

塑性問題における有限要素解の収束性について

熊本大 理学部 三好 哲彦

§1. 等方硬化則の仮定のもとでの塑性振動の定式化

物体は平面上の有界領域 Ω を占めてゐるとし、この物体の平面内での振動を時間区間 $T = (0, T)$ にわたって観察するものとする。 x_i 軸方向 i の変位を u_i 、応力成分を σ_{ij} で表わすとする。運動方程式は次のように与えられる。

$$(1.1) \quad \rho \ddot{u}_i - \sum_j \sigma_{ij,j} = b_i \quad \text{in } T \times \Omega \quad (\sigma_{21} = \sigma_{12})$$

ρ は定数、 b_i は与えられた関数で時間 t に関して区分的に解析的であると仮定する。 $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ とし Γ_0 上で u_i はゼロ、 Γ_1 上で $\sum_j \sigma_{ij} \cos(n, x_j) = 0$ (free) の条件を仮定する。初期条件として u_i はゼロ、 $\dot{u}_i = v$ (given) とし v には以下の議論に必要な滑らかさ等を仮定する。 σ_{ij} を u_i で表わすためには次の諸関係が必要である。

(a) ひずみ - 変位関係式: $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ とし、

$$\varepsilon_{11} = u_{1,1}, \quad \varepsilon_{22} = u_{2,2}, \quad \varepsilon_{12} = u_{1,2} + u_{2,1}$$

以下では $\varepsilon = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12})$, $\sigma = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})$ とする。

4

(b) 降伏条件: $f^2(\sigma) = \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2 = F^2(\bar{\varepsilon}_p)$

i.e., Mises の条件を使う. $\bar{\varepsilon}_p$ は以下に定義する.

(c) 塑性ひずみ: ひずみは普通, 且復可能なものとそうではないものがある. i.e., $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$ と考えられ, ε_e 及び ε_p は

$$(1.2) \quad \dot{\sigma} = D \dot{\varepsilon}_e \quad (\text{Hooke の法則})$$

$$(1.3) \quad \dot{\varepsilon}_p = \frac{1}{F'} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma}^* \dot{\sigma}$$

で与えられる. $\dot{\sigma} = \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{11}}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{22}}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{12}} \right)$, $*$ はベクトルの内積を表わす. $F' = \frac{dF}{d\bar{\varepsilon}_p}$, $\bar{\varepsilon}_p = \int_0^t \frac{\|\dot{\varepsilon}_p\|}{\|\frac{\partial f}{\partial \sigma}\|} dt$ ($\|\cdot\|$ はベクトルの長さ) である. 関数 F と (2 典型的なもの) は $C(a + \bar{\varepsilon}_p)^{\frac{1}{n}}$

(C, a は定数, $n \geq 1$) であるが, その他のもっと次の条件に通常は表わされる.

「 F は連続かつ区分的に ^{解析的} ~~滑らか~~ で, $F(0) > 0$, また微分可能なところでは $F' > 0$, $F'' < 0$ とする。」

以上の条件を考慮すると, σ は次の関係式により決まると結ばれる.

$$(1.4) \quad \begin{cases} \dot{\sigma} = D \dot{\varepsilon} & \text{if } f(\sigma) < F(\bar{\varepsilon}_p) \quad (\text{elastic}) \\ \dot{\sigma} = \left(D - \frac{D \frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial f}{\partial \sigma}^* D}{F' + \frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial f}{\partial \sigma}^* D} \right) \dot{\varepsilon} & \text{if } f(\sigma) = F(\bar{\varepsilon}_p) \text{ 且 } \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} \geq 0 \end{cases}$$

(plastic)

上式に $F' = F'(\bar{\varepsilon}_p)$ であるが, この式は $f(\sigma) = F(\bar{\varepsilon}_p)$ のときにも使われるが $F' = F'(F^{-1}(f(\sigma)))$ と考えてもよい. 従って $\frac{D \frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial f}{\partial \sigma}^* D}{F' + \frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial f}{\partial \sigma}^* D}$ は σ のみの関数と考えられるのでこれを $\bar{D}(\sigma)$ とおけば我々の関

