

ジョルダン三項積の成層分解と対称空間への応用

日本工業大学・工学部 金行 壯二 (Soji Kaneyuki)

Nihon Institute of Technology

表題でいう ジョルダン三項積とは practical には単純な 1 種階別リー環 (GLA と略記) $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} + \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1$ の部分空間 $\mathfrak{g}_i$ の事である。この様な GLA の分類と実現から種々の行列空間 (実又は複素で古典型又は例外型) は単純な 1 種 GLA の部分空間 $\mathfrak{g}_i$ として現われる (cf. §1 の表)。§1 では GLA のリー環論の言葉でこれらの行列空間を統一的に扱い $\mathfrak{g}_i$ 内のランク一定の元のなす集合への $\mathfrak{g}_i$ の分割が $\mathfrak{g}_i$ の代数幾何の意味での成層分解 (stratification) なる事を示す (定理 1.2)。§2 では $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{-1}$ のコンパクト化である、旗多様体の直積 $\tilde{M} = G/U^- \times G/U^+$ を考える。こゝに $\text{Lie } G = \mathfrak{g}$, $\text{Lie } U^\pm = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_{\pm 1}$ である。§1 の応用として、 $\tilde{M}$ に G が diagonal に作用する時の軌道分解が実解析多様体 $\tilde{M}$ の成層分解になる事を示す (定理 2.7)。又 $\tilde{M}$ の C^∞ 微分同型が最大次元の stratum を保つならば、実はすべての stratum を保つ事を示

す(定理2.8). ここでは述べる余裕がないがこれを用いて $\tilde{M}$ の閉 G 軌道 — これは bi-Lagrange 対称空間になる — の二重葉層構造の自己同型群を決定する事ができる. 詳しくは [5] を参照されたい.

§1. ジョルダソニ項積の成層分解.

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} + \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1 \quad (1.1)$$

$\mathbb{R}$ 上の単純 GLA とし, $Z \in \mathfrak{g}_0$ をその特性元, つまり Z は $\text{ad } Z$ が $\mathfrak{g}_k$ 上でスカラー作用素 kI となる様な元とし, τ を $\mathfrak{g}$ の階別反転 (i.e. $\tau(\mathfrak{g}_k) = \mathfrak{g}_{-k}$) カルタン対合としよう. 後の使用のためにリー環 $\mathfrak{g}$ の自己同型群 $\text{Aut } \mathfrak{g}$ のいくつかの部分群を定義しておこう:

G_0 : GLA としての $\mathfrak{g}$ の自己同型群. これは Z の $\text{Aut } \mathfrak{g}$ での中心化群 $C_{\text{Aut } \mathfrak{g}}(Z)$ と一致する. $\text{Lie } G_0 = \mathfrak{g}_0$ に注意.

G : G_0 と随伴群 $\text{Ad } \mathfrak{g}$ で生成される $\text{Aut } \mathfrak{g}$ の閉部分群.

K : カルタン対合 τ で定まる G の極大コンパクト部分群.

$K_0 := K \cap G_0$, K_0° : K_0 の単位元の連結成分.

$G_{\pm 1} := \exp \mathfrak{g}_{\pm 1} \subset G$.

$U^\pm := G_0 G_{\pm 1}$, これは G の極大放物型部分群で互いに opposite.

商空間 $M^\pm = G/U^\pm = K/K \cap G_0$ は G の商空間としては複多様体, K の商空間としては対称空間である. $M^\pm$ は対称 $\mathbb{R}$ 空間

と云われる. r は対称空間 $M^\pm$ の階数とする. 単純 $\mathfrak{g}$ 1 種 GLA に対して 次の命題が基本的である.

命題 1.1 ([1, 7]). $(1, 1)$ の単純 GLA $\mathfrak{g}$ に対して, 次の性質を持つ階別部分環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} + \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1$ が存在する:

(i) $\mathfrak{g}$ は r 個の $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ -triplet

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})_i = \langle E_{-i}, \check{\beta}_i, E_i \rangle, \quad 1 \leq i \leq r$$

のリー環の直和である.

(ii) $\mathfrak{g}_{\pm 1} = \sum_{i=1}^r \mathbb{R} E_{\pm i} \subset \mathfrak{g}_{\pm 1},$

$$\mathfrak{g}_0 = \sum_{i=1}^r \mathbb{R} \check{\beta}_i \subset \mathfrak{g}_0.$$

(iii) $\mathfrak{g}_{\pm 1}$ の元は K_0° の作用で対角化される, 即ち

$$\mathfrak{g}_{\pm 1} = K_0^\circ \mathfrak{g}_{\pm 1}.$$

(iv) $\mathfrak{g}_0$ に関する $\mathfrak{g}$ のルート系 $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0)$ が存在する. Δ は BC_r 型又は C_r 型である.

