

カオス尺度によるスピン系の解析

東京理科大学理工学部情報科学科
井上 啓・大矢雅則

1. はじめに

力学系のカオスの研究が、(1) エントロピー、(2) リアプノフ指数 (3) フラクタル次元 (4) エルゴート理論 (5) 分岐構造 等の概念を用いて行われているが[1,2,3,5,6,18], これらの概念は、それぞれの分野によって個別に扱われている. こうした状況の中で、様々な分野における力学系のカオスを統一的に扱うために、著者の一人は様々な複雑さと状態変化の力学の融合である情報力学を提唱した[13,15]. カオス尺度は、力学系のカオスの度合いを測る量で情報力学の2つの複雑さを用いて定義される. 今までに、カオス尺度によるいくつかのカオス現象の解析が試みられ、その有用性が示されている[11,16]. 昨今、古典カオス力学系を量子化して、量子系でどのように振る舞うかや古典系でカオスを生じる原因が量子力学のレベルでどこにあるのかといった量子カオスの研究がなされている. これらの研究は、従来、量子準位統計、ランダム行列論、グッツビラーの跡公式などのようにエネルギーと波動関数に対応するシュレディンガー方程式の固有値と固有関数を基礎にして古典力学系と対応する量子系の関係を調べるといったことに視点が置かれている. それに対し、我々は、量子系における状態変化を直接調べるために、量子系の複雑さとして von Neumann エントロピーと量子相互エントロピーを用いてカオス尺度を構成し[9,17], スピン系の非線形な変換の下での一般的振る舞いや外磁場の下での振る舞いをカオス尺度を用いて考察を行った.

2. 情報力学における複雑さとカオス尺度

この節では、情報力学の複雑さについて説明し、古典系と量子系におけるエントロピー型カオス尺度の定義を述べる.

$(\mathcal{A}, \mathcal{G}, \alpha(\mathcal{G}))$ を入力系, $(\overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathcal{G}}, \overline{\alpha}(\overline{\mathcal{G}}))$ を出力系とする. $\mathcal{A}$ を考察の対象(観測量など)となるものの全体, $\mathcal{G}$ を $\mathcal{A}$ の元にある科学的な量(観測量など)を対応させる仕方

の集合, $\alpha(G)$ を $\mathcal{A}$ の元や $\mathfrak{S}$ の元の変化を表す $g \in G$ をパラメーターにもつ写像とする. しばしば, $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}}, \mathfrak{S} = \overline{\mathfrak{S}}, \alpha = \overline{\alpha}$ とおく. 特に, 量子系は $\mathcal{A}$ がヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素全体を $B(\mathcal{H})$, $\mathfrak{S}$ が $\mathcal{H}$ 上の密度作用素全体を $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ で記述される.

入力系と出力系が決められると, 入力系の様相は $\mathfrak{S}$ の要素である状態によって記述される. 状態変化は $\mathfrak{S}$ から $\overline{\mathfrak{S}}$ への写像として表され, チャンネル $\Lambda^*: \mathfrak{S} \rightarrow \overline{\mathfrak{S}}$ と呼ばれる. このチャンネルの概念は数学, 物理の両方の面において基本となる部分である.

情報力学の系の複雑さには2種類のものがある. 一つは, 系の状態 φ 自体が有する複雑さ $C(\varphi)$ であり, もう一つはある状態 φ が他の状態 $\Lambda^*\varphi$ へ変化したとき, φ から $\Lambda^*\varphi$ へ伝達された複雑さ $T(\varphi; \Lambda^*)$ (伝達複雑量)である. これらの複雑さは, 以下の4つの条件を満足する[13,15].

