

正 則 多 値 論 理 関 数

明 治 大 学 高 木 昇 (Noboru Takagi)

明 治 大 学 向 殿 政 男 (Masao Mukaidono)

1. ま え が き

従 来 の 古 典 理 論 (2 値 論 理) で は , 真 偽 不 定 と い う こ と は 論 外
に お か れ , す べ て の 命 題 の 真 理 値 は 真 (1) か 偽 (0) い ず れ か の
値 を 取 る と い う 仮 定 の も と に 論 議 が 進 め ら れ て い る . し か し ,
実 社 会 に お い て は , 真 偽 の 決 定 し て い な い 場 合 も 少 な く な い .
真 理 値 が 1 , 0 以 外 を 取 る 多 値 論 理 体 系 で は , 実 社 会 に お け る
真 偽 不 定 の 命 題 も 多 少 は 取 り 扱 う こ と が で き , そ の 適 用 範 囲 も
古 典 論 理 に 比 べ て 拡 張 さ れ て い る .

一 般 に , n 変 数 の m 値 論 理 関 数 は 入 力 ベ ク ト ル m^n 個 上 で 考
察 さ れ , こ の 論 理 関 数 の 総 数 は m^{m^n} 個 と な り , そ の 数 は 極 め て
多 く な る . こ の た め , 意 味 の あ る 集 合 族 , つ ま り す べ て の 論 理 関
数 か ら な る 集 合 の あ る 意 味 を 持 っ た 部 分 集 合 を 取 り 扱 う 研 究
が 数 多 く な さ れ て き た . 本 論 文 で は , 真 偽 不 定 つ ま り “ あ い ま
い さ ” を 取 り 扱 う た め の 一 手 段 と な る 正 則 多 値 論 理 関 数 に つ

いて述べる。真(1)と偽(0)の他に、不確定を表す第三の真理値($1/2$)を導入することにより、あいまいさを取り扱うのに適した3値論理として最初に考察されたのはB-3値論理関数⁽¹⁾についてであった。B-3値論理関数の多値論理への拡張については、すでに文献(1)で二つの方向が示されていた。一つはm個の真理値のうちでどの真理値であるか不明であることを表すような新しい真理値を添加することにより導かれる多値論理関数である。m=2の場合がB(Bynaritic)-3値論理関数である。この方向についての拡張は、現在までのところ、m値以外の真理値を唯一つ追加した(m+1)値論理として、その完全性が論じられているにすぎない⁽²⁾。もう一方の拡張の方向は、真理値の集合に0と1以外に $x \in A$ 及び $1-x \in A$ を満たすいくつかのxを添加し、論理記号 $\vee$ (OR), $\cdot$ (AND)及び $\sim$ (NOT)をそれぞれmax, min及び(1-)と解釈することにより論理式が表現する論理関数として考察するものである。例えば、 $i/(m-1)$ ($i=0, 1, \dots, m-1$)なるm値論理や、 $0 \leq x \leq 1$ なる有理数の集合又は実数の集合が考えられる。実数の場合には、fuzzy論理関数と呼ばれている^{(3), (4)}。更に、この拡張方向には、論理式に0と1以外の定数を許すことが考えられ、B-3値論理関数において、論理式に定数として $1/2$ を導入したものが正則3値論理関数⁽⁵⁾であり、fuzzy論理関数

に任意の定数を導入したものが定数係数を持った fuzzy 論理関数の研究である⁽⁶⁾。なお、正則3値論理関数の部分集合として、2値(0, 1)の入力のみですべての値が決定され、しかもあいまいな入力情報を訂正することができるP形論理関数があり、これについてもその性質⁽⁷⁾、及び応用⁽⁸⁾が研究されている。山本らの多数決関数⁽⁹⁾も、このP形論理関数の特殊なものであり、これらの関数の関係が3値しきい値関数も含めて考察されている⁽¹⁰⁾。本論文で述べる正則多値論理関数は定数を許した論理式が表現する論理関数で有限の真理値を持ったものである。この意味では、定数係数を持った fuzzy 論理関数の特殊な場合に相当している。なお、最近、畑、中島、大和らにより、同様な研究が精力的に行われている⁽¹¹⁾、⁽¹²⁾、⁽¹³⁾。

本論文では、まず正則多値論理関数を定義し、真理値の集合 $\{0, 1/(m-1), \dots, (m-2)/(m-1), 1\}$ に、あいまいさに関する半順序関係 $\succ$ を導入する。4. では、あいまいさに関する半順序関係 $\succ$ を利用することにより、正則多値論理関数の性質を述べる上で重要な正則多値論理関数に関する量子化定理を示す。そして、この量子化定理を利用することにより、実は正則多値論理関数は入力ベクトル $\{0, 1/2, 1\}^n$ (ただし、 m が偶数値の場合には $1/2$ の代わりに $k = \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$ とし、 $k/(m-1)$ を用いる。なお、 $\lfloor x \rfloor$ は x

より小さいか等しい最大の整数を表現する)上によりその値が一意的に決定されてしまうことを示す. 5. で正則多値論理関数の表現定理を述べると共に, P 形論理関数についても述べる

