

Chain recurrence と P.O.T.P.

名大理 下村 尚司

Takashi Shimomura

§1 basic facts and definitions.

(X, d) を metric d を持つ compact metric space とする。 $f: X \rightarrow X$ を continuous surjection とする。
 $\alpha > 0, x, y \in X$ とする。 $\{x_0, \dots, x_m\}$ ($x_i \in X$) が x から y への α -chain とは、 $x = x_0, y = x_m$ で、 $d(f(x_{i-1}), x_i) < \alpha$ ($i = 1, 2, \dots, m$) が満たされることを言う。 $m+1$ をその長さと言う。
 $\alpha > 0$ に対し x から y への α -chain 及び y から x への α -chain が存在するとき、 $x \asymp y$ と書く。任意の $\alpha > 0$ に対し $x \asymp y$ となるとき $x \sim y$ と書き、 x と y が chain equivalent であると言う。 $x \sim x$ のとき x は chain recurrent であると言い $R(f) = \{x \in X, x \sim x\}$ とかく。

$R(f)$ は closed set であり $\sim$ は $R(f)$ の equivalence relation である。 $\sim$ の equivalence class を chain component と呼ぶ。
 chain component は closed set である。

Lemma 1. $f(R(f)) \subset R(f)$ 。

Proof. $x \in R(f)$ とする。 $\alpha > 0$ を任意に固定する。 $\delta > 0$ を、
 $d(y, z) < \delta$ なら $d(f(y), f(z)) < \alpha$ となるように固定する。

$\{x_0, \dots, x_m\}$ を x から x への δ -chain とする。このとき $\{f(x_0), \dots, f(x_m)\}$ は $f(x)$ から $f(x)$ への α -chain である。 α は任意だから求めることを得る。 $\square$

Th. 2. (C. Robinson [2]) $R = R(f)$ とするとき、 $R(f|_R) = R(f)$ 。

Proof. [3] p. 429 と同様 $\square$

Remark. $f(R(f)) = R(f)$ 。

Prop. 3. F を chain component とすると $f(F) = F$ 。

Proof. $x \in F$ とする。 $\alpha > 0$ とする。 $f(x)$ から x への α -chain があることを示す。 $0 < \delta < \alpha/2$ を $d(y, z) < \delta$ なら

$d(f(y), f(z)) < \alpha/2$ となるようにとる。 $x = x_0 = x_m$ なる δ -chain $\{x_1, \dots, x_m\}$ をとる。このとき $\{f(x), x_2, \dots, x_m\}$ が α -chain であることが容易に確かめられる。よって $f(F) \subset F$ 。 $\square$

Def. f が chain transitive とは、任意の $x, y \in X$ に対して $x \sim y$ が成立することを見る。closed set $Y \subset X$ が chain transitive とは $f(Y) = Y$ で $f|_Y$ が chain transitive であることを言う。

Prop. 4. F を chain component とすると F は chain transitive

証明の概略。 $x, y \in F$ とする。各 $m \in \mathbb{N}$ に対し $C_m = \{x_0^m, \dots, x_m^m\}$ を x から y を通って x にもどる $1/m$ -chain とする。 $\mathcal{C}(X)$ を X の non-empty closed set の集合とする。 $\bar{d}$ を $\mathcal{C}(X)$ 上の Hausdorff metric とする。すると、 $(\mathcal{C}(X), \bar{d})$ は compact なので subsequence

C_{m_k} が存在し $C_{m_k} \rightarrow^q C \in \mathcal{C}(X)$ となる。このとき $C \ni x, y$ で、 C が chain transitive であることが示される。よって $C \subset F$ であり、 F が chain transitive であることが分る。[2] 参照。