Δ が BC_r 型又は C_r 型である時, GLA $\mathfrak{g}$ は BC_r 型又は C_r 型であるという. 故 $X \in \mathfrak{g}_1$ とすると, 前命題よりある元 $\mathfrak{g} \in K_0^\circ$ が存在して $\mathfrak{g}X = \sum_{i=1}^r a_i E_i$ と書ける. この時ゼロでない係数 a_i の個数を X のランクといい $\text{rk} X$ で表わす. これは X のみで一意的に定まる. そこで

$$V_k = \{X \in \mathfrak{g}_1 : \text{rk} X = k\}, \quad 0 \leq k \leq r \quad (1.2)$$

なる $\mathfrak{g}_1$ の部分集合を考えよう. $\mathfrak{g}_1$ は次の様に表わされる:

$$\mathfrak{g}_1 = V_r \perp V_{r-1} \perp \cdots \perp V_0. \quad (1.3)$$

これを $\mathfrak{g}_1$ のランク分解という事にしよう. V_r は $\mathfrak{g}_1$ の Zariski 閉集合であり, $V_0 = (0)$ である. 各 V_k は同次元の G_0 軌道の合併として表わされる事に注意しておこう (V_k 自身が一つの G_0 軌道になる場合もある). V_k を式で表わする方法を述べよう. 先ず $0_k \in \mathfrak{g}_1$ と

$$0_k = \sum_{i=1}^k E_i, \quad 1 \leq k \leq r, \quad 0_0 = 0$$

と定義すると $0_k \in V_k$ である. $\mathfrak{g}_1$ の元 x, y, z に対して 3-線型写像 () と

$$(xyz) = \frac{1}{2} [[\tau(y), x], z] \in \mathfrak{g}_1$$

で定義すると, $(\mathfrak{g}_1, ())$ は階数 r の単純ジョルダン三項環 (JTS と略記) になる. $\mathfrak{g}$ が C_r 型なら更に $\mathfrak{g}_1$ は単純ジョルダン代数になる. この JTS の 2 次作用素 $P: \mathfrak{g}_1 \rightarrow \text{End } \mathfrak{g}_1$ が $P(x)y = (xyx)$ で定義される. これを用いると V_k は

$$V_k = \{ X \in \mathfrak{g}_1 : \text{rk } P(X) = i_k \}, \quad 0 \leq k \leq r, \quad (1.4)$$

と表わされる. ここに $\text{rk } P(X)$ は行列 $P(X)$ の階数を表わす, 又 $i_k = \text{rk } P(0_k)$ である. V_k の $\mathfrak{g}_1$ での閉包 $\overline{V}_k$ は行列式多様体

$$\overline{V}_k = V_{\leq k} := \{ X \in \mathfrak{g}_1 : \text{rk } P(X) \leq i_k \} \quad (1.5)$$

で与えられる ([2]). 特に $\overline{V}_k$ は代数多様体である. $\mathfrak{g}$ が複素リー環の時は $\mathfrak{g}_1$ は複素単純 JTS になる. この場合 $\mathfrak{g}_1$

の JTS としての各実形を 1 つ定める事により $P(X)$ は R 上定義された多項式になる. 従って $\overline{V}_k$ は複素ベクトル空間 $\mathcal{G}_1$ 内の R 上定義された代数多様体になる. $\mathcal{G}_1$ が C_r 型の時, 単純ジョルダン代数 $\mathcal{G}_1$ の generic norm ν を用いて V_r は

$$V_r = \{X \in \mathcal{G}_1 : \nu(X) \neq 0\} \quad (1.6)$$

と表わされる事に注意しておこう. ここでこの節の主定理を述べておこう. アフィン代数多様体 X の正則点の集合を $\text{Reg}(X)$, 特異点の集合を $\text{Sing}(X)$ で表わす.

定理 1.2 ([5]). $r \geq 2$ ならば, 行列式多様体 $V_{\leq k} := \coprod_{i=0}^k V_i$ に対して次の事が成立つ:

$$\begin{aligned} \text{Reg}(V_{\leq k}) &= V_k, & 0 \leq k \leq r-1, \\ \text{Sing}(V_{\leq k}) &= V_{\leq k-1}, & 1 \leq k \leq r-1. \end{aligned} \quad (1.7)$$

特に $r \geq 2$ ならば $\mathcal{G}_1$ のランク分解 (1.3) は代数幾何の意味での $\mathcal{G}_1$ の成層分解である.

以下この証明について述べよう. まず単純 JTS $\mathcal{G}_1$ の分類と実現が必要である. その表を掲げておこう.