問題は次のようになる。

$$(1.5) \quad \rho \ddot{u}_i - \sum_j \sigma_{ij,j} = b_i \quad \text{in } T \times \Omega$$

$$(1.6) \quad \begin{cases} \dot{\sigma} = D \dot{\varepsilon} & \text{if } f(\sigma) < F(\bar{\varepsilon}_p) \\ \dot{\sigma} = (D - \overline{D}(\sigma)) \dot{\varepsilon} & \text{if } f(\sigma) = F(\bar{\varepsilon}_p) \times 2\phi^* \dot{\sigma} \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{ただし, } \dot{\varepsilon} = \varepsilon(\dot{u}), \quad \bar{\varepsilon}_p = \int_0^t \frac{1}{\rho \phi^*} dt, \quad \dot{\varepsilon}_p = \frac{1}{F} 2\phi^* \dot{\sigma}.$$

§2. 有限要素近似

我々は (1.5)~(1.6) の解の存在, 一意性, その近似を問題にした。であるか, 解の近似を作ることから始す。有限要素法を使うため問題を三角形に分割する。話を簡単にするためには多角形領域とするが, 境界が病的に異常になり限り以下の話には多角形になり場合にも有効である。 P を三角形の頂点であって $\bar{\Omega}$ に含まれるものの全体とする。 $P \ni p$ に対し $u^p(t) = (u_1^p(t), u_2^p(t))$ を未知函数とし,

$$u^h(x, t) = \sum_{p \in P} u^p(t) \varphi_p(x) \quad \{\varphi_p(x)\}: \text{piecewise linear basis}$$

を u^h の近似とする。 2.1 と 2.2, 通常有限要素近似は

$$(2.1) \quad \rho(\ddot{u}_i^h, \varphi_p) + \sum_j (\sigma_{ij}^h, \varphi_{p,j}) = (b_i, \varphi_p) \quad \forall p \in P$$

$$(2.2) \quad \begin{cases} \dot{\sigma}^h = D \dot{\varepsilon}^h & \text{if } f(\sigma^h) < F(\bar{\varepsilon}_p^h) \\ \dot{\sigma}^h = (D - \overline{D}(\sigma^h)) \dot{\varepsilon}^h & \text{if } f(\sigma^h) = F(\bar{\varepsilon}_p^h) \times 2\phi^* \dot{\sigma}^h \geq 0 \end{cases}$$

である。 ところで, $\dot{\varepsilon}^h = \varepsilon(\dot{u}^h)$, 初期条件は常識的に近似する。 (2.1), (2.2) は形式的には (1.5), 各要素の "state" があろうか

いふことがあれば) 次の形の連立準線形常微分方程式の初期値問題である。

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \\ \sigma \end{pmatrix} = X(t, u, \sigma)$$

しかし, $\dot{\sigma} = D\dot{\sigma}$ を使うか又は他の式を使うか主かは解に依存して定まらねばならぬ。そこで (2.1) ~ (2.2) の問題を物理的に妥当な解が得られるように設定して置く問題が生じる。このことは次の事から ^{解決} ~~解決~~ して分かる。

初期値問題, 設定: $t \leq t_0$ における $(u, \dot{u}, \sigma)$ 及び各要素の状態 (elastic or plastic) がわかっており, t_0 以後, 各要素の状態を $t = t_0$ の時点で決定すること。(勿論, t_0 の微小時間後の状態により) 筆者の論文 [1] [2] のところと本質的には同じ論法により次の事を示すことが出来る。

定理: $t = t_0$ における要素の集合を二種類に分かたせしめとする, $E = E_1 \cup E_2$. ここで E_1 は E_2 の t_0 以後の状態とどう定めても t_0 の微小時間後の状態 (elastic or plastic) は不変であり, E_2 の要素は $t \geq t_0$ には, $\dot{\sigma} = F(\dot{\epsilon}_p)$ から

$$\frac{d^k}{dt^k} (\partial \dot{\sigma}^*) \Big|_{t=t_0} = 0 \quad (0 \leq k \leq k) \quad k \geq 0$$

であるとする (k は ∞ とは無関係). このとき E_2 の $t \geq t_0$ には $\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} (\partial \dot{\sigma}^*) \Big|_{t=t_0}$ の符号は, E_2 の要素の t_0 以後の状態と独立に定まる。(t_0 以後の状態 とは, t_0 の微小時間後と elastic とするか plastic とするかということ) である。