Prop. 5. f が homeomorphism のとき $\#(R(f)/\sim) = 1$ なら $X = R(f)$ 。

Proof. $x \in X \setminus R(f)$ とする。 $R(f) \cap \Omega(f)$ (ここで $\Omega(f)$ は f の non-wandering set) だから、 $\alpha(x) \subset R(f)$, $\omega(x) \subset R(f)$ である。(ここで $\alpha(x)$ は x の α -limit set, $\omega(x)$ は x の ω -limit set)。
今 $R(f)$ が chain component だから $x \in R(f)$ 、これは矛盾。 $\square$

Remark. Prop. 5 は f が continuous surjection のときも成立する。

Prop. 6. $R(f)$ が connected なら $\# R(f)/\sim = 1$ 特 に $X = R(f)$ 。

Proof. $\alpha > 0$ とする。 $x \in R(f)$ に対して $E(x, \alpha) = \{y \in R(f); x \sim_\alpha y\}$ とかく。各 $E(x, \alpha)$ が open set であることを示せばよい。
 $x \in X$ を固定する。 $x \sim_\alpha y$ とし、 x から y への α -chain を $\{x_0, \dots, x_m\}$ とする。 $d(f(x_{m-1}), x_m) < \alpha$ だから $x_m = y$ の近傍 U_1 があって $d(f(x_{m-1}), z) < \alpha \quad \forall z \in U_1$ となる。このとき $\{x_0, \dots, x_{m-1}, z\}$ は x から z への α -chain である。次に y から x への α -chain を $\{y_0, \dots, y_n\}$ とする。 $d(f(y_0), y_1) < \alpha$ だから $y_0 = y$ の近傍 U_2 があって $d(f(z), y_1) < \alpha \quad \forall z \in U_2$ となる。よって $U = U_1 \cap U_2$ とすると $U \subset E(x, \alpha)$ 、よって $E(x, \alpha)$ は open set。 $\square$

§ 2 finite chain components.

M. Hurley [2] は compact manifold 上の topologically

stable diffeomorphism が有限個の chain components を持つことを示した。ここでは $\#(R(f)/\sim) < \infty$ であるような f が X が connected である場合に持つ性質のいくつかを chain component の観点から調べる。

Th. 7. f が homeo. とする。 F が chain component で F の開近傍 U があって $(R(f) \setminus F) \cap \bar{U} = \emptyset$ であり任意の $x \in X \setminus F$ に対して $\alpha(x) \cap F = \emptyset$ ならば、 F は attractor。 (定義については [1] 参照。)

Proof. F が attractor でないとする。 $\varepsilon > 0$ を $d(x, F) < \varepsilon \Rightarrow x \in U$ となるようにとる。各 $m \in \mathbb{N}$ に対し $V_m = \{x; d(x, F) < \frac{\varepsilon}{m}\}$ とおく。

$\bar{U} \cup f(\bar{U})$ の近傍 U' を $(R(f) \setminus F) \cap \bar{U}' = \emptyset$ となるようにとる。

$\omega(V_m) = \bigcap_{k \geq 0} \overline{\bigcup_{k \geq 1} f^k(V_m)}$ とおく。仮定より $\omega(V_m) \supset F$ ($\forall m \in \mathbb{N}$) である。もし $\omega(V_m) \subset \bar{U}$ とすると F は $\omega(V_m)$ に含まれる唯一の chain component である。よって $f(\omega(V_m)) = \omega(V_m)$ に注意すると、Prop. 5 より $\omega(V_m) = F$ となる。これは仮定に反する。よって $\gamma \in \omega(V_m) \cap \bar{U}^c$ がある。 $\delta > 0$ があって $U_\delta(\gamma) \subset \bar{U}^c$ となる (ここで $U_\delta(\gamma) = \{z \in X; d(\gamma, z) < \delta\}$)。 $x_m \in V_m$ と $k \in \mathbb{N}$ があって $f^k(x_m) \in U_\delta(\gamma)$ となる。 $k_m = \min \{k \in \mathbb{N}; f^k(x_m) \in U_\delta(\gamma)\}$ とおき $y_m = f^{k_m}(x_m)$ とおくと、 $y_m \in U_\delta(\gamma) \subset \bar{U}^c$ 。必要な部分列をとって $\lim_{m \rightarrow \infty} y_m = \gamma$ とすると、 $\gamma \in U_\delta(\gamma) \subset \bar{U}^c$ 。 $m \rightarrow +\infty$ のとき $k_m \rightarrow +\infty$ である。このとき $\alpha(\gamma) \subset \bar{U}'$ が分る。 $\alpha(\gamma)$ は chain transitive ながら $\alpha(\gamma) \subset F$ となり、これは定理の仮定に反する。 $\square$

