

Reflection-Extension of Fusion Algebras

名大・理 岡田 聡 一 (Soichi Okada)

§1. 定義と結果.

Fusion algebra は, 数理解析物理学 (共形場理論) において重要な役割を果たしている可換代数であるが, 坂内 英一氏 [B1] ([B2] も見よ) によって純代数的に次のように定式化された.

定義. (代数的レベルでの fusion algebra) $\mathfrak{A} = \langle x_0, x_1, \dots, x_d \rangle$ を, $x_0, \dots, x_d$ を基底とする $\mathbb{C}$ 上の線型空間 $\mathfrak{A}$ 上に, 積 $x_i x_j = \sum_{k=0}^d N_{ij}^k x_k$ が定義された代数とする. これが次の条件を満たすとき, $\mathfrak{A}$ を代数的レベルでの fusion algebra と呼ぶ.

- (1) $\mathfrak{A}$ は可換な結合的代数である.
- (2) $N_{ij}^k \in \mathbb{R}$.
- (3) $\{0, 1, \dots, d\}$ から $\{0, 1, \dots, d\}$ への全単射 $\hat{\cdot}: i \mapsto \hat{i}$ が存在して次の 3 条件を満たす.
 - (a) $\hat{\hat{i}} = i$.
 - (b) $N_{\hat{i}\hat{j}}^{\hat{k}} = N_{ij}^k$.
 - (c) $N_{ijk} := N_{ij}^{\hat{k}}$ は i, j, k に関して対称である.
- (4) $N_{0j}^k = \delta_{jk}$.
- (5) $\mathfrak{A}$ の 1 次元表現 $\Delta_{\mathfrak{A}}$ で $\Delta_{\mathfrak{A}}(x_i) = \sqrt{k_i} (k_i > 0) (i = 0, 1, \dots, d)$ となるものが存在する.

また, N_{ij}^k がすべて非負整数であるとき, $\mathfrak{A}$ は integral であるという.

ここで, 次の状況を考える. $\mathfrak{A} = \langle x_0, \dots, x_d \rangle$, $\mathfrak{B} = \langle y_0, \dots, y_{d'} \rangle$ を代数的レベルでの fusion algebra, $F: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ を環準同型とし,

$$F(x_j) = \sum_{i=0}^{d'} F_{ij} y_i$$

と表わす. このとき, 次の条件が成り立つと仮定する.

- (1.1) $F_{ij} \in \mathbb{R}$.
- (1.2) F は全射である.
- (1.3) $F_{\hat{i}\hat{j}} = F_{ij}$.
- (1.4) $\Delta_{\mathfrak{B}} \circ F = \Delta_{\mathfrak{A}}$.

例 1.1. 有限群 G の複素数値関数全体のなす空間 $C(G)$ は, 基底として既約指標 $\chi_0 = 1_G, \chi_1, \dots, \chi_d$ をとり, 積を $\chi_i \otimes \chi_j = \sum_{k=0}^d N_{ij}^k \chi_k$ と定義することによって, integral な fusion algebra となる. H を G の部分群とし, $F = \text{Res}_H^G : C(G) \rightarrow C(H)$ を G 上の関数の H への制限とすると, 上の仮定 (1.1), (1.3), (1.4) が成り立つ. このとき, F が全射となるための必要十分条件は, 任意の $h \in H$ に対して, h の G -共役類と H との共通部分が 1 つの H -共役類となることである.

例 1.2. $\mathfrak{A}$ を任意の fusion algebra, $\mathfrak{B} = \mathbb{C}$ を 1 次元の fusion algebra とする. このとき, F として, 定義の条件 (5) に現われる $\Delta_{\mathfrak{A}}$ をとると, 上の仮定 (1.1) - (1.4) が満たされる.

上の状況のもとで, $\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ の線型空間としての直和 $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$ の上に可換な積を次のように定義する. $x, x' \in \mathfrak{A}, y, y' \in \mathfrak{B}$ に対して,

$$(x \oplus y)(x' \oplus y') = (xx' + F^*(yy')) \oplus (F(x)y' + yF(x') + FF^*(yy') - yy')$$

ここで, $F^*(y_i) = \sum_{j=0}^d F_{ij} x_j$ である.

定理 1.3. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, F$ が仮定 (1.1) - (1.4) を満たすとき, 上のようにして定義した $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$ 上の積は, 結合的である. そして, $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$ は, 基底 $\{x_i \oplus 0 : i = 0, \dots, d\} \cup \{0 \oplus y_j : j = 0, \dots, d'\}$ に関して fusion algebra となる. さらに, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ が integral であり, F_{ij} が全て非負整数であるならば, fusion algebra $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$ も integral となる.

このようにしてできた fusion algebra $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$ を $\mathfrak{C}(\mathfrak{A} \xrightarrow{F} \mathfrak{B})$ と表わす.

命題 1.4. $\tilde{F} : \mathfrak{C}(\mathfrak{A} \xrightarrow{F} \mathfrak{B}) \rightarrow \mathfrak{A}$ を $\tilde{F}(x \oplus y) = x + F^*(y)$ によって定義すると, $\tilde{F}$ は環準同型となり, 仮定 (1.1) - (1.4) を満たす.

