

状態の ε - エントロピー とフラクタル次元

東京理科大学理工学部 大矢雅則

0. はじめに

フラクタル幾何学はある系（図形）の複雑さを解析する一つの方法として考え出されたもので、フラクタルという言葉は“不規則な”，“半端な”といった意味を持つ言葉である[1]。海岸線や無数に枝別れしていく川の形のような図形に対し，その複雑さを定量的に表す量として，様々なフラクタル次元が定義されている[1, 2, 3]。これらは，通常の次元（自由度の数）が整数値をとるのに対して，非整数値をとることがその特徴である。このようなフラクタル次元の一つに容量次元と言われるものが考えられており，それは ε - エントロピーを基にして定められている。

ところで，物理系は，古典系でも量子系でも，状態の変化によって記述されている。すなわち，状態という概念を使って，物理系の在り様を表現することができる。そこで，古典系も量子系も特殊な場合として含んでいる一般的な力学系において，その系の状態の ε - エントロピーを定め，それをもとにして，状態の複雑さを解析するための新たな指標となるフラクタル次元（容量次元の一種の拡張）を導入することが興味ある問題になる。ただし，そうした一般論は数学的に見てかなり複雑であるから，この報告では，一般論は考え方を中心にできるだけ簡単に述べることにし，その特殊な場合である古典離散系の議論を詳しく行うつもりである。

第一節では，通常のフラクタル次元の一つである容量次元の定義を少々整理して与える。内容的には本論文の主たる部分である第二節では，一般的な力学系の状態（これを以下一般状態という）の ε - エントロピーと新たなフラクタル次元の定式化について説明する。この節の議論は，一般状態のエントロピーや相互エントロピーがその基礎であり，前述したように，ややこみいってくるので，詳しい定義や証明は他の論文に譲り，定式化の筋道について簡単に記すことにする。従って，この二節を飛ばして読んでも以下の節の理解には支障はない。第三節では，第二節でエッセンスのみを説明した概念を特殊な場合である古典離散系において詳しく説明し直し，新たなフラクタル次元の役割について考える。

1. 容量次元

この節では，二つのフラクタル次元の定義を述べ，その有用性について説明する。複雑な図形に内在する自己相似性に注目し，その複雑さを定量的に示す

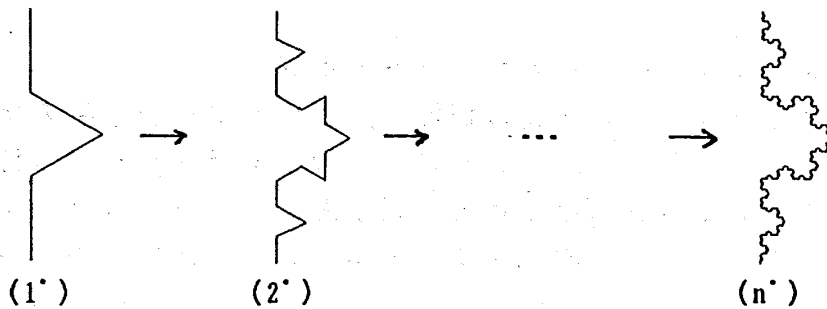
フラクタル次元として広く使われているものに次の尺度次元（とここでは呼ぶ）がある。

〔尺度次元〕ある（複雑な）図形 X を尺度 1 でみたときの基本図形の個数を $N(1)$ とし、尺度 r でみたときのそれを $N(r)$ とする。このとき、尺度次元を

$$d_s(X) \equiv \log \frac{N(r)}{N(1)} / \log \frac{1}{r} \quad (1.1)$$

で定義する。

ここで、代表的なフラクタル図形であるコッホ曲線（図1.1）の尺度次元 d_s を計算してみる。



（図1.1）

コッホ曲線の構成ステップ： $(1') \rightarrow (2') \rightarrow \dots \rightarrow (n')$ とステップが進ぐと、曲線は折り曲げられていく。このステップを限りなく続けていくと、到るところ折り曲がった微分不可能な曲線が出来上がる。これをコッホ曲線という。

コッホ曲線を尺度 1 でみると、（図1.1）のステップ $(1')$ のように見えるが、この $(1')$ の図を基本図形と考えると、尺度 $1/3$ でみた $(2')$ では、 $(1/3$ に縮小された）基本図形が 4 個見える。従ってスケーリング次元は、

$$\begin{aligned} d_s &= \log \frac{4}{1} / \log \frac{1}{1/3} \\ &= \frac{\log 4}{\log 3} = 1.26\dots \end{aligned}$$