複素単純 JTS

Type	$\mathcal{G}_1$	r
I	$M_{p,q}(\mathbb{C}), p \leq q$	p

II	$\text{Alt}_n(\mathbb{C})$	$[n/2]$
III	$\text{Sym}_n(\mathbb{C})$	n
IV	$\mathbb{C}^n$	2
V	$M_{1,2}(O^{\mathbb{C}})$	2
VI	$H_3(O^{\mathbb{C}})$	3

実単純JTS 及びその複素化

Type	g_1	r	$g_1^{\mathbb{C}}$	$\bar{r}$
I	$M_{p,q}(\mathbb{R}), p \leq q$	p	$M_{p,q}(\mathbb{C})$	p
	$M_{p,q}(\mathbb{H}), p \leq q$	p	$M_{2p,2q}(\mathbb{C})$	$2p$
	$H_n(\mathbb{C})$	n	$M_n(\mathbb{C})$	n
II	$\text{Alt}_n(\mathbb{R})$	$n/2$	$\text{Alt}_n(\mathbb{C})$	$n/2$
	$H_n(\mathbb{H})$	n	$\text{Alt}_{2n}(\mathbb{C})$	n
III	$\text{Sym}_n(\mathbb{R})$	n	$\text{Sym}_n(\mathbb{C})$	n
	$\text{SH}_n(\mathbb{H})$	n	$\text{Sym}_{2n}(\mathbb{C})$	$2n$
IV	$R_{p,q}^n$ ($p \leq q, p+q=n$)	$\begin{cases} 1 & (p=0) \\ 2 & (p \geq 1) \end{cases}$	$\mathbb{C}^n$	2
V	$M_{1,2}(O)$	1	$M_{1,2}(O^{\mathbb{C}})$	2
	$M_{1,2}(O')$	2		
VI	$H_3(O)$	3	$H_3(O^{\mathbb{C}})$	3
	$H_3(O')$	3		

上の表の記号の説明: $\mathbb{H}$ は 4 元数環, $O, O', O^{\mathbb{C}}$ は夫々 8 元数

環, split 8 元数環, 複素 8 元数環, $H_n(\mathbb{F})$ は $\mathbb{F}$ の元を成分とするエルミート行列の空間, $SH_n(H)$ は歪エルミート 4 元数 n 次行列の空間, $R_{p,q}^n$ は符号数 (p, q) の 2 次形式を備えた $\mathbb{R}^n$ である. r は複素 JTS $\mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}}$ のランクである. 表からわかる様に $\mathfrak{g}_1$ は複素又は実の, そして古典型又は例外型の行列空間である. I-III 型の場合 (1.2) 式の $\text{rk } X = k$ という条件は X の行列としての階数と一致するか又はその $1/2$ 倍かのいずれかである. 従ってこれらのタイプでは $V_{\leq k}$ は代数幾何における通常の行列式多様体 (determinantal variety) と一致する.

定理 1.2 の証明に戻ろう. 先ず $\mathfrak{g}_1$ が複素 JTS の場合を考えよう. I-III 型の場合 (1.7) はよく知られている (例へば [6]). IV, V, VI 型の $V_{\leq 1}$ を考えよう. 最初の 2 つのタイプでは $r=2$ であるから $V_{\leq 1}$ のみが自明でない行列式多様体である. 一般に行列式多様体はその定義より $\mathbb{C}^*$ の作用で不変だからその定義イデアルは斉次である. 又 V_1 上で消える恒等的にゼロでない 1 次形式は存在しない事が示される. これらから Jacobi の判定法により $\text{Sing}(V_{\leq 1}) = V_0$ が結論できる. 残る 1 つは VI 型の $V_{\leq 2}$ である. この場合 $\mathfrak{g}_1$ はジョルダン代数であるから (1.6) より $V_{\leq 2}$ は $\nu=0$ で定義され Jacobi の判定法より $\text{Sing}(V_{\leq 2}) = V_{\leq 1}$ が示される. この際 ν の G_0 -相対不変性を使えば計算が楽になる. 最後に $\mathfrak{g}_1$ が実 JTS の時は, $\mathfrak{g}_1$ 内の行列式多様体

$V_{\leq k}$ は複素化 $\mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}}$ 内の行列式多様体 $\tilde{V}_{\leq k}$ ($\bar{r}=r$ の時) 又は $\tilde{V}_{\leq 2k}$ ($\bar{r}=2r$ の時) の $\mathbb{R}$ -rational な点のなす集合と一致する事 (一般論的証明は例へば [7]) を用いれば複素の場合に帰着される. $\square$

定理 1.2 の証明の過程から次の命題が得られる.

命題 1.3 ([5]). 複素又は実の単純 JTS $\mathfrak{g}_1$ 内の行列式多様体 $V_{\leq k}$ ($1 \leq k \leq r-1$) に対して, 次の条件を充つ定義イデアル $I(V_{\leq k})$ の基底 $\{f_1, \dots, f_{s_k}\}$ が存在する: 各 f_i は $\mathbb{R}$ 上定義された多項式で各点 $p \in \text{Sing}(V_{\leq k})$ に対して $(df_i)_p = 0$ となる.

