

有限カテゴリー

北大理学部 丹原大介

(Daisuke Tambara)

圏 C が finite category であるとは, C の objects と morphisms が finite set をなすことをいう. このような C の線型表現について述べる.

§ 1 Simple modules, injective modules, etc.

A. Simple modules

C は finite category, $E = C^{\wedge}$ は C から Sets (集合の圏) への反変関手全体のなす圏, $A \in E$ は E の ring object, $A\text{-mod}$ は (left) A -module 全体のなす圏とする. $A\text{-mod}$ はアーベル圏であり, その simple object を記述したい.

Def 圏 C が Karoubien とは, 次が成立つことをいう.

$$x \in C, \quad e^2 = e \in \text{End } x$$

$$\Rightarrow \exists p : x \rightarrow y, \quad \exists i : y \rightarrow x \quad \text{s.t.}$$

$$e = ip, \quad 1_y = pi.$$

一般に圏 C に対し, 圏の射 $C \rightarrow \text{Kar } C$ で, $\text{Kar } C$ は karoubien, $(\text{Kar } C)^\wedge \rightarrow C^\wedge$ は equivalence となるものが存在する. このような $\text{Kar } C$ を C の Karoubi envelope といい. 一つの構成法は次のとおり.

$\text{Kar } C$ の object pair (x, e) $x \in C$, $e^2 = e \in \text{End } x$.

$$\text{Hom}((x, e), (y, f)) = \{g \in \text{Hom}(x, y) \mid fg e = g\}$$

composition C のそれの制限.

さて始めの setting に戻ると, ring object, A -modules は $E = C^\wedge$ の図式によって定義されるものだから, C を $C^\wedge \simeq C'^\wedge$ (equivalence) であるような C' でとりかえてもよい. 上の構成による $\text{Kar } C$ は finite だから, C が karoubien の場合に限ってよいことが分る.

Remark 次の事が知られている ([1] Exposé IV)

C, C' : 小圏

$$C^\wedge \simeq C'^\wedge \Rightarrow \text{Kar } C \simeq \text{Kar } C'$$

$x \in C$ に対し, $\{x\}$ は object が x のみである C の full subcategory を表わす. $j: \{x\} \rightarrow C$ は inclusion とする. $j^*: C^\wedge \rightarrow \{x\}^\wedge$ は j によるひきもどしとすると, j^*A は $\{x\}^\wedge$ の ring object であり, 次の図式ができる.

$$A(x)[\text{End } \mathcal{X}^{\text{op}}]\text{-mod} \cong j^*A\text{-mod} \begin{array}{c} \xrightarrow{j_!} \\ \xleftarrow{j^*} \\ \xrightarrow{j_*} \end{array} A\text{-mod}$$

$A(x)[\text{End } \mathcal{X}^{\text{op}}]$ は ^{twisted} monoid algebra

$j_!$ は j^* の, j^* は j_* の left adjoint

j は fully faithful だから j_* も fully faithful, よって射

$j^*j_* \rightarrow \text{id}$ は iso. その inverse $\text{id} \rightarrow j^*j_*$ は adjoint

により射 $j_! \rightarrow j_*$ を定める. これを λ_x とかく.

$A(x)[\text{Aut } \mathcal{X}^{\text{op}}]$ は ^{twisted} group algebra とし, $V \in A(x)[\text{Aut } \mathcal{X}^{\text{op}}]\text{-mod}$ と

する. $\text{End } \mathcal{X}$ の non-unit を V 上の作用させることにより,

V を $A(x)[\text{End } \mathcal{X}^{\text{op}}]\text{-module}$ と見る. $\varepsilon = \varepsilon$

$$S_x(V) = \text{Im}(\lambda_x(V) : j_!(V) \rightarrow j_*(V))$$

とかく. C の iso. classes の完全代表系をとる. 各 $x \in C$

に対し, simple $A(x)[\text{Aut } \mathcal{X}^{\text{op}}]\text{-module}$ の iso. classes の完全代表系

$\mathcal{O}_x$ とする.