となる。

〔容量次元〕コンパクトな集合 X ($\subset \mathbb{R}^d$) を 1 辺（直径）の長さが ε のある凸集合で被覆するのに必要なこの凸集合の最小個数を $N(\varepsilon)$ とする。このとき、容量次元 $d_c(X)$ を

$$d_c(X) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log (1/\varepsilon)} \quad (1.2)$$

で定義する。

上の定義における $\log N(\varepsilon)$ は ε -エントロピーと呼ばれている量である [4]。では、先ほどのコッホ曲線に対して容量次元を求めてみよう。 n ステップ目のコッホ曲線を直径 $(1/3)^n$ ($n=1, 2, \dots$) の円で覆うとすると、

$$\text{直径 } \varepsilon = (1/3)^n \Rightarrow N(\varepsilon) = 4^n$$

となる。よって、

$$d_c = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \log 4^n / \log \left(\frac{1}{(1/3)^n} \right) \right\} = \frac{\log 4}{\log 3}$$

以上のように、コッホ曲線では尺度次元も容量次元も $\log_3 4$ となり、直線のユークリッド次元 1 よりも大きいことが分かる。さらに、他の多くのフラクタル図形においても尺度次元と容量次元は一致する。この種のフラクタル次元を用いるとユークリッド次元では区別できない図形の複雑さを定量的に特徴付けられ、それによって図形を分類できるように思えるのである。

2. 一般的状态の ε -エントロピーとフラクタル次元

複雑な図形に対するフラクタル次元の類推で、この節では力学系の状態のフラクタル次元を定める。すなわち、ほとんどの古典系や量子系をその特殊な場合として含む一般的な力学系における状態に対する ε -エントロピーをまず定式化し、それを使ってフラクタル次元を導入する。この一般的な力学系は通常 C^* -力学系と呼ばれ、三組 $(\mathfrak{A}, \mathfrak{G}, \alpha(R))$ で表されている。すなわち、 $\mathfrak{A}$ は C^* 代数でその自己共役要素が物理量に対応し、 $\mathfrak{G}$ は $\mathfrak{A}$ 上の状態、つまり、正值線形汎関数の全体、 $\alpha_t (t \in \mathbb{R})$ は系の力学的変化を記述する $\mathfrak{A}$ から $\mathfrak{A}$ へのある種の連続性を持った写像である。この C^* 力学系の詳細は文献 [4, 5] で詳しく説明してある。

<2.1>一般状態の ε -エントロピー

さて、一般的な状態 φ の ε -エントロピーの定式化について論じよう。そのためにまず、一般状態 φ に関するエントロピーと相互エントロピーが必要になるが、これらに関しては総合報告 [6, 7] を参照してもらいたい。

von Neumann によって導入された密度作用素（以下これを ρ で表す）に関するエントロピー $S(\rho) = -\text{tr} \rho \log \rho$ は本来ある決まった Hilbert 空間の上で定められているものであるから、相転移などの対称性の変化が起きる物理系ではあまり都合のいいものではない。そこで、一般状態 φ に関するエントロピーを定めることが必要になるが、このエントロピーは状態 φ のもつ不確定性（情報量）をどういった基準から測るかに依っており、その基準は $\mathfrak{G}$ の弱*コンパクトな凸部分集合 $\mathfrak{S}$ で表され、従って、 $\mathfrak{S}$ から測った φ のエントロピーは記号

$$S^{\mathfrak{S}}(\varphi)$$

で表されている。なお、集合 $\mathfrak{S}$ としては、 $\mathfrak{G}$ それ自体とか α に関する定常状態の全体、あるいは平衡状態（KMS 状態）の全体などが考えられる。特に、 $\mathfrak{S} = \mathfrak{G}$ のときは上の φ のエントロピーは単に $S(\varphi)$ で表す。 φ が密度作用素 ρ に等しいとき、このエントロピー $S(\varphi)$ は von Neumann エントロピーに一致していることがわかる。

ところで、状態の変化を記述するかなり一般的な変換をチャンネルとよぶ。つまり、チャンネル Λ^* とは $\mathcal{G}$ から $\mathcal{G}$ への写像で、その共役写像 Λ が $\mathcal{A}$ から $\mathcal{A}$ へ（より一般的には二つの C^* 力学系の間）の完全正写像である。状態 $\varphi \in \mathcal{S}$ がこのチャンネル Λ^* によって、状態 $\Lambda^*\varphi$ に変化したとき、状態 φ の有する情報のうち $\Lambda^*\varphi$ へ伝わった情報量を表す相互エントロピーは、 φ と $\Lambda^*\varphi$ の相関を示す合成状態を使って定められるが、ここではそれを記号