§2. 対称 R 空間の直積の成層分解

前節で現われた対称 R 空間 $M^{\pm}$ の直積 $\tilde{M} = M^{-} \times M^{+}$ は直積群 $G \times G$ の商空間であるからその対角線部分群として G は $\tilde{M}$ に作用する. この作用の下での $\tilde{M}$ の軌道構造は [3] で研究された. (正確に云うとそこでは G の単位元の連結成分 G° による軌道構造が考察されているが, これは G 軌道と一致する事が示される.). これについて述べておこう. G の元 a_k ($0 \leq k \leq r$) を次式で定義する:

$$a_k = \exp\left(-\frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^k (E_i - E_{-i})\right), \quad 1 \leq k \leq r; \quad a_0 = 1.$$

商空間 $M^{\pm}$ の原点を $0^{\pm}$ で表わしておく. 又 $\tilde{M}$ の点 $(0^-, a_{r-k} 0^+)$ を通る G 軌道を M_k で表わす. 即ち $M_k = G(0^-, a_{r-k} 0^+)$ とすると次の定理が成立つ:

定理 2.1 ([5, 3]).

$$(i) \quad \tilde{M} = M_r \perp M_{r-1} \perp \cdots \perp M_0, \quad (2.1)$$

$$\dim \tilde{M} = \dim M_r > \dim M_{r-1} > \cdots > \dim M_0$$

が成立つ.

(ii) M_k の $\tilde{M}$ での内包を $\bar{M}_k$ で表わすと

$$\bar{M}_k = M_{\leq k} := M_k \perp M_{k-1} \perp \cdots \perp M_0, \quad 0 \leq k \leq r.$$

(iii) GLA $\mathcal{G}$ が BC_r 型ならば, 最小軌道 M_0 は G の複多様体で $\tilde{M}$ の直積構造から引起される二重葉層構造 $F_0^\pm$ をもつ (これは partial bi-Lagrangian 構造という). その葉体の集合は下記の二重束のファイバーの集合

と一致する. $\mathcal{G}$ が C_r

型ならば,

$$\begin{array}{ccc} & M_0 & \\ \swarrow & & \searrow \\ G/U^- = M^- & & G/a_r U^+ a_r^{-1} \end{array}$$

$a_r U^+ a_r^{-1} = U^-$ となり従って $a_r O^+ = O^-$, $M_0 = M^-$ が成立つ. として $F_0^\pm$ は自明になる.

ここで稠密開軌道 M_r について若干述べておこう. M_r は G の商空間として $M_r = G/U^- \cap U^+ = G/G_0$ と表わされ, これは対称対 $(\mathcal{G}, \mathcal{G}_0)$ に対応する対称空間である. この対称空間はバイ・ラグランジウ対称空間 (又はパラエルミート対称空間) と呼ばれる. 先で見た様に G_0 は元 Z の Aut $\mathcal{G}$ での中心化群と一致するから, M_r はリー環 $\mathcal{G}$ 内に Z を通る随伴 G 軌道 (これは双曲軌道) とし

で実現される. 従つて M_r は自然な G -不変 symplectic 構造 ω を持つ. M_r 上には $\tilde{M}$ の直積構造から自然に二重葉層構造 $F^\pm$ が定義される. そしてその葉体は ω に肉いて ラグランジュ部分多様体になる.

2.2. (2.1) で与えた $\tilde{M}$ の軌道分解が実解析多様体 $\tilde{M}$ の成層分解なる事を示したい. これは 2.3 で示さるであらう. この為に $\tilde{M}$ に稠密な開集合として入つてゐる 或ベクトル空間をとり, それと軌道との交わりをこのベクトル空間内で式で表わす. これを軌道の実現と呼ぶ (余談であるが, 有界対称領域の Harish-Chandra の実現はこの種のもののである). 各軌道の実現がある行列式多様体上の自明なファイバー束になる事を示したいと思ふ.

補題 2.2 ([5]). (1.1) の単純 GLA $\mathfrak{g}$ が BC_r 型とする. この時 $\mathfrak{g}$ は次の性質を充つ 2 種の階別付

$$\mathfrak{g} = \sum_{k=-2}^2 \mathfrak{g}_k^* \quad (2.2)$$

を許容する:

(i) $\mathfrak{g}_{\pm 1}^*$ は $\text{ad } \mathfrak{g}_0^*$ 不変な同次元可換部分空間の直和に分解する:

$$\mathfrak{g}_{\pm 1}^* = \mathfrak{g}_{\pm 1}^{*+} + \mathfrak{g}_{\pm 1}^{*-}. \quad (2.3)$$

(ii) $\mathfrak{g}_{-1} = \mathfrak{g}_{-2}^* + \mathfrak{g}_{-1}^{*+}$, $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_1^{*-} + \mathfrak{g}_2^*$,

