Zh. Eksp. Teor. Fiz. **90** (1986) 2208]; in *Quantum Tunnelling in Condensed Media*, eds. by Yu. Kagan and A.J. Leggett (Elsevier Science Publishers B.V., 1992).