$$I^{\mathcal{S}}(\varphi; \Lambda^*)$$

で表す。なお、 $\mathcal{S} = \mathcal{G}$ のときは、エントロピーと同様、この相互エントロピーを $I(\varphi; \Lambda^*)$ と書くことにする。状態 φ が密度作用素 ρ で与えられる通常の量子系においては、 ρ の Schatten 分解 [4, 8] を

$$\rho = \sum \lambda_n E_n$$

とすると、 ρ と $\Lambda^*\rho$ に関する二つの合成状態は

$$\Phi_E = \sum \lambda_n E_n \otimes \Lambda^* E_n, \quad \Phi_\theta = \rho \otimes \Lambda^* \rho$$

となり、相互エントロピー $I(\rho; \Lambda^*)$ は

$$I(\rho; \Lambda^*) = \sup \{ S(\Phi_E | \Phi_\theta); E = \{E_n\} \}$$

で与えられる。ただし、 $S(\Phi_E | \Phi_\theta) = \text{tr} \Phi_E (\log \Phi_E - \log \Phi_\theta)$ である。

さて、この相互エントロピーを使って ε -エントロピーを定めるのであるが、そのために、チャンネルの集合全体を $\mathcal{C}$ とおき、状態 φ とチャンネル Λ^* に関する集合を二つ考えておく。

$$\mathcal{C}_1(\Lambda^*; \varphi) = \{ \Gamma^* \in \mathcal{C}; \Gamma^* \varphi = \Lambda^* \varphi \},$$

$$\mathcal{C}_2(\varphi; \varepsilon) = \{ \Lambda^*; \| \varphi - \Lambda^* \varphi \| \leq \varepsilon \}.$$

状態 $\varphi \in \mathcal{S}$ の ε -エントロピーは

$$S^{\mathcal{S}}(\varphi; \varepsilon) = \inf \{ J^{\mathcal{S}}(\varphi; \Lambda^*); \Lambda^* \in \mathcal{C}_2(\varphi; \varepsilon) \} \quad (2.1)$$

で与える。ここで、

$$J^{\mathcal{S}}(\varphi; \Lambda^*) = \sup \{ I^{\mathcal{S}}(\varphi; \Gamma^*); \Gamma^* \in \mathcal{C}_1(\Lambda^*; \varphi) \} \quad (2.2)$$

であり、これは状態 φ に関する同値なチャンネルに対してとった最大情報量である。可換系の場合、この ε -エントロピー (2.1) は Kolmogorov のそれに一致することが示せる。

<2.2>一般状態のフラクタル次元

上記の ε -エントロピーを使い第一節の容量次元に関わる三つのフラクタル次元を導入する。

最初の次元は容量次元の一般状態への直接的な拡張で

$$d_{\mathcal{C}}^{\mathcal{S}}(\varphi; \varepsilon) = S^{\mathcal{S}}(\varphi; \varepsilon) / \log(1/\varepsilon) \quad (2.3)$$

$$d_{\mathcal{C}}^{\mathcal{S}}(\varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d_{\mathcal{C}}^{\mathcal{S}}(\varphi; \varepsilon) \quad (2.4)$$

と定める。この (2.4) を一般状態 φ の $\mathcal{S}$ に関する ((2.3) はオーダー ε の) 容量次元 (より簡単に、量子状態の容量次元) と呼ぶ。

さらに、情報量の伝送に絡むものとして、次元

$$d(\varphi; \varepsilon) = S(\varphi; \varepsilon) / I(\varepsilon) \quad (2.5)$$

を定める。ここで、 $I(\varepsilon)$ は $\varepsilon \rightarrow 0$ で(2.5)式を規格化する関数で、多くの場合 $I(\varepsilon) = S(\varphi)$ となる。この次元(2.5)をオーダー ε の情報次元と呼ぶ。

これらの次元と ε -エントロピー $S(\varphi; \varepsilon)$ を使うことによって状態の分類が可能であると考えられ、次元に関する数学的結果もいくつか得られているが、数学的準備がさらに必要なのでここでは割愛し、より具体的な力学系において話を進めることにしよう。

その前に、一般状態 φ で議論をする意義についてまとめておこう。

(1)ほとんどの量子系状態も古典系状態も含んでいる。(2)エントロピー $S(\varphi)$ 同様ヒルベルト空間を離れて定式化されているので、相転移等への適用が可能である。(3)(2)とともに、様々な状態の複雑さに関する一つの指標を与えることが可能である。