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_{-1}^{*-} + \mathfrak{g}_0^* + \mathfrak{g}_1^{*+}.$$

$$(iii) (Ad a_r) \mathfrak{g}_k^* = \mathfrak{g}_{-k}^*, \quad (Ad a_r) \mathfrak{g}_{\pm 1}^{*+} = \mathfrak{g}_{\mp 1}^{*+}.$$

$$(iv) \operatorname{Lie}(U^- \cap a_r U^+ a_r^{-1}) = \mathfrak{g}_{-2}^* + \mathfrak{g}_{-1}^* + \mathfrak{g}_0^*.$$

上の補題で $\mathfrak{g}$ が C_r 型ならば $\mathfrak{g}_{\pm 1}^* = (0)$, $\mathfrak{g}_{\pm 2}^* = \mathfrak{g}_{\pm 1}$, $\mathfrak{g}_0^* = \mathfrak{g}_0$ となり (2.2) と (1.1) は本質的に一致する. 才 2 種単純 GLA の分類 [4] を用いると補題 2.2 の条件を充す才 2 種単純 GLA を決定する事が出来る. それらは実単純なもの 5 個と複素単純なもの 3 個から成る. 補題 2.2 の幾何学的背景について述べておこう. 最小軌道 M_0 は $M_0 = G/U^- \cap a_r U^+ a_r^{-1}$ と表わされるから, (iv) より $\mathfrak{g}_1^* + \mathfrak{g}_2^*$ は点 $(0, a_r 0^+)$ での M_0 の接空間とみなされる. この時 $\mathfrak{g}_1^*$ の分解 (2.3) は M_0 の partial bi-Lagrangian 構造に対応している.

双直積群 $G \times G$ は $\tilde{M}$ に推移的に作用し点 $(0, a_r 0^+)$ での固定部分群は $U^- \times a_r U^+ a_r^{-1}$ で与えられるから $\tilde{M}$ は商空間として

$$\tilde{M} = G/U^- \times G/a_r U^+ a_r^{-1}$$

と表わされる. 今 $\mathfrak{g}'_1 := (Ad a_r) \mathfrak{g}_{-1}$ とおくと $G \times G$ のリー環 $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ 内で部分環

$$\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}'_1 = (\mathfrak{g}_2^* + \mathfrak{g}_1^{*-}) \oplus (\mathfrak{g}_2^* + \mathfrak{g}_1^{*+}) \quad (2.4)$$

は $\operatorname{Lie}(U^- \times a_r U^+ a_r^{-1}) = (\mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_{-1}) \oplus (Ad a_r)(\mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1)$ の補空間になっている (補題 2.2). 部分環 $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}'_1$ は $G \times G$ の部分群 $G_1 \times a_r G_{-1} a_r^{-1}$ を生成する. この部分群が $\tilde{M}$ に作用する時の点

$(0, a_0^+)$ を通る軌道 Ω は唯一つの開軌道である事がわかる。

$\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1'$ から Ω の上への写像 Σ

$$\Sigma(X, Y) = (\exp X \cdot 0^-, \exp Y \cdot a_0^+)$$

で定義すると, Σ は $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1'$ から Ω の上への微分同型になる。

今後 Σ により $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1'$ と Ω を同一視する事にする。 $G_1 \times a_0 G_{-1} a_0^{-1}$ の $\tilde{M}$ 上の特異軌道の合併は $\tilde{M}$ 内で余次元 1 の実解析集合になる事が示される。従って

$$M_k^* := M_k \cap (\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1') \quad (2.5)$$

$$M_{\leq k}^* := M_{\leq k} \cap (\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1')$$

とおくと, M_k^* 及び $M_{\leq k}^*$ は夫々 M_k 及び $M_{\leq k}$ の稠密開集合になる。(2.1), (2.5) より

$$\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1' = M_r^* \sqcup M_{r-1}^* \sqcup \dots \sqcup M_0^* \quad (2.6)$$

が成立つ。以下 $\mathfrak{g}$ が BC_r 型として話を進めよう。次の様に定義される写像 $\Phi: \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1' \rightarrow \mathfrak{g}_2^*$ を考えよう: $X = (x, u^-) \in \mathfrak{g}_2^* + \mathfrak{g}_1'^*$ $= \mathfrak{g}_1$ と $Y = (y, v^+) \in \mathfrak{g}_2^* + \mathfrak{g}_1'^* = \mathfrak{g}_1'$ に対して

$$\Phi(X, Y) = y - x + [v^+, u^-] \quad (2.7)$$

と定義する。 Φ は田中 [8] で導入されたものである。他方

$GLA(2.2)$ の階別部分環

$$\mathfrak{g}_{ev}^* = \mathfrak{g}_{-2}^* + [\mathfrak{g}_{-2}^*, \mathfrak{g}_2^*] + \mathfrak{g}_2^*$$

は C 型のオノ一種単純 GLA になる ([4])。従って $\mathfrak{g}_2^*$ は単純ジョルダン代数になり (1.3) と同様に $\mathfrak{g}_2^*$ のランク分解

$$\mathfrak{g}_2^* = \mathcal{V}_r \perp \mathcal{V}_{r-1} \perp \cdots \perp \mathcal{V}_0 \quad (2.8)$$

が成立つ. 次の定理が示す様に 2つの分解 (2.6) と (2.8) は互により 1対1に対応している.