(1) 正值性: 任意の状態 φ に対して,

$$C(\varphi) \geq 0$$

(2) 不変性: 素な状態の集合 $ex\mathfrak{S}$ から $ex\mathfrak{S}$ ($\mathfrak{S}$ 上の全ての端点の集合)への全単射 ξ に対して,

$$\begin{aligned} C(\varphi) &= C(\xi(\varphi)) \\ T(\varphi; \Lambda^*) &= T(\xi(\varphi); \Lambda^*) \end{aligned}$$

(3) 加法性: $\Phi = \varphi \otimes \psi$ に対して,

$$C(\Phi) = C(\varphi) + C(\psi)$$

(4) 基本不等式:

$$0 \leq T(\varphi; \Lambda^*) \leq C(\varphi)$$

このとき, φ と Λ^* に関するカオス尺度(CD)は

$$D(\varphi; \Lambda^*) \equiv C(\Lambda^*\varphi) - T(\varphi; \Lambda^*)$$

で与えられ, カオス尺度は対象としている系に依存して構成される. C, T の例は, エントロピー S と相互エントロピー I である. 量子系では入力状態 φ は密度作用素 ρ

で表現される。入力状態 ρ が力学的にチャネル Λ^* によって変化するとき、von Neumann エントロピー $S(\rho)$ と量子相互エントロピー $I(\rho; \Lambda^*)$ [12] は以下で与えられる。

$$S(\rho) = -\text{tr} \rho \log \rho$$

$$I(\rho; \Lambda^*) = \sup \left\{ \sum_k \lambda_k S(\Lambda^* E_k, \Lambda^* \rho); \{E_k\} \right\}$$

ただし、 $\rho = \sum_k \lambda_k E_k$ (シャッテン分解) である。古典系と量子系のどちらの場合においても S と I が複雑さに関する4つの条件を満たすことが証明されている [7,15]。 S と I が情報力学の複雑さ C と T の条件を満たすことを説明する。エントロピー $S(\rho)$ の基本性質 から、(i) $S(\rho) \geq 0$ (ii) $S(j(\rho)) = S(\rho)$ (ただし、 j は直交する純粋状態の集合から直交する純粋状態の別な集合への全単射) (iii) $S(\rho_1 \otimes \rho_2) = S(\rho_1) + S(\rho_2)$ を満足することが証明されている [14]。また、相互エントロピー $I(\rho; \Lambda^*)$ の基本性質から (i) (ii) を満足し、

$$0 \leq I(\rho; \Lambda^*) \leq \min \{S(\rho), S(\Lambda^* \rho)\}$$

を満たすことが文献 [12] で証明されている。したがって、エントロピー $S(\rho)$ と相互エントロピー $I(\rho; \Lambda^*)$ はそれぞれ情報力学の複雑さ C と T の条件を満たす。エントロピー S と相互エントロピー I を使って、量子系にカオス尺度が次のように定義されている [17]。

$$D^{(n)}(\rho; \Lambda^*) = \inf \left\{ \sum_k \lambda_k^{(m)} S(\Lambda^{*j} E_k^{(m)}); E^{(m)} = \{E_k^{(m)}\}, j = 1, \dots, n \right\}$$

ただし、 $\rho^{(m)} = \Lambda^{*m} \rho = \sum_k \lambda_k^{(m)} E_k^{(m)}$ である。このカオス尺度を使うと、力学系がカオスであるかどうかを以下のように判定することが出来る：

$D > 0 \Rightarrow$ 力学系はカオス的である。

$D = 0 \Rightarrow$ 力学系は安定している。

3. 量子系におけるカオス尺度

この章では、量子系において、von Neumann エントロピーと量子相互エントロピーを用いて定義されるエントロピー型カオス尺度を用いてスピン系の非線形な変換の

下での一般的振る舞いや外磁場の下での振る舞いを考察する.

3. 1. スピン1/2系における非線形変換について[10]

スピン1/2系の状態 ρ は, $\|\bar{X}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \leq 1$ を満足する $\bar{X} = (x_1, x_2, x_3)' \in R^3$ に対して,

$$\rho = \frac{1}{2}(I + \bar{\sigma}\bar{X})$$

で与えられる. ここで, $\bar{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)'$ で

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である. このとき, 以下の補題が成り立つ.