3. 古典離散系の状態の ε -エントロピーとフラクタル次元

この節では、第二節で述べた一般状態の ε -エントロピーとフラクタル次元の概念を古典離散系において詳しく論ずることにする。

<3.1>状態の ε -エントロピー

n 個の元からなる集合 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ と、その各元の生起する確率分布 $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ ($\sum p_i = 1, p_i \geq 0$)の組 (X, P) を完全事象系という。離散的な古典系はこの完全事象系 (X, P) で表せると考えられるので、以後この確率分布のことを状態と呼ぶことにする。

古典離散系 (X, P) において、系のもつ情報量であるエントロピー $S(X)$ は

$$S(X) \equiv -\sum_i p_i \log p_i$$

で与えられる。

ここで、2つの事象系 $X = \{x_i; i=1, \dots, n\}$ と $Y = \{y_j; j=1, \dots, m\}$ を考え、それぞれの状態を $P = \{p_i; i=1, \dots, n\}$ 、 $Q = \{q_j; j=1, \dots, m\}$ とし、さらに複合事象系 $X \times Y$ の合成状態(同時確率分布)を $\Phi = \{r(i, j); 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ とする。このとき、 Y を観測することによって得られる X の情報量である相互エントロピー $I(X, Y)$ は次のように定義されている。

$$I(X, Y) \equiv \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r(i, j) \log \frac{r(i, j)}{p_i \times q_j} \quad (3.1)$$

事象系 X と Y の間に相関がない、つまり、互いに独立なとき、 X と Y の同時確率分布 $r(i, j)$ は $r(i, j) = p_i \times q_j$ となることから、この相互エントロピー $I(X, Y)$ は X の状態 P と Y の状態 Q の間にどれほど相関があるか、言い換えると、状態 P の情報量のうちどれほどが正確に状態 Q に伝達されているかを表す量ということになる。このように相互エントロピーは二つの系を結ぶ量であるから

系の変化を見る際に役に立つのである。なお、以下では簡単のため $n = m < +\infty$ とする。

ところで、同時確率分布 $r(i, j)$ は

$$\sum_j r(i, j) = p_i, \quad \sum_i r(i, j) = q_j$$

を満たす系 $X \times Y$ の状態であるから、この種の状態の集合を $\mathcal{P}(P, Q)$ で表すことにすると、(3.1)の相互エントロピーは P, Q と Φ の関数であるから、

$$I(X, Y) = I(P, Q; \Phi)$$

と表すことができる。

ここで、2つの状態 P と Q の極大相互エントロピー $J(P, Q)$ を次のように定義する。

$$J(P, Q) \equiv \sup \{ I(P, Q; \Phi); \Phi \in \mathcal{P}(P, Q) \}. \quad (3.2)$$

これは、有限な事象系においては

$$J(P, Q) \equiv S(P) + S(Q) - \inf \{ S(\Phi); \Phi \in \mathcal{P}(P, Q) \}$$

としても同じである。この $J(P, Q)$ に関して次のことがいえる。

<補題 3.1> 状態 P, P' に対して $P \simeq P'$ ならば、任意の状態 Q に対して

$$J(P, Q) = J(P', Q)$$

である。但し、 $P \simeq P'$ とは状態を構成している成分(確率)が集合として等しい、つまり、 P の成分は P' のその置換になっている場合を意味する。

(証明) $P = \{p_1, \dots, p_n\}$, $P' = \{p'_1, \dots, p'_n\}$ とする。このとき、

$(1, 2, \dots, n)$ の適当な置換 π を選ぶと、 $P' = \{p_{\pi(1)}, \dots, p_{\pi(n)}\}$ と表すことができる。極大相互エントロピー

$J(P, Q) = S(P) + S(Q) - \inf \{ S(\Phi); \Phi \in \mathcal{P}(P, Q) \}$ において、 $\inf S(\Phi)$ を与える合成状態 Φ を $\{r(i, j)\}$ とする。このとき、 $r'(i, j) = r(\pi(i), j)$ とおくと、 $\{r'(i, j)\}$ は P' と Q の合成状態の1つとなる。よって、

$$J(P, Q) \geq J(P', Q). \quad (3.3)$$

逆に、 $J(P', Q)$ を定める P' と Q の合成状態が $\{r'(i, j)\}$ であるとき、 $r(i, j) = r'(\tau(i), j)$ とおくと、 $\{r(i, j)\}$ は P と Q の合成状態の一つになるから

$$J(P', Q) \geq J(P, Q). \quad (3.4)$$

式(3.3)と(3.4)より $J(P', Q) = J(P, Q)$. ■

二つの状態間の極大相互エントロピーと2つの状態 $P = \{p_i\}$, $Q = \{q_i\}$ の距離 $\|P - Q\|$ を用いて、状態の ε -エントロピーを以下のように定める。

$$S(P; \varepsilon) \equiv \inf \{ J(P, Q); Q \in \mathcal{G}(P; \varepsilon) \}. \quad (3.5)$$