定理 2.3 ([5]). $0 \leq k \leq r$ とする. 軌道 M_k の $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}'_1$ 内の実現 M_k^* は次の様に与えられる:

$$M_k^* = \Phi^{-1}(\mathcal{V}_k)$$

$$= \{(x, u^-) \oplus (y, v^+) \in \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}'_1 : rk P(y - x + [v^+, u^-]) = i_k\},$$

ここに i_k は (1.4) のそれと同じ. M_k^* の $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}'_1$ での閉包 $\overline{M}_k^*$ は

$$\overline{M}_k^* = M_{\leq k}^* = \Phi^{-1}(\mathcal{V}_{\leq k})$$

$$= \{(x, u^-) \oplus (y, v^+) \in \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}'_1 : rk P(y - x + [v^+, u^-]) \leq i_k\}$$

で与えられる. 特にジョルダン代数 $\mathfrak{g}_2^*$ の generic 元 ν を用いると

$$M_r^* = \Phi^{-1}(\mathcal{V}_r)$$

$$= \{(x, u^-) \oplus (y, v^+) \in \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}'_1 : \nu(y - x + [v^+, u^-]) \neq 0\}$$

と表わされる. $\mathfrak{g}$ が C_r 型の場合は上の三つの式において $\mathfrak{g}'_1 = \mathfrak{g}_1$ であり $u^- = v^+ = 0$ である.

上の定理から閉包 $\overline{M}_k^*$ は $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}'_1$ の代数多様体であり, 分解 (2.6) は $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}'_1$ の一種のランク分解と考えられる.

2.3. $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}'_1$ 及 $\tilde{M}$ の成層分解

実解析多様体の成層分解の定義を与えておこう. M を実解析多様体, $E \subset M$ の実解析集合とする. 点 $p \in E$ が E の正則点とは p の M での或近傍 U が存在して $E \cap U$ は E に含まれる最大次元の M の実解析部分多様体になる事がある. 正則点でない E の点を E の特異点という.

定義 2.4. 実解析多様体 M の分割 $M = \coprod_{k=0}^s A_k$ が M の成層分解であるとは次の三条件が充たれる事である:

- (i) 各 A_k は M の実解析部分多様体である.
- (ii) A_k の閉包 $\bar{A}_k$ は M の実解析集合であり, 且 $A_{\leq k} := \coprod_{i=0}^k A_i$ と一致する ($0 \leq k \leq s$).
- (iii) $\bar{A}_k$ の特異点集合 $\text{Sing}(\bar{A}_k)$ は $A_{\leq k-1}$ と一致する ($1 \leq k \leq s-1$).
(同じ事であるが, $\bar{A}_k$ の正則点の集合 $\text{Reg}(\bar{A}_k)$ は A_k と一致する)

根群 G の一般化された Heisenberg 部分群 $N := \exp \mathfrak{n}$, $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}_1^* + \mathfrak{g}_2^*$ を考えよう. N は $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1'$ にアフィン変換として free に作用する. そして $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1'$ から $\mathfrak{g}_2^*$ の上への写像 π の各ファイバーは一つの N 軌道になる. $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1'$ の点 p を (2.4) に従って $p = X \oplus Y = (x, u^-) \oplus (y, v^+)$ と表わしておく. 多項式写像 ψ :

$$\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1' \rightarrow \mathfrak{g}_2^* \times \mathfrak{n} \text{ へ}$$

$$\psi(p) = (\pi(p), -x + \frac{1}{2}[v^+, u^-] - v^+ - u^-)$$

により定義すると, ψ は上への微分同型であり逆写像も多項

式写像になる。これより次の命題が得られる。

命題 2.5. $\mathcal{Y}_1 \oplus \mathcal{Y}_1$ 内の代数多様体 $M_{\leq k}^*$ ($0 \leq k \leq r-1$) と $\mathcal{Y}_2^* \times \mathcal{W}$ 内の代数多様体 $V_{\leq k} \times \mathcal{W}$ は ψ の下で同型である。そして

$$\text{Sing}(M_{\leq k}^*) = \psi^{-1}(\text{Sing}(V_{\leq k})), \quad 1 \leq k \leq r-1,$$

が成立つ。

これと定理 1.2, 定理 2.3 から次の定理が得られる。

定理 2.6. 代数多様体 $M_{\leq k}^*$ ($1 \leq k \leq r-1$) に対して

$$\text{Sing}(M_{\leq k}^*) = M_{\leq k-1}^*, \quad \text{Reg}(M_{\leq k}^*) = M_k^*$$