この走破の結果, $t=t_0$ の $\varphi(t) = F(\bar{\varepsilon}_p)$ であり, 左要素が微分時間後, $\varphi(t) < F(\bar{\varepsilon}_p(t_0))$ と右側か又は $\partial \varphi^* / \partial t > 0$, あるいは $\partial \varphi^* / \partial t \equiv 0$ と右側か $t=t_0$ の時点で跳躍している。大抵把に之は次の様に可能である。まず ε_1 と $1 \leq k \leq n$ に $\varphi(t) < F(\bar{\varepsilon}_p)$ であるものと $\partial \varphi^* / \partial t|_{t=t_0} \neq 0$ であるものとを考慮する。

$$\partial \varphi^* / \partial t = \partial \varphi^* / \partial \varepsilon \approx \partial \varphi^* / \partial \varepsilon (1 - \frac{\partial \varphi^* / \partial t}{F + \partial \varphi^* / \partial t})$$

このことから, ε の連続性を考慮すれば ε_1 に属する要素の微分時間後の状態は t_0 以前の data より決定される。このとき $\frac{d}{dt}(\partial \varphi^* / \partial t)|_{t=t_0}$ の符号は ε_2 の要素の次の状態と独立に定まるというわけであるから, 例えば elastic と仮定して t_0 以後の解を出し, この解の $\frac{d}{dt}(\partial \varphi^* / \partial t)|_{t=t_0}$ の符号をみればよい。これが正であればこの要素は t_0 の微分時間後は plastic と仮定して解が求められる。負であればそのままだけである。この考えれば左側要素がある場合は ε_2 とし $k=1$ と $1 \leq k \leq n$ の走破を假定して $\partial \varphi^* / \partial t = \frac{d}{dt}(\partial \varphi^* / \partial t) = 0$ と右側要素に左側 $1 \leq k \leq n$ の走破を假定して $t=t_0+t_0$ にあける他がほとんどないわけである。以下これをくり返せばすべての要素にたいして t_0 の微分時間後の状態 $t=t_0$ の時点で決定し, 残りの問題の設定が可能である。このように右側と連続して行けば丁度よい。このように設定可能である。

§3 解の存在性評価

先ず簡単なエネルギー評価から、容易に得られる。

各要素上 $\forall (C = D^{-1})$

$$(3.1) \quad \dot{\varepsilon} - C\dot{\sigma} = \begin{cases} 0 & (\text{elastic}) \\ \frac{1}{F} \varphi \cdot \varphi^* \dot{\sigma} & (\text{plastic}) \end{cases}$$

の二つが成り立つ。この $\forall$, σ との関係を作れば

$$\dot{\varepsilon}^* \sigma - [C\dot{\sigma}]^* \sigma - \left(-\frac{1}{F} \varphi \dot{\sigma} \cdot \varphi^* \dot{\sigma} \right) = 0$$

簡単な計算により $\varphi \dot{\sigma} = \dot{\varepsilon}$ である。各要素に積分し、それを

元素 Ω_e に加えると、 Ω_e を塑性状態の要素の集合として、

$$(\dot{\varepsilon}, \sigma) - (C\dot{\sigma}, \sigma) - \int_{\Omega_p} \frac{1}{F} \varphi \cdot \varphi^* \dot{\sigma} d\Omega = 0$$

$$\frac{1}{F} \varphi \dot{\sigma} = \dot{\varepsilon}_p \quad \text{であるから、弾性状態では } \dot{\varepsilon}_p = 0 \text{ を考慮すると}$$

次の等式が容易に導かれる。 $\|\sigma\|_C^2 = (C\sigma, \sigma)$ として、

定理: $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\rho \|\dot{u}\|^2 + \|\sigma\|_C^2] + \int_{\Omega} \varphi \dot{\varepsilon}_p d\Omega = (b, \dot{u})$

高階の導関数に拘らず (3.1) の両辺を微分し、() によって、
論法を使えば、次の評価式を得る。

定理: $\frac{1}{2} [\rho \|\dot{u}\|^2 + \|\sigma\|_C^2 + \int_{\Omega} F(\dot{\varepsilon}_p)^2 d\Omega] \leq \int_0^t (b, \dot{u}) dt$

§4 不等式による表現

(2.1) ~ (2.2) にたいする初期値問題は、というより (2.2) の
条件は ^{第一の} 不等式で表現できる。このためにパラメータ ε_p の変換
を行う。(この変換は解の一意性の証明を容易にするため
であり、不等式の表現のためのみではない。)

いま関数 $F = F(\xi)$ に対し, 変数 $\xi \rightarrow \zeta$ と

$$\zeta = \int_0^\xi \sqrt{F'(\lambda)} d\lambda$$

を定義し, この変数に関する関数 $G(\zeta)$ を次式により定める.

$$G'(\zeta) = \sqrt{F'(\xi)} \quad G(0) = F(0)$$

このとき, 容易にわかるように $G(\zeta) = F(\xi)$ が成立する.