Lemma 8. X が connected で f は homeo. また $\#(R(f)/\sim) < \infty$ とする。
 $E_1, \dots, E_p$ を repeller, $F_1, \dots, F_q$ を attractor の集合とする。これらを
 vertex とし E_i から F_j への edge を任意の $\alpha > 0$ について E_i の
 点から F_j の点への α -chain が存在するとき与えることにより
 定義される graph を G' とする。このとき G' は connected。

Proof. $G' = G'_1 \cup \dots \cup G'_r$ (G'_i は connected で G'_i 's は互いに disjoint) とかく。必要なら並べかえて、 $E_1, \dots, E_s$ 及び $F_1, \dots, F_t$ が G'_1 に現われる repeller と attractor の全てとする。
 $1 \leq i \leq t$ に対し $B_i = \{x \in X \mid \text{任意の } \alpha > 0 \text{ に対し } x \text{ から } F_i \text{ の点への } \alpha\text{-chain が存在する}\}$ とおく。容易に分るように B_i は closed。 $B(G'_1) = B_1 \cup \dots \cup B_t$ とおく。同様に $B(G'_2), \dots, B(G'_r)$ を定める。 $k \neq l$ のとき $B(G'_k) \cap B(G'_l) = \emptyset$ であることを示す。
 もし $x \in B(G'_k) \cap B(G'_l)$ とすると $\#(R(f)/\sim) < \infty$ 及び Th. 7. より E_k ($1 \leq k \leq p$) があって任意の $\alpha > 0$ に対し E_k の点から x への α -chain が存在する。これは $G'_k \cap G'_l = \emptyset$ に反する。同様に任意の $x \in X, \alpha > 0$ に対して x からある F_k ($1 \leq k \leq q$) への α -chain が存在するかより $X = B(G'_1) \cup \dots \cup B(G'_r)$ 。よって X が connected だから $r = 1$ 。 □

$\#(R(f)/\sim) < \infty$ とする。また f は homeo. とする。 E, F を chain component とするとき、 E から F への向き付けられた edge $\rightarrow$ を

$x \in X \setminus R(f)$ があり、 $\alpha(x) \subset E$, $\omega(x) \subset F$ となるときに与える。

chain component を vertex とし $\rightarrow$ を edge として得られる oriented graph を G とする。

Lemma 9. E, F を chain component とする。任意の $\alpha > 0$ に対し E の点から F の点への α -chain があるとき E から F への G の path がある。

Proof. E, F をそれぞれ一点に同一視してできる商空間と f からその商空間に誘導される homeo. についても graph が同様に定義できて、 G に一致するから、 E, F は fixed point としてよい。