Prop 1 C は Karoubien とする. $\{S_x(V) \mid x \in C, V \in \mathcal{O}_x\}$

は simple $A\text{-module}$ の iso. class の完全代表系である.

k は体とし, $A = k_C$ は constant ring (i.e. $C \ni x \mapsto k$)

とする. $G_0(k_C)$ は f.g. $k_C\text{-module}$ のなす $\mathcal{P}$ -ベル図の K_0 群

を表す.

Cor 2 C は Karoubien とする . evaluation functor により ,
ring isomorphism

$$G_0(k_C) \xrightarrow{\sim} \prod_{x \in C} G_0(k[\text{Aut } x^{\text{op}}])$$

を得る .

Simple A -module $S_x(V)$ のもう少し具体的な表示を述べる .

$A = k_C$ (k は体) の場合に限ることにする . $x, y \in C$ に対し , $\text{Hom}(x, y) = C(x, y)$ の subset $SE(x, y)$, $SM(x, y)$ を各々 section をもつ射全体 , retract をもつ射全体として定義し , $T_x : C^{\text{op}} \rightarrow k\text{-mod}$ 及び $T'_x : C \rightarrow k\text{-mod}$ を

$$T_x(y) = k[SE(y, x)]$$

$$T'_x(y) = k[SM(x, y)]$$

によって定義する . $\text{Aut } x$ が T_x には左から , T'_x には右から作用するので , $k[\text{Aut } x^{\text{op}}]$ -module V に対し , k_C -module $V \otimes_{k[\text{Aut } x]} T_x$, $\text{Hom}_{k[\text{Aut } x]^{\text{op}}}(T'_x, V)$ ができる . 射 $\mu_x(V)$ を

$$\mu_x(V) : V \otimes_{k[\text{Aut } x]} T_x \longrightarrow \text{Hom}_{k[\text{Aut } x]^{\text{op}}}(T'_x, V)$$

$$v \otimes f \mapsto (g \mapsto \begin{cases} v \cdot fg & (fg \in \text{Aut } x) \\ 0 & (fg \notin \text{Aut } x) \end{cases})$$

$$f \in SE(y, x), \quad g \in SM(x, y)$$

によって定義する. すると simple $k[\text{Aut } x]^{\text{op}}$ -module V に対して $S_x(V) = \text{Im } \lambda_x(V) \cong \text{Im } \mu_x(V)$ が分る.

Example $n \geq 0$ に対し $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$ とおき, Δ_n は $[m]$ ($0 \leq m \leq n$) 達を object とし, non-decreasing maps を morphism とする圏を表わす. X を Δ_n から Finite Sets への反変関手とし $C = \Delta_n / X$ とおく. この C については, $\text{Aut } x = \{1\}$ ($\forall x \in C$) で, $\mu_x(V)$ は mono である. 従って T_x 自身が simple k_C -module である.

Problem 有限体 $\mathbb{F}_2$ 上の $n \times n$ 行列が積に閉じ作る monoid を S とする. S の Karoubi envelope として次の C がとれる.

$$\text{ob } C = \{ \mathbb{F}_2^m \mid 0 \leq m \leq n \}, \quad \text{mor } C = \{ \text{linear maps} \}.$$

$x \in C$, trivial $k[\text{Aut } x]^{\text{op}}$ -module k に対し, k_C -mod の射 $\mu_x(k)$ は $(\text{char } k, q) = 1$ のとき mono か? 言い換えると, $l \leq m$ に対し, $G(m, l) = \{ \mathbb{F}_2^m \text{ の } l \text{ 次元 subspaces} \}$ とおくと, pairing

$$k[G(m, l)] \times k[G(m, m-l)] \longrightarrow k$$

$$(U, V) \longmapsto \begin{cases} 1 & U \oplus V = \mathbb{F}_2^m \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$$U \in G(m, l), \quad V \in G(m, m-l)$$

は非退化か? 同様の問題が元数 $\leq n$ の finite set のなす圏

についても考えられる.

B. Indecomposable injectives

C は finite Karoubien, $A \in C^\wedge$ は ring で各 $x \in C$ に対し $A(x)$ は commutative noetherian とする. A -ヘルム圏 $A\text{-mod}$ は locally noetherian なので Σ の injective object は indecomposable injective の直和に一意的に分解する. $x \in C$, $p \in \text{Spec } A(x)$ に対し $G_{x,p} = \{\sigma \in \text{Aut } x \mid \sigma(p) = p\}$ とおく. $G_{x,p}$ は剰余体 $k(p)$ に作用し twisted group algebra $k(p)[G_{x,p}^{op}]$ ができる.