が成立つ。特に $r \geq 2$ ならばランク分解 (2.6) は代数幾何の意味での成層分解である。

これより次の目標の定理が得られる。

定理 2.7. ([5]) $r \geq 2$ ならば、実解析多様体 $\tilde{M}$ の G -軌道分解 (2.1) は成層分解である。

証明. 定義 2.4 の (ii) は $M_{\leq k}^*$ が代数多様体なることと $M_{\leq k} = G(M_{\leq k}^*)$ から従う。(iii) について述べよう。 $M_{\leq k}^*$ の点 p に対して、 p が代数多様体 $M_{\leq k}^*$ の正則点なる事と実解析集合としての $M_{\leq k}^*$ の正則点なる事は同値である。よって

$$\text{Reg}(M_{\leq k}) = G(\text{Reg}(M_{\leq k}^*)) = G(M_k^*) = M_k$$

となり、従って $\text{Sing}(M_{\leq k}) = M_{\leq k-1}$ となる。□

2.4. $\tilde{M}$ の成層分解の C^∞ -安定性

今迄の結果を用いて次の定理を証明しよう.

定理 2.8 ([5]). $f \in \tilde{M}$ の滑らかな (i.e. C^∞ 級) 微分同型としよう. もし f が M_r を保つならば f は他のすべての M_k ($0 \leq k \leq r-1$) を保つ.

証明. $r=1$ ならば主張は明白であるから, $r \geq 2$ と仮定しよう.

この時 f は $M_{\leq r-1}$ を保つから $1 \leq k \leq r-1$ なる k に対して

$$f(M_{\leq k}) = M_{\leq k} \implies f(M_k) = M_k \quad (2.9)$$

を示せばよい. $f(M_k)^* := f(M_k) \cap (\eta_1 \oplus \eta_1')$ とおくと, 仮定より $f(M_k) \subset M_{\leq k}$ であるから $f(M_k)^* \subset M_{\leq k}^*$. そして $f(M_k)^*$ は代数多様体 $M_{\leq k}^*$ の通常位相での滑らかな部分多様体である. 今点 $p \in f(M_k)^*$ を取ろう. この時 p の $\eta_1 \oplus \eta_1'$ 内での適当な近傍内で $f(M_k)^*$ と $M_{\leq k}^*$ は同じ定義方程式で表わされる. 従って接空間 $T_p M_{\leq k}^*$ の次元について次の式が成立つ.

$$\begin{aligned} \dim T_p M_{\leq k}^* &= \dim T_p (f(M_k)^*) = \dim f(M_k)^* = \dim M_k = \dim M_k^* \\ &= \dim \Phi^{-1}(V_k) = \dim V_k + \dim \mathcal{N}. \end{aligned}$$

他方命題 2.5 より

$$\dim T_p M_{\leq k}^* = \dim T_{\Phi(p)}(V_{\leq k} \times \mathcal{N}) = \dim T_{\Phi(p)}(V_{\leq k}) + \dim \mathcal{N}.$$

従って $\dim T_{\Phi(p)}(V_{\leq k}) = \dim V_k$ が成立つ. よって命題 1.3 より

$$\Phi(p) \in V_k, \text{ 従って } p \in \Phi^{-1}(V_k) = M_k^* \text{ でなければならぬ. 故に}$$

$$f(M_k)^* \subset M_k^* \quad (2.10)$$

が示された. 次に包含 $f(M_k) \subset M_k$ を示そう. これが真でない
と仮定すると $f(M_k) \cap M_{\leq k-1} \neq \emptyset$ である. 他方 $M_{\leq k-1}^*$ は $M_{\leq k-1}$ 内
で稠密開であるから $f(M_k)^* \cap M_{\leq k-1}^* = f(M_k) \cap M_{\leq k-1}^* \neq \emptyset$. こん
は (2.10) に矛盾する. 故に $f(M_k) \subset M_k$ が示された. (2.9) の仮
定において f と f^{-1} をおきかえて上と同様の議論を行うと M_k
 $\subset f(M_k)$ が得られ (2.9) が示された事になる. $\square$

§3. Bi-Lagrange 対称空間への応用

§2 で述べた様に $\tilde{M}$ 内の G による開軌道 $M_r = G/G_0$ は シンプレ
クティック対称空間であり G 不変な 2 つの ラグランジュ 葉層構造を
持つ. つまり $(M_r, F^\pm)$ は bi-Lagrange 対称空間になる. $F^\pm$ を不変に
する M_r の C^∞ 微分同型のなす群を $(M_r, F^\pm)$ の 自己同型群 といひ,
 $\text{Aut}(M_r, F^\pm)$ で表わす. 定理 2.8 と 田中 [8] の結果を用いてこの群
を決定する事が出来る. それについて結果と概略を述べよう. ま
ず記号の説明をしておく. 最小軌道 M_0 の partial bi-Lagrange 構造
 $F_0^\pm$ の 自己同型群を $\text{Aut}(M_0, F_0^\pm)$ で表わす. 又 対称 R 空間 $M^- =$
 G/U^- の 原点 o での接空間を $\mathfrak{g}_1$ と同一視しておき, そのランク分解
で現われる $V_{\leq r-1}$ に注目しよう. $V_{\leq r-1}$ は $\mathfrak{g}_1$ 内の G_0 不変な錐であ
るから $V_{\leq r-1}$ は G の作用で M^- 上の錐の場 に拡張出来る. こ
の錐の場を一般化された共形構造 といひ K で表わす. K を不
変にふる M^- の C^∞ 微分同型のなす群を $\text{Aut}(M^-, K)$ で表わす. こ