$\{E_1, \dots, E_u\}$ を chain component 全ての集合とする。各 E_i に開近傍 U_i があって、 $K_i = f^{-1}(U_i) \cup U_i \cup f(U_i)$ は互いに disjoint になる。 K_i の開近傍 V_i を $\overline{V_i} \cap \overline{V_j} = \emptyset$ ($i \neq j$) となるように取る。各 $m \in \mathbb{N}$ について、 E から F への $\frac{1}{m}$ -chain $P_m = \{x_0^m, \dots, x_{m_n}^m\}$ がある。 $P_m \in \mathcal{C}(X)$ だから必要な部分列をとって $\lim_{k \rightarrow \infty} P_{m_k} = P \in \mathcal{C}(X)$ とすることが出来る。 E, F は fixed point だから $\overline{d}(f(P_{m_k}), P_{m_k}) < \frac{1}{m_k}$ より、 $f(P) = P$ が分る。以下概略を記す。 $x \in P \setminus F$ があり、 $\omega(x) \subset F$ となる。 $\alpha(x)$ は chain transitive だから $1 \leq i \leq u$ があり、 $\alpha(x) \subset E_{i_1}$ となる。 $\alpha(x) \subset P$ だから $E_{i_1} \cap P \neq \emptyset$ 。よってもし $E_{i_1} \neq E$ なら $y \in P \setminus R(f)$ があり、 $\omega(y) \subset E_{i_1}$ となる。よって $\alpha(y) \subset E_{i_2}$ なる $1 \leq i_2 \leq u$ がある。この操作は $E_{i_j} = E$ に到るまで続けられる。しかし cycle がないので実

際 E に到る。 □

Th. 10 X が connected, f が homeo. $\#(R(f)/\sim) < \infty$ なる graph G は connected。

Proof. lemma 8, lemma 9 より明らか。 □

Cor. 11. X が connected, f が homeo. $2 \leq \#(R(f)/\sim) < \infty$ なる各 chain component E に対し $x \in X \setminus E$ があって $\alpha(x) \subset E$ または $\omega(x) \subset E$ となる。

Proof. theorem 10 より明らか。 □

§3 the pseudo-orbit tracing property

以下 f を homeomorphism とする。

X の点列 $\{x_i\}$ が α -pseudo-orbit ($\alpha > 0$) であるとは、

$d(f(x_i), x_{i+1}) < \alpha$ が成立することとを言う。 $\{x_i\}$ が ε -trace

($\varepsilon > 0$) されるとは、 $x \in X$ があって、 $d(f^i(x), x_i) \leq \varepsilon$ が成立する

ことを言う。 (X, f) が P.O.T.P. を持つとは、任意の $\varepsilon > 0$ に

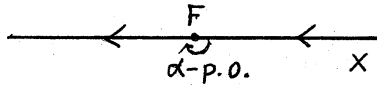
対し $\alpha > 0$ があって、任意の α -pseudo-orbit (α -p.o.) が ε -trace

されることを言う。

Th. 12. f が P.O.T.P. を持つ homeo. とする。 F が chain component で $R(f)$ で open だとし、さらに $\text{int} \{x \in X; \omega(x) \subset F\} \neq \emptyset$ なる F は attractor である。

Proof. F が attractor でないとすると、theorem 7 より $x \in X \setminus F$

があって $\alpha(x) \subset F$ となる。これは P.O.T.P. に矛盾する。(下図参照)

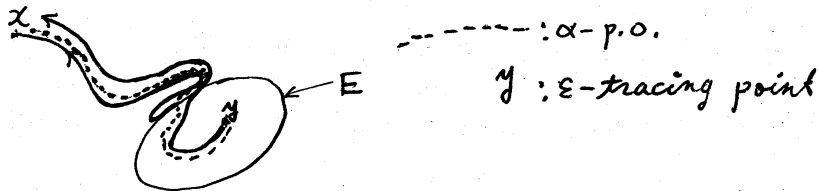


□

Th. 13. X が connected で f が P.O.T.P. を持つ homeo. で

$2 \leq \#(R(f)/\sim) < \infty$ のとき、 E を chain component とすると $\text{int } E = \emptyset$ 。

Proof. corollary 11 より $x \in X \setminus E$ があって $\alpha(x) \subset E$ または、
 $\omega(x) \subset E$ 。これは P.O.T.P. に矛盾する。(下図参照)



□

Th. 14. f が P.O.T.P. を持つ homeo. とする。 M を minimal set の族とする。このとき $R(f) = \overline{\bigcup_{K \in M} K}$ 。

Proof. $x \in R(f)$ 、 $\alpha > 0$ とする。 x を通る cyclic α -chain を ϵ -trace する点の全体は f -invariant closed set を成す。その minimal set K をとると $d(x, K) \leq \epsilon$ である。 ϵ は任意だから求めることを得る。

□

Th. 15. f が P.O.T.P. を持つ homeo. で chain transitive のとき f は topologically transitive。

Proof. U, V を空でない open set とする。 $n \geq 0$ があって $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ となることを示せばよい。 $p \in U, q \in V$ とする $p \sim q$ だから P.O.T.P. より明か。

§4 chain mixing, P.O.T.P. and topological entropy.