Prop 3 Indecomposable injective A -module の iso. class の集合と triple (x, p, V) ($x \in C$, $p \in \text{Spec } A(x)$, V : simple $k(p)[G_{x,p}^{op}]$ -module) の自然な意味での iso. class の集合との間に bijection がある.

C. Indecomposable projectives

特別な場合に indecomposable projective A -module の具体的を表すがあることを示す. $A = k_C$ (k は体) とする. 各 $x \in C$ に対し $P_x \in k_C\text{-mod}$ を次のように定義する.

$$P_x = \text{Ker} (k[h_x] \rightarrow \bigoplus_{f: x \rightarrow y} k[h_y])$$

split epi. not iso.

$$h_x = C(-, x) : \text{Hom-functor}$$

$$(\quad) \text{ の中の射の } \text{GF 成分} = k[h_f]$$

C , $\mathcal{A}_x$ は §1. A. のとおりとする. $V \in \mathcal{A}_x$ に対し $k[\text{Aut } x]^{op}$ -module とし $\tilde{V}$ を projective cover とする. P_x には $\text{Aut } x$ が作用するので, k_C -module $\tilde{V} \otimes_{k[\text{Aut } x]} P_x$ ができる.

Prop 4 任意の $x \in C$, 任意の $V \in \mathcal{A}_x$ に対し §1 A. の射 $\mu_x(V)$ が mono であるを仮定する. このとき $\tilde{V} \otimes_{k[\text{Aut } x]} P_x$ は $S_x(V)$ の projective cover である.

Example §1 A. の Example の Δ_n/X に Prop 4 が適用できる.

§2. Homological dimensions, K_0 -groups, etc.

A. $\text{End} = \text{Aut}$ の場合

有限圏 C が $\text{End } x = \text{Aut } x$ ($x \in C$) をみたすとき, $ob C$ 上の pre-order $\leq$ を $x \leq y \Leftrightarrow \text{Hom}(x, y) \neq \emptyset$ によって定義できる. ($x \leq y$ and $y \leq x \Rightarrow x \cong y$). C の combinatorial dimension (comb. dim C とかく) を次で定義する.

$$\sup \{ n \mid \exists \text{ 列 } x_0 < x_1 < \dots < x_n \text{ } (x_i \in C) \}$$

以下 k は固定された体を表わす. $C^\wedge$ の constant ring k_C の

finitistic dimension ($\text{f. dim } k_C$ とかく) は次で定義される.

$$\sup \{ \text{pd } X \mid X : \text{f.g. } k_C\text{-module}, \text{pd } X < \infty \}$$

Prop 5 C が $\text{End } x = \text{Aut } x$ ($\forall x \in C$) をみたすとき
 $\text{f. dim } k_C \leq \text{comb. dim } C$.

等号が成立つ例は多い. 正反対の場合は次の Prop. で与えられる.

Prop 6 C は次をみたすとする

(i) $\text{End } x = \text{Aut } x$ は p -group ($\forall x \in C$) ($p = \text{char } k > 0$).

(ii) $f: x \rightarrow y$ not iso. $\Rightarrow \exists g (\neq 1) \in \text{Aut } x$ s.t. $fg = f$.

このとき $\text{f. dim } k_C = 0$.

Example $p = \text{char } k > 0$, $G: p$ -group とする. transitive G -set の存在 category を $C = \text{Con}(G\text{-sets})$ で表わす. この C は Prop 6 の条件をみたす.

Prop 7 $p = \text{char } k \geq 0$, C は次の条件をみたすとする.

(i) $\text{End } x = \text{Aut } x$ ($\forall x \in C$)

(ii) $\forall Q \leq \text{Aut } x$ (p -subgroup) に対し quotient x/Q が存在.

すなわち $C \ni y \mapsto \text{Hom}(x, y)^Q$ は x/Q で representable.