ここで、状態間の距離を

$$\|P - Q\| \equiv \sum_i |P_i - Q_i|. \quad (3.6)$$

ととり、

$$\mathcal{G}(P; \varepsilon) \equiv \{Q; \|P - Q\| \leq \varepsilon\} \quad (3.7)$$

とする。

相互エントロピーは2つの状態の間でどれくらい情報が正しく伝達されたかを表す量であるから、この ε -エントロピー $S(P; \varepsilon)$ は、距離 ε に対する P のもつ情報量の伝達程度を表すと考えられる。従って、 $S(P; \varepsilon)$ の ε に対する変化を調べることによって、エントロピー $S(P)$ と同様、状態 P のもつある種の複雑さを調べることができるはずである。

さて、 $S(P; \varepsilon)$ の定義では $\mathcal{G}(P; \varepsilon)$ で下限をとることを考えたが、ここで、 $\|P - Q\| = \varepsilon$ となる状態 Q の集合を考える：

$$\mathcal{G}_m(P; \varepsilon) \equiv \{Q; \|P - Q\| = \varepsilon\} \quad (3.8)$$

そこで、境界(marginal)の ε -エントロピー $S_m(P; \varepsilon)$ は次のように定められる。

$$S_m(P; \varepsilon) \equiv \inf\{J(P, Q); Q \in \mathcal{G}_m(P; \varepsilon)\}. \quad (3.9)$$

このとき、次の命題が成り立つ。

<命題 3.2>

$$(1) \quad S(P; \varepsilon) = \inf\{S_m(P; \delta); 0 < \delta \leq \varepsilon\}.$$

$$(2) \quad 0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \text{ のとき, } S(P; \varepsilon_1) \geq S(P; \varepsilon_2).$$

$$(3) \quad S(P; 0) = S(P).$$

(証明)(1): $\{Q; \|P - Q\| = \delta, \delta \leq \varepsilon\} = \mathcal{G}(P; \varepsilon)$ であるから、

$$\begin{aligned} & \inf\{S_m(P; \delta); 0 < \delta \leq \varepsilon\} \\ &= \inf\{J(P, Q); Q \in \mathcal{G}_m(P; \delta), \delta \leq \varepsilon\} \\ &= \inf\{J(P, Q); Q \in \mathcal{G}(P; \varepsilon)\} \\ &= S(P; \varepsilon). \end{aligned}$$

(2): $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$ ならば $\mathcal{G}(P; \varepsilon_1) \subseteq \mathcal{G}(P; \varepsilon_2)$ であるから、

$$\begin{aligned} S(P; \varepsilon_1) &= \inf\{J(P, Q); Q \in \mathcal{G}(P; \varepsilon_1)\} \\ &\geq \inf\{J(P, Q); Q \in \mathcal{G}(P; \varepsilon_2)\} \\ &= S(P; \varepsilon_2). \end{aligned}$$

(3): $\varepsilon = 0$ と取ると、 $\mathcal{G}(P; 0) = \{P\}$ である。よって、 $S(P; 0) = J(P, P) = S(P)$. ■

また、2つの事象系 (X, P) 、 (Y, Q) において、 X を入力系、 Y を出力系とし、 $P = \{p_i\}$ 、 $Q = \{q_j\}$ をそれぞれ入力状態、出力状態と考えると、 X と Y の相互エントロピー $I(X, Y)$ の定義式(3.1)は、前節で示した、 P から Q への変換(チャンネル)を使った定義と同じものである。すなわち、Shannonの通信理論において、チャンネル(Λ^* と表す)は P から Q への遷移確率行列

$(p(j|i))$ で与えられ、 P と Q の関係は

$$q_j = \sum_i p(j|i)p_i$$

であり、 P と Q の相関を表す合成状態は同時分布 $\{r(i, j)\} = \{p(j|i)p_i\}$ で表される。したがって、状態 P とチャンネル Λ^* に関する相互エントロピー $I(P; \Lambda^*)$ は