補題3.1.1: スピン1/2系の状態 ρ のシャッテン分解は

$$\rho = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} E_{\alpha} \quad (\alpha = \pm 1)$$

で一意に与えられる. ただし,

$$\lambda_{\alpha} = \frac{1}{2}(1 + \alpha\|\bar{X}\|), \quad E_{\alpha} = \frac{1}{2}\left(I + \alpha \frac{\bar{\sigma}\bar{X}}{\|\bar{X}\|}\right).$$

いま, $f: R^3 \rightarrow R^3$ を $\|f(\bar{X})\| \leq 1$ を満足する3次元写像であるとする. このとき, この f を用いて, 量子スピン1/2系の非線形変換 $\Lambda_f^*: \rho \rightarrow \Lambda_f^* \rho$ を

$$\Lambda_f^* \rho = \frac{1}{2}(I + \bar{\sigma}f(\bar{X}))$$

で定義する. このとき, 以下の定理が成り立つ.

定理3.1.1: $\Lambda_f^* \rho$ のシャッテン分解が $\Lambda_f^* \rho = (\Lambda_f^*)^j \rho = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^{(j)} E_{\alpha}^{(j)}$, $\Lambda_f^* E_{\alpha}^{(m)}$ のシャッテン分解が $\Lambda_f^* E_{\alpha}^{(m)} = (\Lambda_f^*)^j E_{\alpha}^{(m)} = \sum_{\beta} \omega_{\alpha\beta}^{(m,j)} F_{\alpha\beta}^{(m,j)}$ で表されるものとする. このとき, 任意の f

に対して, ある定数 m のカオス尺度は

$$D(\rho^{(n)}; \Lambda_f^*) = \inf \left\{ -\sum_{\alpha} \sum_{\beta} \lambda_{\alpha}^{(m)} \omega_{\alpha\beta}^{(m,j)} \log \omega_{\alpha\beta}^{(m,j)}; j=1, \dots, n \right\}$$

で与えられる. ただし,

$$\lambda_{\beta}^{(m)} = \frac{1}{2} \left(1 + \alpha \|f^m(\bar{X})\| \right)$$

$$\omega_{\alpha\beta}^{(m,j)} = \frac{1}{2} \left(1 + \beta \left\| f \left(\alpha \frac{f^{m+j-1}(\bar{X})}{\|f^{m+j-1}(\bar{X})\|} \right) \right\| \right)$$

ここで, 次のようなパイこね型変換写像を定義する.

定義3.1.1 $(x_n, y_n, z_n)^t \in R^3$ に対して,

$$f(x_n, y_n, z_n) = \begin{cases} f_1(x_n, y_n, z_n) & \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x_n < 0 \right) \\ f_2(x_n, y_n, z_n) & \left(0 \leq x_n \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \end{cases}$$

ただし,

$$f_1(x_n, y_n, z_n) = \left(2a \left(x_n + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} a \left(y_n + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

$$f_2(x_n, y_n, z_n) = \left(2a \left(x_n + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \sqrt{2}a - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} a \left(y_n + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}}a - \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

もし, $\frac{1}{\sqrt{2}} < |x_n| \leq 1$ ($\frac{1}{\sqrt{2}} < |y_n| \leq 1$) ならば, $x_n = 0$ ($y_n = 0$) である.

以下の図は, $x_0 = y_0 = z_0 = 0.3$, $m = 1000, n = 2000$ のときのカオス尺度 $D(\rho^{(n)}; \Lambda_f^*)$ の a に関する推移を表している.