このとき $\text{pd } k < \infty$. (pd はアーベル圏 $k_C\text{-mod}$ における

projective dimension を表わす)

B. Admissible epi-mono 分解をもつ場合

圏 C が admissible epi-mono 分解をもつとは, admissible epi
及び admissible mono と呼ばれる C の射の 2 つの class が与えら
れていて, 以下の条件をみたすことをいう.

- (i) admissible epi は epi. admissible mono は mono.
- (ii) $\{\text{admissible epi}\}$ 及び $\{\text{admissible mono}\}$ はともに $\{\text{isom}\}$
を含み, 合成に関し閉じている.
- (iii) C の任意の射 f は $f = gh$, $g : \text{admissible mono}$, $h :$
admissible epi と分解する. この分解は次の意味で一意的.
 $f = g'h'$ が他のどのような分解ならば, $\exists u = \text{isom s.t.}$
 $g' = gu$, $h' = u^{-1}h$.

k は体, C は有限圏とする. f.g. projective k_C -module
の category の K_0 群を $K_0(k_C)$ とかく.

$$C : K_0(k_C) \longrightarrow G_0(k_C)$$

$$C_x : K_0(k[\text{Aut } x]^{\text{op}}) \longrightarrow G_0(k[\text{Aut } x]^{\text{op}}) \quad (x \in C)$$

は Cartan map を表わす.

Prop 8 C が admissible epi-mono 分解をみたすとき, C は単
射で

$$|\operatorname{Cok} c| = \prod_{x \in \mathcal{C}} |\operatorname{Cok} c_x|$$

但し $\mathcal{C}$ は C の iso. class の完全代表系.

C が admissible epi-mono 分解をもつとき, C の部分圏 AM , AE を次のように定義する.

$$\operatorname{ob} AM = \operatorname{ob} AE = \operatorname{ob} C$$

$$\operatorname{mor} AM = \{ \text{admissible mono} \}$$

$$\operatorname{mor} AE = \{ \text{admissible epi} \}.$$

また $j : AE \rightarrow C$, $j' : AM \rightarrow C$ を inclusion とする.

Lemma 9 f.g. k_C -module F に対し

$$\operatorname{pd} j^* F \leq \operatorname{pd} F \leq \operatorname{pd} j^* F + \operatorname{comb. dim} AM$$

Cor 10 $\operatorname{f. dim} k_C \leq \operatorname{comb. dim} AE + \operatorname{comb. dim} AM$

proof Lem 9 と Prop 5 による.

Cor 11 C が admissible epi-mono 分解をもつとき

$$\operatorname{gl. dim} k_C < \infty \Leftrightarrow |\operatorname{Aut} x| \text{ は } \operatorname{char} k \text{ と素 } (\forall x \in C)$$

proof $\Leftarrow$: $\Leftarrow$ のとき $\operatorname{gl. dim} k_{AE} < \infty$ は容易に分るから Lem 9

により OK. $\Rightarrow$: Prop 8 により $\forall x \in C$ について $|\operatorname{Cok} c_x|$

$= 1$. これは $\operatorname{Aut} x$ が $\operatorname{char} k$ と素なことを意味する.

Problem admissible epi-mono 分解を仮定せずに Cor 11 の $\Rightarrow$ は成立つか?

Cor 12 C が次の条件をみたすとする ($p = \text{char } k$)

- (i) admissible epi-mono 分解をもつ.
- (ii) $x \in C$, p -部分群 $Q \leq \text{Aut } x$ に対し quotient object x/Q が存在し canonical morphism $x \rightarrow x/Q$ は admissible epi.

$\Rightarrow$ のとき $\text{pd } k < \infty$

proof Lem 9 と Prop 7 による.

C. Topos の有限部分圏の場合

この報告の主な結果はこれから述べる Cor. 14 である. 以下体 k は固定する. E を topos, C を E の finite full subcategory とする (§1 のはじめの E とは別). C が E の中で quotient に関し実質的に閉じているとは, 次が成立することをいう.

$$x \rightarrow y \text{ は } E \text{ の epi, } x \in C$$

$$\Rightarrow \exists y' \in C \quad y \cong y'$$

Prop 13 C は E の中で quotient に関し実質的に閉じているとする.

- (i) $x \in E$. $\forall y \in C$ に対し $\text{Hom}(y, x)$ は有限とする.