$$I(P; \Lambda^*) = \sum_{i,j} p(j|i)p_i \log \frac{p(j|i)}{q_j} \quad (3.10)$$

で与えられる。これは、定義(3.1)の $I(X, Y)$ と同じものである。そこで、こ

の相互エントロピー $I(P; \Lambda^*)$ を使って、前節のように状態 P の ε -エントロピーを定める。そのためまず、前節同様チャンネル全体の集合を $\mathcal{C}$ とおくと、状態 P に関するチャンネル Λ^* の同値類 $\mathcal{C}_1(\Lambda^*; P)$ 及び P と Λ^* に関する極大相互エントロピー $J(P; \Lambda^*)$ は

$$\mathcal{C}_1(\Lambda^*; P) \equiv \{\Gamma^* \in \mathcal{C}; \Gamma^* P = \Lambda^* P\}$$

$$J(P; \Lambda^*) \equiv \sup \{I(P; \Gamma^*); \Gamma^* \in \mathcal{C}_1(\Lambda^*; P)\}.$$

さらに、

$$\mathcal{C}_2(P; \varepsilon) \equiv \{\Lambda^* \in \mathcal{C}; \|P - \Lambda^* P\| \leq \varepsilon\}$$

とすると、状態 P のチャンネルを使った ε -エントロピー $S_c(P; \varepsilon)$ は次のように定められる。

$$S_c(P; \varepsilon) \equiv \inf \{J(P; \Lambda^*); \Lambda^* \in \mathcal{C}_2(P; \varepsilon)\}. \quad (3.11)$$

実は、 ε -エントロピーに関するこれら二つの定義(3.5)と(3.11)は同じものである。

<定理 3.3> $S_c(P; \varepsilon) = S(P; \varepsilon)$.

(証明) 入力状態 $P = \{p_i\}$ と出力状態 $Q = \{q_j\}$ に対して、 $J(P, Q)$ を与える P と Q の合成状態を $\Phi = \{r(i, j); i, j=1, \dots, n\}$ とする。このとき、

$$\Gamma^* q \equiv (p(j|i)), \quad p(j|i) \equiv \frac{r(i, j)}{p_i}$$

とすると、 $Q = \Gamma^* P$ かつ $J(P, Q) = I(P; \Gamma^* q)$ となる。また、 $\mathcal{C}_2(P; \varepsilon) = \{\Lambda^* \in \mathcal{C}; \Lambda^* P \in \mathcal{G}(P; \varepsilon)\}$ であるから

$$\begin{aligned} S(P; \varepsilon) &= \inf \{J(P, Q); Q \in \mathcal{G}(P; \varepsilon)\} \\ &= \inf \{I(P; \Gamma^* q); Q \in \mathcal{G}(P; \varepsilon)\} \\ &\leq \inf \{J(P; \Lambda^*); \Lambda^* P = Q \in \mathcal{G}(P; \varepsilon)\} \\ &= \inf \{J(P; \Lambda^*); \Lambda^* \in \mathcal{C}_2(P; \varepsilon)\} \\ &= S_c(P; \varepsilon). \end{aligned}$$

逆に、 $J(P; \Lambda^*)$ を与えるチャンネルを $\Gamma^* \in \mathcal{C}_1(\Lambda^*; P)$ とし、チャンネル Γ^* の表す遷移確率行列を $(p(j|i))$ とする。このとき、 $Q = \Gamma^* P$ に対して、状態 $\{p(j|i)p_i\}$ は P と Q の合成状態の一つとなるので

$$J(P; \Lambda^*) = I(P; \Gamma^*) \leq J(P, Q).$$

よって

$$\begin{aligned} S_c(P; \varepsilon) &= \inf \{J(P; \Lambda^*); \Lambda^* \in \mathcal{C}_2(P; \varepsilon)\} \\ &\leq \inf \{J(P, Q); Q = \Lambda^* P \in \mathcal{G}(P; \varepsilon)\} \\ &= S(P; \varepsilon). \end{aligned}$$

以上より

$$S_c(P; \varepsilon) = S(P; \varepsilon). \quad \blacksquare$$

従って、古典系においては、この定理から分かるように、 $S(P; \varepsilon)$ あるいは $S_c(P; \varepsilon)$ のどちらの ε -エントロピーを使っても同じだが、量子系においては、一般にこれら二つの ε -エントロピーは一致しない。量子系ではチャンネルを用

いた ε -エントロピー方が都合のよいことが多いようである。以下、これら二つの ε -エントロピーを区別せずともに $S(P; \varepsilon)$ で表すことにする。