関数 G は $G(0) > 0$, $G' > 0$, $G'' < 0$ とし, F から G の性質を

そのまま新しい変数に関する関数として持つ. したがって

$$\bar{\varepsilon}^h = \int_0^{\bar{\varepsilon}_p^h} \sqrt{F'(\lambda)} d\lambda$$

により新しい硬化パラメータ $\bar{\varepsilon}^h$ を導入すれば, このパラメータ

に関する $G(\bar{\varepsilon}^h) = F(\bar{\varepsilon}_p^h)$ であり, G は F の性質を保存して

いる. 次の記号を使う.

$$B_F = \{ (\tau, \zeta) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^1; \varphi(\tau) \leq F(\zeta) \}$$

$$B_G = \{ (\tau, \zeta) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^1; \varphi(\tau) \leq G(\zeta) \}$$

$$K_F = \{ (\tau, \zeta) \in [L^2(\Omega)]^3 \times L^2(\Omega); (\tau, \zeta) \in B_F \text{ a.e. } \Omega \}$$

$$K_G = \{ (\tau, \zeta) \in [L^2(\Omega)]^3 \times L^2(\Omega); (\tau, \zeta) \in B_G \text{ a.e. } \Omega \}$$

$$S^h = \{ (u^h, \sigma^h, \bar{\varepsilon}^h); u^h = \sum_{p \in \mathcal{P}} u_p^h g_p(x), \sigma^h = \sum_e \sigma_e^h(x) x_e, \bar{\varepsilon}^h = \sum_e \bar{\varepsilon}_e^h(x) x_e \}$$

定理: (2.1) ~ (2.2) は次の問題と同等である.

$(u^h, \sigma^h, \bar{\varepsilon}^h) \in S^h$ は次の条件を満たすものを求めよ. a.e. $T \cup$

$$(4.1) \quad \rho(u_p^h, g_p) + \sum_j (\sigma_{p,j}^h, g_{p,j}) \geq (b_p, g_p) \quad \forall p \in \mathcal{P}$$

$$(4.2) \quad (\dot{\varepsilon}^h - C \dot{\sigma}^h, \tau - \sigma^h) - (\dot{\varepsilon}^h, \zeta - \bar{\varepsilon}^h) \leq 0 \quad \forall (\tau, \zeta) \in K_G,$$

および $\dot{\varepsilon}^h = \varepsilon(\dot{u}^h)$, $(\sigma^h, \bar{\varepsilon}^h) \in K_G$. 微分可能性と (2) は

$$\ddot{u}^h, \dot{\sigma}^h, \dot{\varepsilon}^h \in L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega))$$

を要求し, 又初期条件は前と同じである。

証明には次の事を使う。 Ω 内の各点 x において, $(\sigma^h, \varepsilon^h)$ は $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ の $\overbrace{\text{convex set}}^{\text{closed}}$ K_G の内部にあるか, 又は, 境界上にあるとせば, ベクトル

$$\begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}^h - C \dot{\sigma}^h \\ -\dot{\varepsilon}^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial \varphi \\ -G'(\varepsilon^h) \end{pmatrix} \frac{\dot{\varepsilon}^h}{|\dot{\varepsilon}^h|}$$

が K_G の外向法線に平行である。尚 (4.1) ~ (4.2) の解の一意性は標準的な手法で示せる。

3.5 収束性

領域 Ω の分割が小さく存在し, $\varepsilon \rightarrow 0$ とする (記号的に $n \rightarrow \infty$ と表わす), (2.1) ~ (2.2) の解 $(u^h, \sigma^h, \varepsilon^h)$ はある意味で収束する。このことを表わすために次のような問題を考へる。 $\mathcal{W}_2'(\Omega, P_0)$ により, $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ に属し P_0 の近傍に $\equiv 0$ とする変数全体を $\mathcal{W}_2'(\Omega)$ により完備化して $\mathcal{W}_2$ と表わす。

問題: $(u, \sigma, \varepsilon) \in [L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega))]^3$ の次の条件を満たすものを求め。

$$\text{a.e. } T; \quad (5.1) \quad \rho(\ddot{u}_i, g) + \sum_j (\sigma_{ij}, \varphi_{ij}) = (b_i, \varphi) \quad \varphi \in \mathcal{W}_2'(\Omega, P_0)$$

$$(5.2) \quad (\dot{\varepsilon} - C \dot{\sigma}, \tau - \sigma) - (\dot{\varepsilon}, \tau - \varepsilon) \leq 0 \quad \forall (\tau, \tau) \in K_G,$$