従って, 上の構成は次々と繰り返すことができる.

§2. Differential poset.

R. Stanley [S1] は, differential poset と呼ばれる半順序集合のクラスを定義したが, このクラスの半順序集合はその chain の個数などに関して多くの興味深い性質を持っている. §.1 の fusion algebra の構成は, 以下に述べる differential poset の reflection-extension による構成に示唆されたものである.

P を半順序集合 (poset = partially ordered set) とする. $x, y \in P$ に対して, $x > y$ であり $x > z > y$ となる元 z が存在しないとき, x は y を覆う (cover) といい, $x \triangleright y$ と表わす. そして,

$$C^+(x) = \{y \in P : y \triangleright x\}, \quad C^-(x) = \{y \in P : y \triangleleft x\}$$

とおく. 半順序集合 P が $P = \coprod_{n \geq 0} P_n$ と部分集合 P_n の disjoint union に分割され, $x \in P_n, x \triangleright y \implies y \in P_{n-1}$ が成り立つとき, P は graded poset であるという. また, P の任意の区間 $[x, y] = \{z \in P : x \leq z \leq y\}$ が有限集合であるとき, P は locally finite であるという.

定義. ([S1]) r を正整数とする. 半順序集合 P は次の条件を満たすとき, **r -differential poset** であるという.

- (D1) P は locally finite な graded poset であり, 最小元 $\hat{0}$ を持つ.
- (D2) $x, y \in P$ に対して, $x \neq y$ ならば, $\#(C^-(x) \cap C^-(y)) = \#(C^+(x) \cap C^+(y))$
- (D3) $x \in P$ に対して, $\#C^+(x) = r + \#C^-(x)$.

P を locally finite poset とし, 各 $x \in P$ に対して $C^+(x)$ が有限集合であるとする. $\mathbb{C}P$ を P の元を基底とする $\mathbb{C}$ 線型空間とする. $\mathbb{C}P$ 上の線型変換 U, D を

$$Ux = \sum_{y \triangleright x} y, \quad Dx = \sum_{y \triangleleft x} y$$

によって定義する. このとき, r -differential poset の定義は次のように言い替えることができる.

命題 2.1. P が r -differential poset の条件 (D1) を満たし, 各 P_n が有限集合であるとする. このとき, 次は同値である.

- (1) P は r -differential poset である.
- (2) $DU - UD = rI$.

この関係式を用いることによって, differential poset に関する数え上げ問題を解くことができる. 特に,

命題 2.2. P を r -differential poset とする. $x \in P_n$ に対して,

$$e(x) = \#\{(x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) : x^{(0)} = \hat{0}, x^{(n)} = x, x^{(i+1)} \triangleright x^{(i)} (i = 0, \dots, n-1)\}$$

とおくと,

$$(1) \sum_{x \in P_n} e(x)^2 = r^n n!.$$

$$(2) \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{x \in P_n} e(x) \right) t^n / n! = \exp(rt + rt^2/2).$$

さて, 1-differential poset の典型的な例は, 分割全体が Young 図形の包含関係に関して Young 束 $\mathbf{Y}$ である. Young 束の場合, $\mathbf{CY}$, U , D は次のように表現論な意味を持っている. n の分割 $\lambda \in \mathbf{CY}_n$ と λ に対応する $\mathfrak{S}_n$ の既約指標 $\chi^\lambda \in C(\mathfrak{S}_n)$ を同一視することによって, $\mathbf{CY}_n$ は $C(\mathfrak{S}_n)$ と同一視され, fusion algebra の構造が入る. このとき, $D: \mathbf{CY}_n \rightarrow \mathbf{CY}_{n-1}$ は制限写像 $\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n}: C(\mathfrak{S}_n) \rightarrow C(\mathfrak{S}_{n-1})$ と対応し, 環準同型となり, $U: \mathbf{CY}_n \rightarrow \mathbf{CY}_{n+1}$ は誘導写像 $\text{Ind}_{\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{n+1}}$ となる. よって次の問題が考えられる.

問題. 1-differential poset P に対して, 各 $\mathbf{CP}_n$ に $D|_{\mathbf{CP}_n}$ が環準同型となるような fusion algebra の構造が入るか?

1-differential poset を作り出す方法として, 次の reflection-extension がある. ([S1, §6] を見よ.) $P = \coprod_{i=0}^n P_i$ を graded poset とし, $0 \leq i \leq n-1$ に対して, $(DU - UD)|_{\mathbf{CP}_i} = I_{\mathbf{CP}_i}$ を満たしているとする. このとき,

$$P_{n+1} = \{(1, x) : x \in P_n\} \cup \{(2, y) : y \in P_{n-1}\}$$

とおき, P_n と P_{n+1} の間の半順序を

$$C^-(1, x) = \{x\}, \quad C^-(2, y) = C^+(y) \quad (x \in P_n, y \in P_{n-1})$$

によって定義する. すると, $E(P) = P \coprod P_{n+1}$ は, $0 \leq i \leq n+1$ に対して, $(DU - UD)|_{\mathbf{CP}_i} = I_{\mathbf{CP}_i}$ を満たす graded poset となる. よって, これを繰り返し $E^0(P) = P$, $E^{k+1}(P) = E(E^k(P))$ と定義すると,

$$E^\infty(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} E^n(P)$$

は 1-differential poset となる.