<3.2>フラクタル次元の導入と状態の分類

ここでは、第二節で定義した一般状態のフラクタル次元を古典系の状態に適用する。この場合、(2.3)~(2.5)のフラクタル次元を、記号を簡略して新たに定義しなおすと、次のようになる。

$$\alpha(P; \varepsilon) \equiv \frac{S(P; \varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)},$$

$$\alpha(P) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha(P; \varepsilon)$$

$$\beta(P; \varepsilon) \equiv \frac{S(P; \varepsilon)}{S(P)}.$$

まず、一つの例として、完全事象系のモデルをつくり、 ε -エントロピーを計算し、上で定めた指標 α , β を使って状態の分類を試みてみよう。文字の種類が 1, 2, 3, 4 の 4 種類、列の長さが 8 の文字列を考える。事象系 X をこの 8 個の文字列の一つとすると、文字 1, 2, 3, 4 の X における生起確率 $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ が状態となる。また、文字列 X 中の 1, 2, 3, 4 の出現確率 p_1, p_2, p_3, p_4 を大きい順に並べかえ、 $P' = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ とする。このようにして決めた P' に対して、<補題 3.1>より $S(P; \varepsilon) = S(P'; \varepsilon)$ となるので、状態 $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ ($p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq p_4$, $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$) の ε -エントロピーを計算すれば十分である。ところで、この例では二つの状態の距離 ε は、 $2, 7/4, \dots, 1/2, 1/4, 0$ という具合に減少するから、このモデルでは、最も近い異なる状態間の距離は $1/4$ である。従って、 $\varepsilon = 1/4$ に対して、 $S(P; \varepsilon)$ ($\alpha(P; \varepsilon)$ はこれの $1/\log 4$ 倍) と $\beta(P; \varepsilon)$ を計算してみると、その結果は次のようになる。

状態 P	$S(P)$	$S(P; \frac{1}{4})$	$\beta(P; \frac{1}{4})$	$\pi(P)$
$\{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\}$	1.3863	1.1476	0.8278	2520
$\{\frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\}$	1.3209	1.0397	0.7871	1680
$\{\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\}$	1.2555	0.9743	0.7760	1120
$\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\}$	1.2130	0.9003	0.7422	840
$\{\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, 0\}$	1.0822	0.8010	0.7402	560
$\{\frac{5}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\}$	1.0735	0.7356	0.6852	336
$\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, 0\}$	1.0397	0.7270	0.6992	420

2 4 4				
$\{\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}, 0\}$	0.9743	0.6616	0.6791	280
$\{\frac{5}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, 0\}$	0.9003	0.5623	0.6246	168
$\{\frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, 0\}$	0.7356	0.3768	0.5122	56
$\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\}$	0.6931	0.3804	0.5488	70
$\{\frac{5}{8}, \frac{3}{8}, 0, 0\}$	0.6616	0.3236	0.4891	56
$\{\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0\}$	0.5623	0.2035	0.3619	28
$\{\frac{7}{8}, \frac{1}{8}, 0, 0\}$	0.3768	0	0	8

(注) 上の $\pi(P)$ は P と同型な確率分布の個数, つまり, その状態が P となるような文字列の個数である.

$\beta(P; \varepsilon)$ について考えてみよう. $\beta(P; 1/4)$ の大小関係は上の表からも分かるように, エントロピー $S(P)$ と同じ順序を持ってはいないが, $\pi(P)$ に着目してみると, この実験の場合, $\pi(P) > \pi(P')$ のときは $\beta(P; 1/4) > \beta(P'; 1/4)$ という関係が成り立ち, さらに, $\pi(P) = \pi(P')$ のときにはエントロピーの大きい状態の方が β の値も大きくなっている. 従って, この $\beta(P; 1/4)$ は状態 P の複雑さ(多様さ)の一面を表す量と考えられ, 状態の一つの分類を与える指標になりうると考えられる. なお, $\varepsilon > 1/4$ の場合, 例えば, $\varepsilon = 1/2$ のときには, $\{3/4, 1/8, 1/8, 0\}, \{3/4, 1/4, 0, 0\}, \{7/8, 1/8, 0, 0\}$ の3つの状態 P で $\beta(P; 1/2) = 0$ となってしまう, 状態の分類は不可能になる. この結果, $\beta(P; \varepsilon)$ に関しては最小の ε でのみ状態の分類が可能のようである. 以上の考察をまとめると,

＜結果＞ X, Y を文字種 4, 長さ 8 の文字列とし, 状態を各々 P, Q とする. このとき, 次が成り立つ:

- (1) $\beta(P; 1/4) > \beta(Q; 1/4) \Rightarrow \pi(P) \geq \pi(Q).$
- (2) $\pi(P) = \pi(Q), S(P) > S(Q) \Rightarrow \beta(P; 1/4) > \beta(Q; 1/4).$

さらに, P と Q のエントロピーが等しい場合を考えてみると, 次の実験結果が得られる. ただし, 文字種 $m = 4$ をとし, 長さ n を 19 から 24 まで考える.