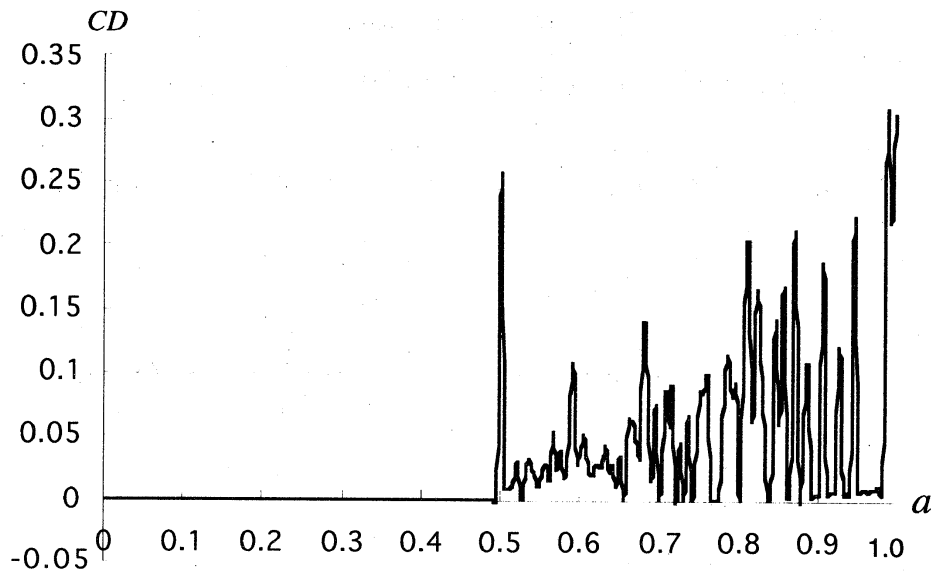


図1. パイこね型変換のカオス尺度

3.2. 磁場の影響のもとでのスピン1/2系の解析

この節では、以下のようなハミルトニアンで与えられるスピン1/2力学系を考え、磁場の影響のもとで、この力学系のカオス的な振る舞いをカオス尺度を用いて考察する。

$$H = \frac{\hbar^2}{4} A \sigma_3^2 - \frac{\hbar}{2} \mu B \sigma_1 \cos(\omega t)$$

このとき、ハイゼンベルグ運動方程式 $\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = (i\hbar)^{-1} [\vec{\sigma}, H]$ は、以下の3つの方程式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_1}{dt} &= -\frac{\hbar}{2} A \{\sigma_2, \sigma_3\} = 0 \\ \frac{d\sigma_2}{dt} &= -\frac{\hbar}{2} A \{\sigma_1, \sigma_3\} + \mu B \sigma_3 \cos(\omega t) = \mu B \sigma_3 \cos(\omega t) \\ \frac{d\sigma_3}{dt} &= -\mu B \sigma_2 \cos(\omega t) \end{aligned}$$

このハイゼンベルグ運動方程式は線形な微分方程式である。いま、微分 $\frac{d\vec{\sigma}}{dt}$ を差分 $\frac{\vec{\sigma}(j+1) - \vec{\sigma}(j)}{\Delta t}$ ($j \in \mathbf{N} \cup \{0\}$) に置き換えると、ハイゼンベルグ運動方程式は

$$\begin{aligned}
\sigma_1(j+1) &= \sigma_1(j) \\
\sigma_2(j+1) &= \sigma_2(j) + \mu B \sigma_3(j) \cos(\omega j \Delta t) \\
\sigma_3(j+1) &= \sigma_3(j) - \mu B \sigma_2(j) \cos(\omega j \Delta t)
\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

で表される[10]. 下図は, 時間変化とベクトル変化の様子を表したものである.

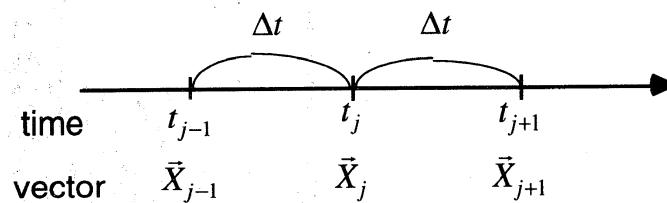


図2. 時間 t とベクトル $\bar{X}$ の変化

いま, 時間 j の状態 $\rho^{(j)}$ がこの差分化されたハイゼンベルグ運動方程式のもとで, どのように変化するのかを考えてみる. このとき, 以下の補題が成り立つ.