および $\varepsilon = \varepsilon(u)$, $(\sigma, \varepsilon) \in K_G$ 。微分可能性と (2) 次の条件を課す。

$$(u, \dot{u}) \in L^{\infty}(0, T; \mathcal{W}_2'(\Omega, P_0)), \quad (\ddot{u}, \dot{\sigma}, \dot{\varepsilon}) \in L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega)). \quad \text{又初期条件。}$$

証明は標準的な手法で可能である。尚、 $(\sigma, \bar{\varepsilon}) \in K_G$ の証明は次のように考えればよい。 $\pi \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^1 \rightarrow B_G$ の射影 (ユークリッドの距離 $\|\cdot\|$) とする。 π の連続性より $\|\pi(\sigma, \bar{\varepsilon})\| \leq \|\sigma, \bar{\varepsilon}\|$ を考慮すれば、 $(\sigma, \bar{\varepsilon}) \in L^0(0, T; L^2(\Omega))$ ならば $\pi(\sigma, \bar{\varepsilon}) \in B_G$ である。ベクトルの内積

$$\langle (\sigma, \bar{\varepsilon}) - \pi(\sigma, \bar{\varepsilon}), (\tau, \zeta) - \pi(\sigma, \bar{\varepsilon}) \rangle$$

を考えると、これは a.e. T 上の a.e. Ω 上で非正である。故に $(\tau, \zeta) \in K_G$ ならば常に次式が成立する。

$$\int_0^T \langle (\sigma, \bar{\varepsilon}) - \pi(\sigma, \bar{\varepsilon}), (\tau, \zeta) - \pi(\sigma, \bar{\varepsilon}) \rangle_{\Omega} dt \leq 0$$

$(\sigma^h, \bar{\varepsilon}^h) \in K_G$ であるから、 (τ, ζ) と $(\sigma^h, \bar{\varepsilon}^h)$ に対して、 $L^0(0, T; L^2(\Omega))$ 上の $(\sigma^h, \bar{\varepsilon}^h)$ が $(\sigma, \bar{\varepsilon})$ に弱*収束する (考えればよい) ことより、

$$\int_0^T \|\sigma, \bar{\varepsilon} - \pi(\sigma, \bar{\varepsilon})\|_{\Omega}^2 dt = 0$$

a.e. T 上で、 $(\sigma, \bar{\varepsilon}) - \pi(\sigma, \bar{\varepsilon}) = 0$ a.e. $(\sigma, \bar{\varepsilon}) \in B_G$ かつ a.e. Ω 上で成立する。故に $(\sigma, \bar{\varepsilon}) \in K_G$ 。

§6. 強収束性

標準的な手法で次の第1の証明を行う。

定理: u_x^h が Γ_0 上の境界条件を満たす任意の区分的一次関数とし、 $\dot{\varepsilon}_x = \varepsilon(u_x^h)$ とする。 $(u_x^h, \sigma_x^h, \bar{\varepsilon}_x^h)$ が有限要素解とすれば、 $0 \leq t \leq T$ に対して次の評価式が成立する。

$$\frac{1}{2} [\rho \|\dot{u} - \dot{u}^h\|^2 + \|\sigma - \sigma^h\|_C^2 + \|\varepsilon - \varepsilon^h\|^2]$$

$$\leq \int_0^t [\rho (\ddot{u} - \ddot{u}^h, \ddot{u} - \ddot{u}^h) + (\sigma - \sigma^h, \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^h)] dt$$

＝α 右辺は近似理論により $\rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0$) と存する。

以上、有限要素解から上の意味での真の解へ強収束するといふ第1の証明をした。この収束の オーダー を出すには真の解の滑らかさがこの定式化に十分であり、定式化のレベルの1層の発展が望まれる。

文献

- (1) Miyoshi, T; Elastic-plastic vibration of a rod
R.I.M.S. Kyoto Univ. Vol. 16 No. 2 (1980)
- (2) Miyoshi, T; On existence proof in plasticity theory
Kumamoto J. Sci. (Math.) Vol. 14 No. 1 (1980)
- (3) Johnson, C; On plasticity with hardening, J. Math. Anal. Appl. 62 (1978)