§1 の fusion algebra の構成はこの differential poset の構成と対応している. つまり, fusion algebra $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ がそれぞれ P_n , P_{n-1} の元と対応した基底を持ち, $\mathfrak{A} = \mathbb{C}P_n$, $\mathfrak{B} = \mathbb{C}P_{n-1}$ と同一視するとき, $F = D|_{\mathbb{C}P_n}$ が仮定 (1.1)-(1.4) を満たしているとする. このとき, $\mathfrak{E}(\mathfrak{A} \xrightarrow{F} \mathfrak{B})$ は P_{n+1} の元と対応した基底を持ち, $\mathfrak{E}(\mathfrak{A} \xrightarrow{F} \mathfrak{B}) = \mathbb{C}P_{n+1}$ と思うと, 命題 1.4 の $\tilde{F}$ は $D|_{\mathbb{C}P_{n+1}}$ と一致する.

§3. Association scheme.

可換な association scheme があると, 2 通りの方法で代数的レベルでの fusion algebra が得られる. $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$ を可換な association scheme とし, A_i を R_i に対応する隣接行列とする. このとき, $\mathcal{X}$ の Bose-Mesner algebra $\mathfrak{A} = \langle A_0, A_1, \dots, A_d \rangle$ は行列の通常の積と基底 $A_i/\sqrt{k_i}$ (k_i は R_i の valency) に関して, fusion algebra となる. この fusion algebra を $\mathfrak{A}(\mathcal{X})$ と表わす. また, $\mathfrak{A}$ は行列の Hadamard 積と基底 $nE_i/\sqrt{m_i}$ ($n = |X|$ であり, E_i は $\mathfrak{A}$ の原始巾等元, $m_i = \text{rank } E_i$) に関しても fusion algebra となる. この fusion algebra を $\mathfrak{A}^*(\mathcal{X})$ と表わす.

一般に, $\mathfrak{A} = C(G)$, $\mathfrak{B} = C(H)$, $F = \text{Res}_H^G$ のときでも, §1 で構成した fusion algebra $\mathfrak{E}(C(G) \xrightarrow{\text{Res}} C(H))$ は association scheme に対応しているとは限らない. しかし, $\mathfrak{A}$ が association scheme $\mathcal{X}$ に対応しているとき, 例 1.2 の状況からできる $\mathfrak{E}(\mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{C})$ は次のように association scheme と対応している. まず, $\mathfrak{E}(\mathfrak{A}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathbb{C})$ は,

$$\begin{aligned}\widetilde{A}_i &= A_i \otimes I_{n+1} \quad (i = 0, \dots, d) \\ \widetilde{A}_{d+1} &= J_n \otimes (J_{n+1} - I_{n+1})\end{aligned}$$

を隣接行列とする association scheme $\tilde{\mathcal{X}}$ からできる fusion algebra となる:

$$\mathfrak{E}(\mathfrak{A}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathbb{C}) \cong \mathfrak{A}(\tilde{\mathcal{X}})$$

また, $\mathfrak{E}(\mathfrak{A}^*(\mathcal{X}) \rightarrow \mathbb{C})$ は,

$$\begin{aligned}\widehat{A}_0 &= A_0 \otimes I_{n+1} \\ \widehat{A}_i &= A_i \otimes J_{n+1} \quad (i = 1, \dots, d) \\ \widehat{A}_{d+1} &= A_0 \otimes (J_{n+1} - I_{n+1})\end{aligned}$$

を隣接行列とする association scheme $\hat{\mathcal{X}} ([M])$ によって,

$$\mathfrak{E}(\mathfrak{A}^*(\mathcal{X}) \rightarrow \mathbb{C}) \cong \mathfrak{A}^*(\hat{\mathcal{X}})$$

となる.

References

- [B1] E. Bannai, *Association schemes and fusion algebras (an introduction)*, preprint.
- [B2] ———, 代数的組合せ論 – アソシエーションスキームの最近の話題 –, 数学 45 (1993), 55–75.
- [M] A. Munemasa, *On nonsymmetric P- and Q-polynomial association schemes*, J. Combin. Theory Ser. B 51 (1991), 314–328.
- [O1] S. Okada, *Algebras associated to the Young-Fibonacci lattice*, preprint.
- [O2] ———, *Reflection-extension of fusion algebras*, in preparation.
- [S1] R. P. Stanley, *Differential posets*, J. Amer. Math. Soc. 1 (1988), 919–961.
- [S2] ———, *Variations on differential posets*, in “Invariant Theory and Tableaux (D. Stanton ed.),” The IMA Volumes in Mathematics and Its Applications 19, Springer, New York, 1988, pp. 145–165.