の群は [2] で決定された. 尚 $\mathfrak{g}$ が C_r 型の場合は M_r は商空間 $SO^0(1, n+1)/SO(n) \cdot \mathbb{R}^+$ であり対応する M^- は n 次元球面 S^n である.

定理 3.1 ([5]). (1.1) の単純 GLA $\mathfrak{g}$ が BC_r 型の時,

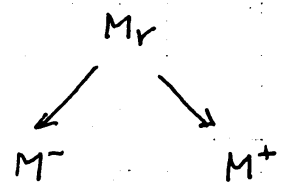
$$\text{Aut}(M_r, F^\pm) \simeq \text{Aut}(M_0, F_0^\pm) \simeq G,$$

$\mathfrak{g}$ が C_r 型の時,

$$\text{Aut}(M_r, F^\pm) \simeq \text{Aut}(M^-, K) = \begin{cases} G, & r \geq 2, \\ \text{Diffeo}(S^n), & r = 1. \end{cases}$$

但し $\text{Diffeo}(\cdot)$ は微分同型のなす群を表わす.

この定理は $\mathfrak{g}$ が古典型の場合は少し弱い形で田中 [8] により得られている. 定理 3.1 の我々の証明に定理 2.8 が如何に使われるかについて簡単に触れておこう. 証明の第 1 ステップは $\text{Aut}(M_r, F^\pm)$ から $\text{Aut}(M_0, F_0^\pm)$ 又は $\text{Aut}(M^-, K)$ への単射準同型を作る事である. ($\mathfrak{g}$ が C_r 型の場合は $M_0 = M^-$ に注意). $f \in \text{Aut}(M_r, F^\pm)$ としよう. M_r は $\tilde{M}$ の開集合として $M^\pm$ 上の自然な二重束の構造を持つ. この際夫々のファイバーは $F^\pm$ の葉体である. f が $F^\pm$ を不変にする事から, f は二重束のファイバーをファイバーに移す. よって f は底空間 $M^\pm$ の微分同型 $f^\pm$ を引越す. $\tilde{f} := f^- \times f^+$ は $\tilde{M}$ の微分同型でその M_r 上への制限は元の f と一致する. 従って定理 2.8 より $\tilde{f}$ は M_0 を不変にし制限 $f_0 = \tilde{f}|_{M_0}$ は M_0 の



微分同型になる. f_0 は $\text{Aut}(M_0, F_0^\pm)$ 又は $\text{Aut}(M, K)$ に属する事が示され, 対応 $f \mapsto f_0$ が単射準同型である事も容易に示される.

Bibliography

- [1] J. Faraut, S. Kaneyuki, A. Koranyi, Q.-K. Lu and G. Roos, Analysis and Geometry on Complex Homogeneous Domains, Progress in Math. 185, Birkhauser, Basel, New York, 2000.
- [2] S. Gindikin and S. Kaneyuki, On the automorphism group of the generalized conformal structure of a symmetric R-space, Differential Geom. Appl. 8(1998), 21-33.
- [3] S. Kaneyuki, On orbit structure of compactifications of parahermitian symmetric spaces, Japan. J. Math. 13(1987), 333-370.
- [4] S. Kaneyuki, On the subalgebras $\mathfrak{g}_0$ and $\mathfrak{g}_{\text{ev}}$ of semisimple graded Lie algebras, J. Math. Soc. Japan, 45(1993), 1-19.
- [5] S. Kaneyuki, Compactification of parahermitian symmetric spaces and its applications, II: Stratifications and automorphism groups, to appear in Journal of Lie Theory.
- [6] T. Levasseur and J.T. Stafford, Rings of differential operators on classical rings of invariants, Memoire of AMS, No. 412(1989).
- [7] M. Takeuchi, Basic transformations of symmetric R-spaces, Osaka J. Math. 25(1988), 259-297.
- [8] N. Tanaka, On affine symmetric spaces and the automorphism groups of product structures, Hokkaido Math. J. 14(1985), 277-351.

Department of Mathematics
Nihon Institute of Technology
Miyashiro-cho, Saitama 345-8501
Japan.

kaneyuki@hoffman.cc.sophia.ac.jp