2. 正則多値論理関数

まず, 多値論理関数と正則多値論理関数の定義を与える. 真理値の集合を $V_m = \{0, 1/(m-1), \dots, (m-2)/(m-1), 1\}$ とすると, n 変数の m 値の多値論理関数 F は定義域 V_m^n から値域 V_m への写像 $F: V_m^n \rightarrow V_m$ である. ここで V_m^n は V_m の n 次元直積空間を意味している. 即ち, m 値の多値論理関数(以下多値)であるとは $A_1, \dots, A_n$ がそれぞれ V_m の値を取るとき $F(A)$ ($A = (A_1, \dots, A_n) \in V_m^n$) が又, V_m の値を取

るような論理関数であるときをいう. ここで

V_m における線形順序関係 $\geq$ を図 1 のように

定義すると, 2 値論理における論理演算 $A \cdot N$

$D(\cdot)$, $O R(\vee)$ 及び $N O T(\sim)$ は, 次のよう

に多値論理における論理演算にそれぞれ拡張

定義できる. $A, B \in V_m$ とすると, $A \cdot B = \min(A, B)$, A

$\vee B = \max(A, B)$, $\sim A = 1 - A$. $A \cdot N D(\cdot)$ についてはし

ばしば省略されることがある. V_m の値を取る論理変数 $x_1, \dots$

, x_n と定数 $0, 1/(m-1), \dots, (m-2)/(m-1), 1$ 及び上で定義され

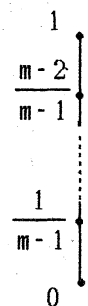


図 1. 線形順序関係 $\geq$

た論理演算 $\text{AND}(\cdot)$, $\text{OR}(\vee)$, $\text{NOT}(\sim)$ の結合により表現される n 変数の多値論理関数を特に n 変数の正則多値論理関数と呼ぶ。即ち次のように定義される。

[定義 1] (1) $0, 1/(m-1), \dots, (m-2)/(m-1), 1$ 及び $x_i (i =$

$1, \dots, n)$ は論理式である。

(2) G, H が論理式ならば $G \cdot H, G \vee H$ 及び

$\sim G$ も論理式である。

(3) 上であたえられるもののみが論理式である。

[定義 2] 論理式が表現する多値論理関数を正則多値論理関数という。ただし論理変数 $x_i (i = 1, \dots, n)$ は m 個の真理値 $V_m = \{0, 1/(m-1), \dots, (m-2)/(m-1), 1\}$ を取るものとする。

なお以下の論議において論理式とそれが表現する正則多値論理関数とを同一視することにする。また以下すべて n 変数についてのみ考察するのでこのことについてはいちいちことわらないことにする。更に、これ以降真理値の集合 V_m の元で $k/(m-1)$ なる値を用いることがあるが、この値における k は $k =$

$\left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor$ である。ただし $\lfloor x \rfloor$ は x より小さいか等しい最大の整数を

表現する。すなわち $\lfloor x \rfloor = t$ ならば t は条件 $t \leq x < t+1$ を満たす唯一の整数である。とくに m が奇数のときには $k/(m-1) = 1/2$ である。

[例] F を正則 5 値論理関数とする.

$$F(x_1, x_2) = \sim x_1(1/4 x_2 \vee 3/4 \vee x_1 \sim x_2)$$

$$A = (1/4, 3/4) \in V_5^2 \text{ とすると,}$$

$$\begin{aligned} F(A) &= (1 - 1/4)(1/4 \cdot 3/4 \vee 3/4 \vee 1/4 \cdot (1 - 3/4)) \\ &= 3/4 \cdot 3/4 = 3/4 \end{aligned}$$

正則多値論理関数の真理値の集合 $V_m = \{0, 1/(m-1), \dots, (m-2)/(m-1), 1\}$ おける $0, 1$ は 2 値論理における偽 (0) 真 (1) にそれぞれ対応している. また他の真理値 $\{1/(m-1), \dots, (m-2)/(m-1)\}$ については真偽不明である, つまり “あいまいである” と解釈される. しかもこの正則多値論理関数においては “あいまいさ” についてある程度の度合がつけられていると考えられる. つまり真理値 $1/(m-1)$ は真あるいは偽とは確定し難いかなり偽に近い真理値であると解釈されるであろう. また同様に真理値 $(m-2)/(m-1)$ についても真あるいは偽とは確定し難いかなり真に近い真理値であると解釈されるであろう. また, m が奇数であるときはその真理値の集合 V_m に $1/2 (= k/(m-1))$ なる真理値が存在し, この真理値 $1/2$ は真偽まったく不明の状態である. つまりより真に近い, あるいはより偽に近い真理値とは解釈できないということである. また一方, m を偶数とすると奇数のときのような真偽まったく不明となるような真理値は存在しなくなり, どの真理値も必ずより真に近い

あるいはより偽に近い真理値になってしまう。このように m を奇数で扱うか偶数で扱うかということにより正則多値論理関数の取り扱いは多少異なってくるが本質的には同じである。