補題3.2.1: 初期状態 ρ を $\rho = \frac{1}{2}(I + \vec{\sigma} \cdot \bar{X})$ で与えると, j ステップ後には

$$\frac{1}{2}(I + \vec{\sigma} f_j(\bar{X}))$$

となる. ただし, $f_j: R^3 \rightarrow R^3$ は

$$f_j(\bar{X}) = \prod_{k=1}^j \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a_k \\ 0 & -a_k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad a_k = \mu B \Delta t \cos(\omega k \Delta t)$$

である.

しかしながら, $\|f_j(\bar{X})\| \leq 1$ が成り立つとは限らないので, $\rho^{(j)}$ に対し, 時刻 j を $j+1$ に置き換えて得られる変換が, 必ずしも状態変化を記述しているとは限らない. そこで, 初期状態 ρ を j ステップ後の状態に移すチャネル $\Lambda_{f_j}^*$ を

$$\Lambda_{f_j}^* \rho = \frac{|\Gamma_{f_j}^* \rho|}{\text{tr} |\Gamma_{f_j}^* \rho|}$$

で定義する。ただし,

$$\Gamma_{f_j}^* \rho = \frac{1}{2} (I + \vec{\sigma} f_j(\vec{X}))$$

である。この出力状態 $\Lambda_{f_j}^* \rho$ のシャッテン分解は一意であり、このとき、以下の定理が成り立つ。

定理3.2.1: 初期状態 $\rho = \frac{1}{2} (I + \vec{\sigma} \vec{X})$ に対して、 $f_j: R^3 \rightarrow R^3$ を

$$f_j(\vec{X}) = \prod_{k=1}^j \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a_k \\ 0 & -a_k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad a_k = \mu B \Delta t \cos(\omega k \Delta t)$$

で定義する。このとき、初期状態 ρ とチャネル Λ_f^* に関するカオス尺度は

$$D(\rho^{(n)}; \Lambda_f^*) = \inf \left\{ -\sum_{\beta} t_{\beta}^{(m,j)} \log t_{\beta}^{(m,j)}; j=1, \dots, n \right\} (\beta = \pm 1).$$

で与えられる。ただし,

$$t_{\beta}^{(m,j)} = \frac{|\mu_{\beta}^{(m,j)}|}{\sum_{\beta} |\mu_{\beta}^{(m,j)}|}, \quad \mu_{\beta}^{(m,j)} = \frac{1}{2} \left(1 + \beta \frac{\|f_{j+m}(\vec{X})\|}{\|f_m(\vec{X})\|} \right).$$

以下の図は、 $\Delta t = 0.2$, $x_1 = x_2 = x_3 = 0.3$, $m = 1000, n = 2000$ のときのカオス尺度 $D(\rho^{(n)}; \Lambda_f^*)$ の磁場の強さ μB に関する推移を表している。