$h_x = \text{Hom}(-, x) \in E^\wedge$ の $C^\wedge$ の制限を $h_x|_C$ とかくとき,

$\mathcal{P}$ -ベル図 $k_C\text{-mod}$ において

$$\text{pd } k[h_x|C] < \infty$$

(ii) F, G が f.g. k_C -module で $\text{pd } F, \text{pd } G < \infty$ ならば

$$\text{pd } (F \otimes_k G) < \infty$$

proof C の射 f が admissible epi (resp. admissible mono) とは E の射として epi (resp. mono) であることと定義すれば, 明らかに C は §2 B の意味で admissible epi-mono 分解をもつ. また Cor 12 の条件 (ii) もみたす. よって Cor 12 により

$$\text{pd}_{k_C} k < \infty \quad (*) \quad \text{さて (i) の条件をみたす } x \in E \text{ に対し}$$

$F = h_x|C \in C^\wedge$ とおくと, C/F は有限圏で E/x の full subcategory であり E/x の中で quotient に関し実質的に閉じている. C/F による $(*)$ を適用して $\text{pd}_{k_{C/F}} k < \infty$.

$J! : k_{C/F}\text{-mod} \rightarrow k_C\text{-mod}$ は exact で projective を保ち,

$$J!(k) = k[F] \quad \text{であるから} \quad \text{pd}_{k_C} k[F] < \infty \quad \text{次に (ii)}$$

を示そう. $P_\bullet \rightarrow F, Q_\bullet \rightarrow G$ を $k_C\text{-mod}$ における finite

projective resolution とする. $P_\bullet \otimes_k Q_\bullet \rightarrow F \otimes_k G$ も finite

resolution. 各 $P_p \otimes Q_q$ が $\text{pd} < \infty$ であることを言えばよい.

P_p, Q_q は $k[h_x]$ ($x \in C$) 達の直和の直和因子であるから

$x, y \in C$ に対し $\text{pd}(k[h_x] \otimes k[h_y]) < \infty$ を示せばよい.

$z = x \times y$ を E における product とすると, z は (i) の条件を

みたし, $k[h_x] \otimes k[h_y] \cong k[h_x \times h_y] = k[h_z|C]$. 故に

(i) により, 左辺の $\text{pd} < \infty$

Cor 14 $\mathcal{C}$, $\mathcal{E}$ は上のとおりとする. このとき自然な射

$$c : K_0(k_{\mathcal{C}}) \longrightarrow G_0(k_{\mathcal{C}})$$

は単射で image は $G_0(k_{\mathcal{C}})$ の subring. (これにより $K_0(k_{\mathcal{C}})$ に c が ring homo となるような ring structure が定まる)

proof. c の単射性は Prop 8 による. F, G が f.g. projective $k_{\mathcal{C}}$ -module なら Prop 13 (ii) により $\text{pd } F \otimes G < \infty$. よって $[F] \cdot [G] = [F \otimes G] \in \text{Im } c$. また $\text{pd } k < \infty$ であるから $[k] \in \text{Im } c$. 故に $\text{Im } c$ は $G_0(k_{\mathcal{C}})$ の (単位元を共有する) 部分環.

上の結果は次に述べる吉田氏の結果のアーベル圏における類似として得られた. また epi-mono 分解, p -部分群による quotient の存在という条件に着目したのも吉田氏である. さて, $\mathcal{E}$ は topos, $\mathcal{C}$ は $\mathcal{E}$ の finite full subcategory で quotient に関し実質的に閉じているとしよう. $\text{ob } \mathcal{C}$ の iso.class の完全代表系とする. $\mathbb{Z}[\mathcal{C}]$ は $\mathcal{C}$ 上の自由アーベル群, $\mathbb{Z}^{\mathcal{C}}$ は $\mathcal{C}$ 上の $\mathbb{Z}$ -valued 関数のなす環を表わす. アーベル群の射 γ を次のように定義する.

$$\varphi : \mathbb{Z}[\mathcal{C}] \longrightarrow \mathbb{Z}^{\mathcal{C}}$$

$$x \longmapsto (y \longmapsto \# \text{Hom}(y, x))$$

$$x, y \in \mathcal{C}$$

このとき次のことが成立つ (吉田) .