正則多値論理関数においては 2 値論理関数と同様に次の等式が成立する。なお括弧を節約するために論理演算の間に強弱関係をもうけ $\sim, \cdot, \vee$ の順に左の方ほど強いこととする。

$$\textcircled{1} A \vee B = B \vee A,$$

$$A \cdot B = B \cdot A \quad (\text{可換法則})$$

$$\textcircled{2} A \vee A = A, A \cdot A = A \quad (\text{べき等法則})$$

$$\textcircled{3} \sim(\sim A) = A \quad (\text{二重否定})$$

$$\textcircled{4} A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C,$$

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C \quad (\text{結合法則})$$

$$\textcircled{5} A \vee A \cdot B = A, A \cdot (A \vee B) = A \quad (\text{吸収法則})$$

$$\textcircled{6} A \cdot (B \vee C) = A \cdot B \vee A \cdot C,$$

$$A \vee B \cdot C = (A \vee B) \cdot (A \vee C) \quad (\text{分配法則})$$

$$\textcircled{7} \sim(A \vee B) = \sim A \cdot \sim B,$$

$$\sim(A \cdot B) = \sim A \vee \sim B \quad (\text{ド・モルガンの法則})$$

$$\textcircled{8} 0 \vee A = A, 0 \cdot A = 0 \quad (\text{最小元})$$

$$\textcircled{9} 1 \vee A = 1, 1 \cdot A = A \quad (\text{最大元})$$

ただし, $A, B \in V_m$

しかし, $\sim A \vee A = 1, \sim A \cdot A = 0$ (相補則) が成立しない

のが特徴的である。相補則の代わりにそれよりも弱い等式であるクリーネ則が成立する。

$$\textcircled{10} A \cdot \sim A \vee B \vee \sim B = B \vee \sim B,$$

$$A \cdot \sim A \cdot (B \vee \sim B) = A \cdot \sim A \quad (\text{クリーネ則})$$

また m が奇数のとき, $\sim(k/(m-1)) = k/(m-1)$, m が偶数のとき, $\sim(k/(m-1)) \neq k/(m-1)$ である。なお, クリーネ代数においては, $\sim i = i$ なる真理値が存在すれば, それは唯一であることが知られている。

3. あいまいさに関する半順序関係

正則多値論理関数は V_m^n から V_m への写像を行う関数の中で, ある特殊な条件を満足する関数である。ここでは正則多値論理関数が満足すべき条件を考察しその性質を明らかにする。

真理値の集合 V_m にあいまいさに関する半順序関係 $>$ を次のように定義する。

[定義 3] $A, B \in V_m$ とするとき $A > B$ であるのは, $1/2 \geq A \geq B \geq 0$ か又は $1/2 \leq A \leq B \leq 1$ なるとき, 及びそのときに限る。

このあいまいさに関する半順序関係 $>$ を図に示すと, m が奇数のときには図 2, m が偶数のときには図 3 のようになる。

この関係の意味していることは m が奇数ならば V_m に $1/2$ が存在し, この $1/2$ があいまいさ最大, m が偶数ならば V_m に $1/2$ が存

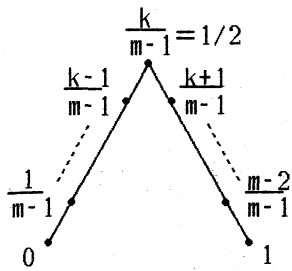


図2. あいまいさに関する半順序
関係 $\succ$ (m が奇数のとき)

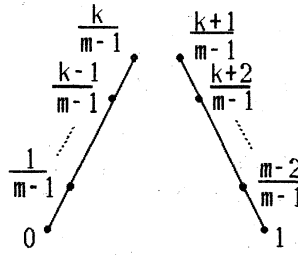


図3. あいまいさに関する半順序
関係 $\succ$ (m が偶数のとき)

在せず $k/(m-1), (k+1)/(m-1)$ があいまいさに関して極大となる。
また m が奇数ならばあいまいさ最大の $1/2$ を前後として $\{0, \dots, (k-1)/(m-1)\}$ の元と $\{(k+1)/(m-1), \dots, 1\}$ の元とは比較不可能であり、あいまいさ最大の $1/2$ は V_m すべての元と比較可能である。
 m が偶数ならば $\{0, \dots, k/(m-1)\}$ の元と $\{(k+1)/(m-1), \dots, 1\}$ の元とは比較不可能であり、 V_m すべての元と比較可能な元は存在しない。つまり任意の元 $A, B \in V_m$ について A と B の半順序関係 $\succ$ に関する最小の上界(上限)は m が奇数ならば必ず存在するが、 m が偶数のときには必ずしも存在しない。

[例] $m = 5$ で $V_5 = \{0, 1/4, 2/4, 3/4, 1\}$,

$A = 1/4, B = 2/4, C = 1$ とすると,

$B \succ A \quad B \succ C \quad A$ と C は比較不可能。

なお定義3の半順序関係 $\succ$ を V_m^n の元についても次のように拡張定義する。

[定義4] $A = (A_1, \dots, A_n), B = (B_1, \dots, B_n)$ を V_m^n の元とするとき $A \succ B$ であるのは、すべての $i = 1, \dots, n$ につい

て $A \succ B$ になるとき, 及びそのときに限る.

[例] $m = 5$ で $V_5^3 = \{0, 1/4, 2/4, 3/4, 1\}^3$,

$A = (0, 1/4, 3/4)$ $B = (2/4, 2/4, 3/4)$ $C = (0, 2/4, 1)$ と

すると, $B \succ A$ $B \succ C$ A と C は比較不可能.

[定理 1] (あいまいさにおける単調性)

F を正則多値論理関数, A, B を V_m^n の元とするとき $A \succ B$

ならば $F(A) \succ F(B)$ である.