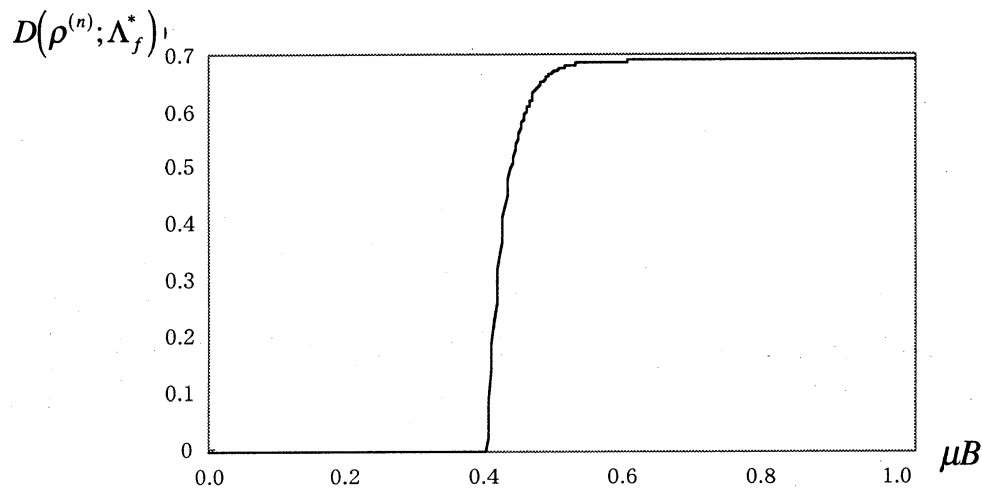


図3. スピン1/2系におけるチャネル Λ_f^* のカオス尺度

4. 結論

カオス尺度は力学系のカオスの度合いを測る尺度であり，これらの結果は，カオス尺度が量子系のカオス的な振る舞いを特徴付けることが出来ることを示している．具体的に次の結果を得ることが出来た．

- (1) パイこね型変換写像から構成される量子スピン1/2系の振る舞いは，変数 a が $0 \leq a < 0.5$ では安定しているが， $a \geq 0.5$ の領域では複雑となり，カオス的となることが分かった．
- (2) 時間微分を差分に置き換えることにより，時間関するユニタリー性が壊れ，特に，磁場の強さの強いところではカオスが生じていることが分かった．

参考文献：

- [1] S. Akashi, The asymptotic behavior of ε -entropy of a compact positive operator, J.Math.Anal.Appl., 153, 250 (1990).
- [2] R. Alicki, Quantum geometry of noncommutative Bernoulli shifts, Banach Center Publications, Mathematics Subject Classification 46L87 (1991).
- [3] F. Bennatti, *Deterministic Chaos in Infinite Quantum Systems*, Springer (1993).
- [4] G.Casati, G.Maspero and D.Shepeliansky: Relaxation process in a regime of quantum chaos, Phys. Rev. E 56, R6233 (1997).
- [5] R.L. Devaney, *An Introduction to Chaotic dynamical Systems*, Benjamin (1986).

- [6] H. Hasegawa, Dynamical formulation of quantum level statistics, *Open Systems and Information dynamics*, 4, 350 (1997).
- [7] R.S. Ingarden, A. Kossakowski and M. Ohya, *Information Dynamics and Open Systems*, Kluwer Academic Publishers (1997).
- [8] K. Inoue, M. Ohya and S. Sato, Application of chaos degree to some dynamical systems, preprint.
- [9] K. Inoue, A. Kossakowski and M. Ohya, On quantum chaos in a spin system, preprint.
- [10] K. Nakamura, *Quantum Versus Chaos- Questions Emerging from Mesoscopic Cosmos-*, Kluwer Academic Publishers (1997).
- [11] M. Kosaka and M. Ohya, A study of chaotic phenomena by information dynamics (in Japanese), *IEICE, J80-A*, No.12, 2138 (1997).
- [12] M. Ohya, On compound state and mutual information in quantum information theory, *IEEE Trans. Information Theory*, 29, No.5, 770 (1983).
- [13] M. Ohya, Information dynamics and its applications to optical communication processes, *Lecture Note in Physics*, 378, 81 (1991).
- [14] M. Ohya and D. Petz, *Quantum Entropy and Its Use*, Springer-Verlag(TMP) (1993).
- [15] M. Ohya, Complexity and fractal dimensions for quantum states, *Open Systems and Information Dynamics*, 4, 141 (1997).
- [16] M. Ohya, Complexities and their applications to characterization of chaos, *International Journal of Theoretical Physics*, 37, No.1, 495 (1998).
- [17] M. Ohya, A new description of chaos, submitted to *ROMP*.
- [18] M. Toda, Crisis in chaotic scattering of a highly excited van der Waals complex, *Physical Review Letters*, 74, No.14, 2970 (1995).