$$(i) \quad \varphi \text{ は単射で } |\text{Cok } \varphi| = \prod_{x \in \mathcal{C}} |\text{Aut } x|$$

$$(ii) \quad \text{Im } \varphi \text{ は } \mathbb{Z}^{\mathcal{C}} \text{ の subring}$$

これにより $\mathbb{Z}[\mathcal{C}]$ は ring structure をもつ . この構成は Burnside 環の埋込み定理を逆手にとったもので , $E = G\text{-sets}$, $\mathcal{C} = \text{Con}(E) = \{\text{transitive } G\text{-sets}\}$ のときの $\mathbb{Z}[\mathcal{C}]$ が G の Burnside 環 $\Omega(G)$ である . より一般的な例として次のものがある . I を有限圏 , $E = I^{\wedge}$ とする . $X \in E$ が $X(i) : \text{finite} \quad (\forall i \in I)$ をみたすとき , X を finite とよぶ . $X \in E$ が finite , non empty で , $X = X_1 \cup X_2 \Rightarrow X = X_1 \text{ or } X = X_2$ が成立するとき , X を irreducible とよぶ . $\mathcal{C}$ が E の finite full subcategory で , $X \in E$ irreducible $\Leftrightarrow X \cong \exists X' \in \mathcal{C}$ が成立つとする . 明らかに $\mathcal{C}$ は E の中で quotient に関し実質的に閉じている . この場合の環 $\mathbb{Z}[\mathcal{C}]$ は , topos $I^{\wedge}$ の finite object 達から Grothendieck construction によってえられる環とも同一視され , I の一種の Burnside 環であると言える ([3]).

$K_0(k_C)$, $G_0(k_C)$ の functorial property を述べる .

Prop 15 $f : E_1 \rightarrow E_2$ を topos の射, $C_i \subset E_i$ ($i=1, 2$) を finite full subcategory で quotient に関し実質的に閉じているとし, $f^*(C_2) \subset C_1$ と仮定する. $g : C_2 \rightarrow C_1$ を f^* の制限とする.

$$(i) F : \text{f.g. } k_{C_1}\text{-mod}, \text{pd}_{k_{C_1}} F < \infty \Rightarrow \text{pd}_{k_{C_2}} g^* F < \infty$$

$$(ii) g_* : k_{C_2}\text{-mod} \rightarrow k_{C_1}\text{-mod} \text{ は finite coh. dim.}$$

(i) により

$$\begin{array}{ccc} K_0(k_{C_1}) & \xrightarrow[\exists! g^*]{\quad\quad\quad} & K_0(k_{C_2}) \\ \downarrow c & & \downarrow c \\ G_0(k_{C_1}) & \xrightarrow{g^*} & G_0(k_{C_2}) \end{array}$$

を可換にする点矢 g^* が唯一つ定まる. (ii) からは準同型 g_*

$$\begin{array}{ccc} G_0(k_{C_2}) & \longrightarrow & G_0(k_{C_1}) \\ [F] & \longmapsto & \sum_i (-1)^i [R^i g_* F] \end{array}$$

が定まる.

$$\text{さて } \text{Ext}_{k_C}^p(,) : k_C\text{-mod}^{\text{op}} \times k_C\text{-mod} \rightarrow k_C\text{-mod} \text{ を}$$

local Ext functor とする. ([1] Exposé V)

$$\text{Ext}_{k_C}^p(F, G)(x) = \text{Ext}_{k_C/x}^p(j_x^* F, j_x^* G)$$

$$x \in C$$

$$j_x : C/x \rightarrow C \quad \text{canonical morphism.}$$

$C \subset E$ は Cor 14 と同様 とするとき, pairing

$$\langle , \rangle_C : K_0(k_C) \times G_0(k_C) \longrightarrow G_0(k_C)$$

$$([F], [G]) \mapsto \sum_p (-1)^p [\text{Ext}_{k_C}^p(F, G)]$$

は well defined になる.