(証明) 論理演算の数に関する数学的帰納法を用いて証明する. 定数 $0, 1/(m-1), \dots, (m-2)/(m-1), 1$ 及び変数 $x_i (i = 1, \dots, n)$ が定理を満足することは明か. t 個以下の論理演算記号を含む正則多値論理関数が定理を満足しているものとする. F を $(t+1)$ 個の論理演算記号を含む正則多値論理関数とする. F は $\sim G, G \cdot H, G \vee H$ のいずれかである. いま, $A \succ B$ ならば $G(A) \succ G(B)$ とすると, $1/2 \geq G(A) \geq G(B)$ か又は, $1/2 \leq G(A) \leq G(B)$ のいずれかである. $1/2 \geq G(A) \geq G(B)$ ならば, $1/2 \leq 1 - G(A) = \sim G(A) \leq 1 - G(B) = \sim G(B)$, $1/2 \leq G(A) \leq G(B)$ ならば, $1/2 \geq 1 - G(A) = \sim G(A) \geq 1 - G(B) = \sim G(B)$, すなわち, いずれの場合も $\sim G(A) \succ \sim G(B)$ となり, $\sim G$ は定理を満足する. 次に, $A \succ B$ ならば $G(A) \succ G(B)$, $H(A) \succ H(B)$ とすると, $1/2 \geq G(A) \geq G(B)$ か又は $1/2 \leq G(A) \leq G(B)$, $1/2 \geq H(A) \geq H(B)$ か又は $1/2 \leq$

$H(A) \leq H(B)$ が成立している。いま、 $1/2 \geq G(A) \geq G(B)$ 、
 $1/2 \geq H(A) \geq H(B)$ とすると $1/2 \geq G(A) \vee H(A) \geq G(B) \vee H(B)$ より $(G \vee H)(A) \geq (G \vee H)(B)$ 、 $1/2 \geq G(A) \geq G(B)$ 、 $1/2 \leq H(A) \leq H(B)$ とすると $1/2 \leq G(A) \vee H(A) = H(A) \leq G(B) \vee H(B) = H(B)$ より $(G \vee H)(A) \geq (G \vee H)(B)$ となる。他のいずれの場合も同様に $(G \vee H)(A) \geq (G \vee H)(B)$ となるから、 $G \vee H$ は定理を満足する。 $G \cdot H = \sim(\sim G \vee \sim H)$ より、 $\sim$ 、 $\vee$ が定理を満足しているから、 $G \cdot H$ も定理を満足する。以上によりすべての正則多値論理関数は定理を満足する。(証明終)

定理 1 により任意の正則多値論理関数は、あいまいさの関係 $\succ$ について単調性を満たしていることが示された。すなわち、入力によりあいまいになれば、関数値は変わらないか又はよりあいまいさを増すということが示された。

[例] F を正則 5 値論理関数とする。 $F(x_1, x_2, x_3) =$

$$x_1 x_2 \sim x_2 \vee 2/4 \sim x_1 \sim x_3$$

$A = (1/4, 2/4, 3/4) \succ B = (0, 1/4, 3/4)$ とすると、

$$F(A) = 1/4 \succ F(B) = 1/4$$

$A = (3/4, 1/4, 3/4) \succ B = (3/4, 0, 1)$ とすると、

$$F(A) = 1/4 \succ F(B) = 0$$

4. 正則多値論理関数における量子化定理

正則多値論理関数の性質を述べる上で重要な定理である正則多値論理関数に関する量子化定理を次ぎに示す.

$V_3 = \{0, 1/2, 1\}$ としたとき, V_m^n を V_3^n で近似するとき次の定義を置く. ただし, m が偶数のときには $1/2$ は $k/(m-1)$ を意味するものとする. これ以降, $V_3 = \{0, 1/2, 1\}$ し $1/2$ は m が偶数のときには先のように取り扱うことにする.

[定義5] A を V_m の元とする. $0 < \alpha \leq 1/2$ なる任意の定数 α に対して次のようにして得られる値 $\bar{A}^\alpha$ を α を基準に A を量子化した値という.

$$\alpha \leq A \leq 1 - \alpha \quad \text{ならば} \quad \bar{A}^\alpha = 1/2$$

$$0 \leq A < \alpha \quad \text{ならば} \quad \bar{A}^\alpha = 0$$

$$1 - \alpha < A \leq 1 \quad \text{ならば} \quad \bar{A}^\alpha = 1$$

また, $A = (A_1, \dots, A_n)$ を V_m^n の元とするとき $\bar{A}^\alpha$ を $\bar{A}^\alpha = (\bar{A}_1^\alpha, \dots, \bar{A}_n^\alpha)$ で定義する.