($m=4, n=19$)

$P = \{ \frac{6}{19}, \frac{6}{19}, \frac{6}{19}, \frac{1}{19} \}$	$Q = \{ \frac{9}{19}, \frac{4}{19}, \frac{4}{19}, \frac{2}{19} \}$
$S(P) = 1.2470$	$S(Q) = 1.2470$
$\beta(P; 2/n) = 0.8788$	$\beta(Q; 2/n) = 0.8628$
$\pi(P) = 325909584$	$\pi(Q) = 290990700$

研究会報告

(m=4, n=20)

$$P = \left\{ \frac{8}{20}, \frac{6}{20}, \frac{6}{20}, \frac{0}{20} \right\} \quad Q = \left\{ \frac{12}{20}, \frac{4}{20}, \frac{2}{20}, \frac{2}{20} \right\}$$

1.0889	1.0889
0.8558	0.8381
116396280	52907400

$$P = \left\{ \frac{9}{20}, \frac{8}{20}, \frac{2}{20}, \frac{1}{20} \right\} \quad Q = \left\{ \frac{12}{20}, \frac{3}{20}, \frac{3}{20}, \frac{2}{20} \right\}$$

1.1059	1.1059
0.8530	0.8406
83140200	70543200

(m=4, n=21)

$$P = \left\{ \frac{9}{21}, \frac{8}{21}, \frac{3}{21}, \frac{1}{21} \right\} \quad Q = \left\{ \frac{12}{21}, \frac{3}{21}, \frac{3}{21}, \frac{3}{21} \right\}$$

1.1537	1.1537
0.8658	0.8545
581981400	493802400

(m=4, n=22)

$$P = \left\{ \frac{9}{22}, \frac{8}{22}, \frac{4}{22}, \frac{1}{22} \right\} \quad Q = \left\{ \frac{12}{22}, \frac{4}{22}, \frac{3}{22}, \frac{3}{22} \right\}$$

1.1840	1.1840
0.8752	0.8647
3200897700	2715913200

(m=4, n=23)

$$P = \left\{ \frac{9}{23}, \frac{8}{23}, \frac{5}{23}, \frac{1}{23} \right\} \quad Q = \left\{ \frac{12}{23}, \frac{5}{23}, \frac{3}{23}, \frac{3}{23} \right\}$$

1.2025	1.2025
0.8825	0.8725
14724129000	12493201000

(m=4, n=24)

$$P = \left\{ \frac{10}{24}, \frac{9}{24}, \frac{5}{24}, \frac{0}{24} \right\} \quad Q = \left\{ \frac{15}{24}, \frac{4}{24}, \frac{3}{24}, \frac{2}{24} \right\}$$

1.0594	1.0594
0.8682	0.8529
3926434512	1647455040

このほかの多くの例に対して、コンピュータ実験を行った結果から、まだ解析的な証明は得られていないが、次のことが予想される。

<予想> m 種, n 列の文字列の状態 P, Q において, $S(P) = S(Q)$ であるとき,

$$\pi(P) > \pi(Q) \Leftrightarrow \beta(P; 2/n) > \beta(Q; 2/n).$$

これらの実験結果と予想より、状態のフラクタル次元 α , β はともにエントロピーとその変化の仕方（順序関係）が異なるので、エントロピーとは違った意味で、系の複雑さを表す量であると考えられる。エントロピーでは区別できない状態の複雑さをこういったフラクタル次元で解析できるようになれば、“フラクタル理論は有用であるかどうか”という議論に情報理論の立場から一石を投ずることができるであろう。

文献

- [1] B. B. Mandelbrot, "The Fractal Geometry of Nature", W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1982
- [2] 高安秀樹, "フラクタル", 朝倉書店, 1986
- [3] 大矢雅則, "エントロピー・遺伝子・フラクタル", 森北出版, 予定
- [4] A. N. Kolmogorov and V. M. Tihomirov, Amer. Math. Soc. Trans., Ser. 2, Vol. 17, 277, 1961
- [5] 梅垣・大矢, "量子論的エントロピー", 共立出版, 1983
- [6] 梅垣・大矢・日合, "作用素代数入門", 共立出版, 1985
- [7] M. Ohya, "Some aspects of quantum information theory and their applications to irreversible processes", to be published in Rep. Math. Phys.
- [8] 大矢雅則, "光通信の数学的基礎", 素粒子論研究, 第78巻2号, 124, 1988
- [9] R. Schatten, "Norm ideals of completely continuous operators", Springer-Verlag, 1970