$f : E_1 \rightarrow E_2$, $C_i \subset E_i$ ($i=1, 2$) を Prop 15 のとおりとするとき, 以上の記号のもとで次の等式が成立つ.

$$g_* \langle g^*(a), b \rangle_{C_2} = \langle a, g_*(b) \rangle_{C_1}$$

$$a \in K_0(k_{C_1}), \quad b \in G_0(k_{C_2})$$

Example G は有限群, k の標数は $p > 0$ とする. $E = G\text{-sets}$, $C \subset E$ は full subcategory で $\text{ob } C = \{G/H \mid H \leq G\}$ とする. この場合の環 $K_0(k_C)$ を計算する. $V\text{Per}(G)$ は permutation $k[G]$ -module の直和因子全体のなす $k[G]$ -mod の full subcategory を表わす. $V\text{Per}(G)$ は $\oplus, \otimes_k$ に関し $k[G]$ -mod の中で閉じているから, その Gro. ring $K_0(V\text{Per}(G))$ ができる. $\mathcal{R}$ を G の p -perfect subgroups の G -共役類の完全代表系とすると, 次の ring isom がある.

$$K_0(k_C) \cong \bigoplus_{H \in \mathcal{R}} K_0(V\text{Per}(N_G(H)/H))$$

D. cohomologically trivial modules

G を有限群とする. G -module F が cohomologically

trivial であるとは、任意の部分群 K について、 $H^i(K, F) = 0$ ($i > 0$) が成立つことをいう。このような F は昔 Rim, 中山によって研究された ^[2] topos $E = G\text{-sets}$ の cohomology の記号では、 $H^i(K, F) = H^i(G/K, F)$ と書ける。一般の topos E とそのアーベル群 $F \in E_{ab}$ について、 F が cohomologically trivial (flasque) であるとは

$$H^i(X, F) = 0 \quad \forall X \in E, \quad \forall i > 0$$

が成立つこととして定義される ([1] Exposé V)。例えば、 $A \in E$ が ring で F が injective A -module なら F は coh. trivial。

Problem k は体、 C は有限圏、 $E = C^\wedge$ とする。 k_C -module F で coh. trivial なものを特徴付けよ。

Prop 16 有限圏 C が $\text{End } x = \text{Aut } x$ ($x \in C$) をみたすとする。coh. trivial な k_C -module は injective k_C -module である。

この結論が成立つことは、free な k_C -module $k[X]$ 達の $k_C\text{-mod}$ 全体において占める割合が大きいことを意味する。

Prop 17 C は有限圏とする。 k_C -module F が coh. trivial ならば $\text{inj. dim}_{k_C} F < \infty$ である。

E. additive category における類似.

Cor 12 の additive category における類似として次の結果がある.

Prop 18 R は離散付値環, Λ は R -algebra とする. C は

Λ -mod の full subcategory で次の条件をみたすとする

(i) $\text{ob } C$ は finite set

(ii) C は Λ -mod の中で image に関し実質的に閉じている.

i.e. $f: X \rightarrow Y$ が C の射なら C は $\text{Im } f$ と同型な Λ -module を含む.

(iii) $X, Y \in C$ に対し $\text{Hom}_\Lambda(X, Y)$ は torsion cyclic R -module. π のとき C^{op} から Ab (Abel 群の圏) への additive functor 全体のなすアベル圏の $\text{gl. dim} < \infty$.

Example R は離散付値環, π は素元, K は R の商体とする.

Λ は $M_n(K)$ の中の tiled R -order (i.e. Λ は行列単位 e_{ii} ($i = 1, \dots, n$) を含む) とする.

$P_i = \Lambda e_{ii}$ とおく. full subcategory $C \subset \Lambda\text{-mod}$ を

$$\text{ob } C = \{ \text{Im } f \mid f \in \text{Hom}_\Lambda(P_i/\pi P_i, P_j/\pi P_j), \exists i, \exists j \}$$

によって定義する. C は Prop 18 の条件をみたす.

REFERENCES

- [1] M. Artin, A. Grothendieck, J.L. Verdier, Théorie des Topos et Cohomologie Etale des Schémas, Springer L.N. 269, 270.
- [2] K. Brown, "Cohomology of Groups", Springer, 1982.
- [3] T. Yoshida, The Möbius algebra as a Burnside ring, Hokkaido Math. J. 13 (1984)