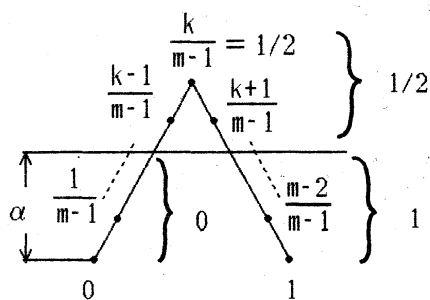


図4. α による量子化(m が奇数のとき)

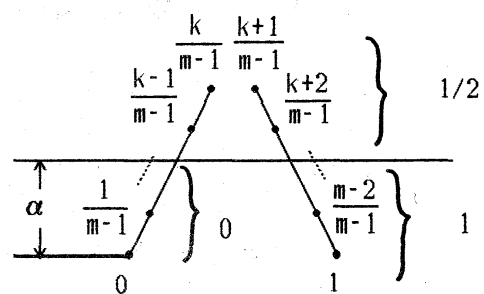


図5. α による量子化(m が偶数のとき)

[例] $m = 5$ のとき, $\alpha = 1/4$ とすると,

$A = (2/4, 1/4, 1)$ ならば $\bar{A}^\alpha = (1/2, 1/2, 1)$

$m = 4$ のとき, $\alpha = 1/3$ とすると,

$A = (1/3, 2/3, 0)$ ならば $\bar{A}^\alpha = (1/3, 1/3, 0)$

[定理 2] (正則多値論理関数に関する量子化定理)

F を正則多値論理関数, A を V_{m^n} の元とする. $0 < \alpha \leq 1/2$

なる任意の α に対して

$F \bar{c}^\alpha(\bar{A}^\alpha) = \overline{F(A)}^\alpha$ である. ただし, $F \bar{c}^\alpha$ は F を表現する論理式の定数を α で量子化したものである.

(証明) 論理演算の数に関する数学的帰納法を用いて証明す

る. 定数 $0, 1/(m-1), \dots, (m-2)/(m-1), 1$ 及び変数 $x_i (i = 1, \dots,$

$n)$ が定理を満足することは明か. いま, ある正則多値論理関

数 G が定理を満たすとする. $(\sim G)$ も定理を満たす. なぜなら

ば, $\overline{(\sim G)(A)}^\alpha = \overline{1 - G(A)}^\alpha = 1 - \overline{G(A)}^\alpha = (\sim G \bar{c}^\alpha)(\bar{A}^\alpha)$. 次

に, ある正則多値論理関数 G, H が定理を満たしているとき, $($

$G \vee H)$ も定理を満たす. なぜならば, $G(A) \geq H(A)$ とすると

, $\overline{G(A)}^\alpha \geq \overline{H(A)}^\alpha$, すなわち, $G \bar{c}^\alpha(\bar{A}^\alpha) \geq H \bar{c}^\alpha(\bar{A}^\alpha)$ より, $\overline{(G \vee H$

$)(A)}^\alpha = \overline{G(A) \vee H(A)}^\alpha = \overline{G(A)}^\alpha = G \bar{c}^\alpha(\bar{A}^\alpha) = G \bar{c}^\alpha(\bar{A}^\alpha) \vee H \bar{c}^\alpha$

$(\bar{A}^\alpha) = (G \bar{c}^\alpha \vee H \bar{c}^\alpha)(\bar{A}^\alpha)$. $G(A) \leq H(A)$ としても同様. また

, G, H が定理を満たしているとき $(G \cdot H)$ も定理を満たす. な

ぜならば, $(G \cdot H) = \sim(\sim G \vee \sim H)$. 以上により, すべての正

則多値論理関数について定理が成立する.

(証明終)

定理 2 の意味することは, 入力ベクトルと正則多値論理関数を表現する論理式の定数がある値 α で量子化して出力した値と, 入力ベクトルをそのまま正則多値論理関数で出力して, その出力値がある値 α で量子化した値とが一致するということである.

[例] F を正則 5 値論理関数とする.

$F(x) = 1/4 \cdot x \quad \alpha = 1/4$ とする. $x = 1$ のとき

$$\overline{F(1)}^\alpha = \overline{1/4 \cdot 1}^\alpha = 1/2 \quad F \overline{1}^\alpha = 1/4 \cdot \overline{1}^\alpha = 1/2$$

[系 1] G, H を正則多値論理関数とする. V_m^n のすべての元 A において $G(A) > H(A)$ になるとき, 及びそのときに限り, V_m^n のすべての元 A において $G(A) > H(A)$ である.

(証明) V_m^n のすべての元 A において $G(A) > H(A)$ と仮定する. すると, $0 < \alpha \leq 1/2$ なる任意の α において $\overline{G(A)}^\alpha > \overline{H(A)}^\alpha$, すなわち, $G \overline{A}^\alpha > H \overline{A}^\alpha$ である. このとき, V_m^n のある元 A において $G(A) \not> H(A)$ とする. これは, (1) $G(A)$ と $H(A)$ が比較不可能である. または, (2) $H(A) \geq G(A)$ のいずれかである.

(1) の場合

$G(A) \neq 1/2, H(A) \neq 1/2$ であるから, $\overline{G(A)}^{1/2}$ と $\overline{H(A)}^{1/2}$

とは比較不可能. すなわち, 定理 2 より $G \overline{A}^{1/2}$ と $H \overline{A}^{1/2}$

$(\bar{A}^{1/2})$ とは比較不可能である.このことは仮定に反する.

(2)の場合

$(G(A) + H(A))/2 = \alpha'$ と置くとき, $\alpha =$

$\min(\alpha', 1 - \alpha')$ で量子化すると, $\overline{H(A)}^\alpha = 1/2, \overline{G}$

$\overline{(A)}^\alpha = i$ (i は0又は1).よって, $H \bar{c}^\alpha(\bar{A}^\alpha) = \overline{H(A)}^\alpha \geq$

$\overline{G(A)}^\alpha = G \bar{c}^\alpha(\bar{A}^\alpha)$ となり仮定に反する.

逆の場合は明らかである.(証明終)

[系2] G, H を正則多値論理関数とする. V_m^n のすべての元 A において, $G(A) \geq H(A)$ なるとき, 及びそのときに限り, V_m^n のすべての元 A において, $G(A) \geq H(A)$ である.

(証明) V_m^n のすべての元 A において $G(A) \geq H(A)$ と仮定する.すると, $0 < \alpha \leq 1/2$ なる任意の α において $\overline{G(A)}^\alpha \geq \overline{H(A)}^\alpha$, すなわち, $G \bar{c}^\alpha(\bar{A}^\alpha) \geq H \bar{c}^\alpha(\bar{A}^\alpha)$ である.このとき, V_m^n のある元 A において, $G(A) \geq H(A)$ であるとする.これは, $H(A) > G(A)$ であるから, $(G(A) + H(A))/2 = \alpha'$ と置くとき, $\alpha = \min(\alpha', 1 - \alpha')$ で量子化すると, $H \bar{c}^\alpha(\bar{A}^\alpha) = \overline{H(A)}^\alpha > \overline{G(A)}^\alpha = G \bar{c}^\alpha(\bar{A}^\alpha)$ となり仮定に反する.逆の場合は明らかである.(証明終)

正則多値論理関数は入力ベクトル V_m^n の元に対して1つの値が定まるものであるが, 実はこの論理関数は次に述べるように入力ベクトル V_m^n の元に対する値ですべての値が一意的に

定まってしまうものである。つまり，正則多値論理関数は本質的に V_3^n の元で決定されているのである。

〔定理 3〕 G, H を正則多値論理関数とする。 V_3^n のすべての元 A において， $G(A) = H(A)$ になるとき，及びそのときに限り， V_m^n のすべての元 A において， $G(A) = H(A)$ である。

(証明) 系 2 より明か。(証明終)

定理 3 が証明されたことにより，正則多値論理関数は入力ベクトル V_3^n の元における値ですべての値が一意的に定まることが保証されたことになる。

〔例〕 正則 4 値論理関数を $F_1 = x \cdot \sim x$ ，
 $F_2 = 1/3 x \cdot \sim x$ とする。いま， $V_4 = \{0, 1/3, 2/3, 1\}$ のすべての元 A において， $F_1(A) = F_2(A)$ である。また， $V_3 = \{0, 1/3, 1\}$ のすべての元 A において， $F_1(A) = F_2(A)$ である。

5. 正則多値論理関数における表現定理と P 形論理関数

次に，正則多値論理関数の表現定理(2 値論理関数のシャノン展開に相当する)について述べる。正則多値論理関数では，分配則，べき等則等が成立するので任意の正則多値論理関数は加法形式に展開できる。ただし，相補法則が成立しないので，ある変数について肯定，否定を同時に含む項が存在する。これらを次ぎに定義する。

〔定義 6〕 変数 x または変数の否定 $\sim x$ を文字といい，同

じ文字を二度以上含まない文字のANDを積項という。積項のうち、ある変数について肯定、否定両方を同時に含まないものを単積項、含むものを相補積項という。

[定義7] すべての変数が現われるような相補積項を相補最小項と呼ぶ。

次に、単積項と相補最小項の性質について述べる。

[定義8] $A = (A_1, \dots, A_n) \in V_3^n$ に対応する単積項

$$\alpha \text{ とは, } x_1^{A_1} \cdot \dots \cdot x_n^{A_n}$$

$$\text{ただし, } A_i = 0 \text{ のとき } x_i^{A_i} = \sim x_i$$

$$A_i = 1 \text{ のとき } x_i^{A_i} = x_i$$

$$A_i = 1/2 \text{ のとき } x_i^{A_i} = 1 \text{ なる式をいう。}$$

上で定義した集合 V_3^n の元と単積項との対応は明らかに一対一対応である。

[定義9] $A = (A_1, \dots, A_n) \in V_3^n - V_2^n$ に対応する

$$\text{相補最小項 } \beta \text{ とは, } x_1^{A_1} \cdot \dots \cdot x_n^{A_n}$$

$$\text{ただし, } A_i = 0 \text{ のとき } x_i^{A_i} = \sim x_i$$

$$A_i = 1 \text{ のとき } x_i^{A_i} = x_i$$

$$A_i = 1/2 \text{ のとき } x_i^{A_i} = x_i \cdot \sim x_i$$

なる式をいう。

上で定義した集合 $V_3^n - V_2^n$ の元と相補最小項との対応は明らかに一対一対応である。

[定理 4] (正則多値論理関数の表現定理)

F を正則多値論理関数とする。このとき、

$$F(x) = \bigvee_{A \in V_3^n} \{ \bigwedge_{A' \succ A} F(A') \cdot \alpha_A(x) \vee F(A) \cdot \beta_A(x) \}$$

$F(A) \cdot \beta_A(x)$ が成立する。ただし、 α_A は A に対応する単積項、 β_A は A に対応する相補最小項 ($A \in V_2^n$ のときには $\beta_A = 0$ とする) である。(証明略)

上の定理を 1 変数に適用すると $F(x) = F(0) \sim x \vee F(1) \cdot x \vee F(0)F(1)F(1/2) \vee F(1/2)x \sim x$ となる。よって、

任意の n 変数の正則多値論理関数において、 V_m^n の元 $A = (A_1, \dots, A_{i-1}, x_i, A_{i+1}, \dots, A_n)$ に対して $A_1, \dots, A_{i-1},$

$A_{i+1}, \dots, A_n$ をそれぞれ V_m の元に固定し、 x_i を変数とすると

、一般に $F(x_i) = F_0 \sim x_i \vee F_1 x_i \vee F_0 F_1 F_{1/2} \vee F_{1/2} \cdot$

$x_i \sim x_i$ となる⁽¹³⁾。ただし、

$$F_0 = F((A_1, \dots, A_{i-1}, 0, A_{i+1}, \dots, A_n))$$

$$F_1 = F((A_1, \dots, A_{i-1}, 1, A_{i+1}, \dots, A_n))$$

$$F_{1/2} = F((A_1, \dots, A_{i-1}, 1/2, A_{i+1}, \dots, A_n))$$

である。

次に、正則多値論理関数にをける P 形論理関数について述べ

る。

正則多値論理関数 F_1 と F_2 が, 入力ベクトル $V_2^n = \{0, 1\}^n$ のみで見たととき等しいとき, 次の定義を置く。

[定義 1 0] 正則多値論理関数 F_1 と F_2 が V_2^n のすべての元 A において $F_1(A) = F_2(A)$ になるとき, F_1 と F_2 とは V_2 -equivalent であるという。 F と V_2 -equivalent である正則多値論理関数からなる集合を $Veq(F)$ で表す。

次に, ある正則多値論理関数 F から次のような 3 値論理関数 f_s^3 を定義する。

[定義 1 1] 正則多値論理関数を F とする。 V_2^n のすべての元 A において,

$$f_s(A) = \begin{cases} 1 & F(A) \geq s/(m-1) \\ 0 & \text{その他のとき} \end{cases} \quad \text{ただし, } s=1, \dots, m-1$$

なる 2 値論理関数を考える。この 2 値論理関数 f_s を主項 (Prime implicant) 展開した論理式が表現する 3 値論理関数を f_s^3 と記すことにする。 f_s^3 は P 形の B-3 値論理関数である (1)。

$V_3 = \{0, 1/2, 1\}$ あいまいさに関する半順序関係 $>$ を導入する。

[定義 1 2] $1/2 > 0, 1/2 > 1, i > i \in V_3$ 。0 と 1 は比較不可能である。また, V_3^n の元にまで次のように拡張定義する

$\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_n), \mathbf{B} = (B_1, \dots, B_n)$ を V_3^n の元とするとき $\mathbf{A} > \mathbf{B}$ であるのは、すべての $i = 1, \dots, n$ について $A_i > B_i$ になるとき、及びそのときに限る。

次に、 $B - 3$ 値論理関数における性質をいくつか述べる。集合 V_3^n はあいまいさについての関係 $>$ に関して、半順序集合をなしている。半順序集合 V_3^n における極大元は $(1/2, \dots, 1/2)$ で、最大元となる。極小元は 2^n 個存在して、それは V_2^n の元である。

[定義 1.3] $\mathbf{A} \in V_3^n$ において、 $\mathbf{A}$ が含むすべての極小元からなる集合を $\mathbf{A}^*$ で表すことにする。すなわち、 $\mathbf{A}^* = \{ \mathbf{A}' \mid \mathbf{A} > \mathbf{A}' \in V_2^n \}$ 。 $B - 3$ 値論理関数 f_{s^3} において、 $f_{s^3}(\mathbf{A}^*)$ で $f_{s^3}(\mathbf{A}')$ のとる値の集合を表すことにする。すなわち、 $f_{s^3}(\mathbf{A}^*) = \{ f_{s^3}(\mathbf{A}') \mid \mathbf{A} > \mathbf{A}' \in V_2^n \}$ 。

f_{s^3} は、 $B - 3$ 値論理関数における P 形論理関数と同じ表現であった。よって、

[補題 1] $B - 3$ 値論理関数 f_{s^3} は次の条件を満足する。

$$(1) f_{s^3}(\mathbf{A}) = 1/2 \Rightarrow f_{s^3}(\mathbf{A}^*) = \{1, 0\}$$

$$(2) f_{s^3}(\mathbf{A}) = 1 \Rightarrow f_{s^3}(\mathbf{A}^*) = \{1\}$$

$$(3) f_{s^3}(\mathbf{A}) = 0 \Rightarrow f_{s^3}(\mathbf{A}^*) = \{0\}$$

ただし、 $\mathbf{A} \in V_3^n$ (証明略)

定義 1.1 と補題 1 により、 $f_1^3 \supseteq \dots \supseteq f_{n-1}^3$ なる関係が存在

する。ここで、正則多値論理関数に関する P 形論理関数を定義する。

[定義 1 4] 正則多値論理関数 F が P 形論理関数であるのは $V_{eq}(F)$ のすべての元 F' において、 $F' \succ F$ なるとき、及びそのときに限る。ただし、 $F' \succ F$ であるとは V_m^n のすべての元 A において、 $F'(A) \succ F(A)$ であるとき、及びそのときをいう。

[定理 5] ある正則多値論理関数 F と V_2 -equivalent な P 形論理関数 F_P は、

$$F_P = \frac{1}{m-1} f_1 \circ \vee \cdots \vee \frac{1}{m-1} f_1 \circ \vee \cdots \vee f_{m-1} \circ \quad \text{である。}$$

(証明略)

$V_3 = \{0, 1/2, 1\}$ において真理値 $1/2$ を 0 か 1 かわからない、不確定な状態を表す真理値とする。つまり、標準な入力ベクトルはその元が 0 又は 1 からなる V_2^n の元となる。ここである正則多値論理関数 F を考える。いま、入力ベクトル $A_1 = (1, 0, 0)$ 、 $A_2 = (1, 1, 0)$ に対して $F(A_1) = F(A_2) = 1$ とする。ここで、 $A_3 = (1, 1/2, 0)$ なる入力ベクトルを考えると A_3 の 2 番目の元は 0 か 1 かわからない不確定な状態である。しかしながら A_3 の不確定な状態が確定されたときに取ると考えられる V_2^n の元は、 A_1, A_2 である。そして、いま $F(A_1) = F(A_2) = 1$

$A_2) = 1$ であるのに $F(A_3)$ が1以外の値を取るとしたならば,これはある意味で情報が失われたと考えられる. P形論理関数は入力ベクトルに不確定な状態が現れても,その情報の損失を最小にする正則多値論理関数といえる.

[例] 正則5値論理関数 F を考える. V_2^2 の元における出力が表1のようであったとする. F と

V_2 -equivalentな P形論理関数 F_P は $F_P = 1/4(x_1 \vee x_2) \vee 2/4 x_1 \vee x_1 \sim x_2$ である. この真理値表は表2の通りとなる. なお,上式は $F_P = 1/4 x_2 \vee 2/4 x_1 \vee x_1 \sim x_2$ と簡単化され

$x_2 \backslash x_1$	0	1
0	0	1
1	1/4	2/4

表1. F の V_2^2 の元における出力

$x_2 \backslash x_1$	0	1/4	2/4	3/4	1
0	0	1/4	2/4	3/4	1
1/4	1/4	1/4	2/4	3/4	3/4
2/4	1/4	1/4	2/4	2/4	2/4
3/4	1/4	1/4	2/4	2/4	2/4
1	1/4	1/4	2/4	2/4	2/4

表2. F と V_2 -equivalentな P形論理関数の真理値表

る. 簡単化のアルゴリズムについては既に知られているが,ここでは省略する.

奇数値の正則多値論理関数の場合(偶数の場合にも同様に考

察できる)に, P 形の正則多値論理関数には, 次の性質がある.

[定理 6] F_P を P 形の正則多値論理関数とする. このとき,

$$\forall A \in V_3^n \text{ のすべての元 } A \text{ について, } F_P(A) = \bigvee_{A' \in A} F_P(A')$$

ここで, $\vee$ は図 2 の半順序集合における上限を表している.

(証明略)

定理 3 より正則多値論理関数の値は V_3^n の入力に対する値で一意的に定まってしまい, P 形の場合には, 特に上の定理から分かるように, A^* の元, すなわち 0 と 1 のみからなる V_2^n の入力に対する値で一意的に定まってしまうことが分かる.

参考文献

- (1) 向殿: “B-三値論理関数について…あいまいさを考慮した三値論理関数”, 信学論, vol.55-D, NO.6(1972)
- (2) M. Mukaidono and I.G. Rosenberg: “k-valued functions for treating ambiguities… Their clone and a normal form”, Proc. 10-th ISMVL(1986)
- (3) 向殿: “Fuzzy論理関数における二, 三の性質について”, 信学論, vol.58-D, NO.3 (1975)
- (4) 向殿: “Fuzzy論理関数の代数的構造とその最簡形式及び既約形式”, 信学論, vol.58-D, NO.12(1975)
- (5) M. Mukaidono: “Regular ternary logic functions… Ternary logic functions for treating ambiguity”, IEEE Trans. Comput. vol.c-35, NO.2(1986); Proc. 13-th ISMVL(1983)
- (6) 荒木: “定数係数を持ったfuzzy論理関数の研究”, 昭和61年度明治大学大学院工学研究科修士論文(1987)
- (7) Y. Yamamoto and M. Mukaidono: “P-Ternary logic functions… Ternary logic functions capable of correcting input failures”, Proc. 17-th ISMVL (1987)
- (8) Y. Yamamoto and M. Mukaidono: “Ambiguity decision tables and P-ternary logic functions”, Prco.

18-th ISMVL(1988)

- (9) 山本, 藤田: “3 値多数決関数”, 信学論, j63-D, NO.6 (1980)
- (10) Y.Yamamoto and M.mukaidono: “Meaningful special classes of ternary logic functions… Regular ternary logic functions and ternary majority functions”, Trans. Comput. vol.37, NO.7 (1988)
- (11) 畑, 中島, 大和, 北橋: “2 値入力 P 値出力関数から生成される P 値論理関数とその論理式決定”, 信学論, vol.j71-D, NO.12(1988)
- (12) 大和, 中島, 畑, 佐藤: “2 値入力 P 値出力関数から P 値論理関数を得るための生成規則について”, 多値論理研究ノート, vol.10, NO.3(1988)
- (13) 大和, 中島, 畑, 佐藤: “多値 AND, OR, NOT, 定数によって表現される多値論理関数の必要十分条件とその論理式決定”, 多値論理研究ノート, vol.11, NO.8 (1989)