Def. closed set $Y \subset X$ が chain mixing とは $f(Y) = Y$ で任意の $x, y \in Y$ に対し $\alpha > 0$ を任意にとったとき $N \in \mathbb{N}$ があって任意の $m \geq N$ に対し x から y への α -chain $\{x_0, \dots, x_m\} \subset Y$ が存在することを言う。 X が chain mixing のとき f が chain mixing と言う。

Remark 1). Y が chain transitive とする。ある $x, y \in Y$ に対し α を任意にとったとき $N \in \mathbb{N}$ があって任意の $m \geq N$ に対し x から y への α -chain $\{x_0, \dots, x_m\} \subset Y$ が存在する $\Leftrightarrow Y$ は chain mixing

2). $F \subset X$ が chain transitive とする。 F が fixed point を持てば F は chain mixing.

3). $f|_Y$ が topologically mixing ならば Y は chain mixing

Th. 16 X が connected で chain transitive のとき X は chain mixing.

Proof. $\alpha > 0, x \in X$ を固定する。 $M(x) = \{m \in \mathbb{N} \mid x \text{ から } x \text{ への } \alpha\text{-chain で長さが } m+1 \text{ のものが存在する}\}$ とおく。 $m, m' \in M(x)$ のとき $m+m' \in M(x)$ である。よって M の元の G.C.M. を m_0 とすると、 $N \in \mathbb{N}$ があって任意の $m \geq N$ に対して $m_0 m \in M(x)$ となる。

$m_0 = 1$ を示せばよい。 $y, z \in X$ に対し $y \sim_{m_0} z$ とは $m, m' \in \mathbb{N}$ があって、 y から z への長さ $m_0 m + 1$ の α -chain 及び z から y への長さ $m' m_0 + 1$ の α -chain があることとする。 $\sim_{m_0}$ が X 上の

equivalence relation であることが分る。proposition 6 と同様

にして $\sim_{m_0}$ による各 equivalence class が open であることが分る。

よって、equivalence class は 1 つ、よって $x \sim_{m_0} f(x)$ これが $m_0=1$ が分る。 $\square$

Th. 17. f が P. O. T. P. を持つ homeo. とする。 $\varepsilon > 0, \alpha > 0$ を任意の

α -p.o. が ε -trace されるように固定する。 $\{p_1, \dots, p_m\} \subset X$ が

$d(p_k, p_l) > 2\varepsilon$ ($k \neq l$) を満たすとする。 $m \in \mathbb{N}$ を固定する。 p_k から

p_l への長さ $m+1$ の α -chain があるとき、 $A_{kl} = 1$ とおき、それ

以外するとき $A_{kl} = 0$ とおく、 ($1 \leq k, l \leq m$)。このとき closed set

$Y \subset X$ 、及び continuous surjection $\pi: Y \rightarrow \Sigma_A$ があって $f^m(Y) = Y$

であり $\sigma_A \circ \pi = \pi \circ f^m|_Y$ となる。ここで (Σ_A, σ_A) は transition

matrix A を持つ subshift of finite type。

Proof. $P = \{p_1, \dots, p_m\}$ とおく $a \in \mathbb{N}$ に対し、

$$\Sigma_A^a = \{(x_{-a}, \dots, x_a) \in P^{2a+1}; x_i = p_k, x_{i+1} = p_l \text{ なら } A_{kl} = 1\}$$

とおく。 $x \in \Sigma_A^a$ に対し $P(x) = \bigcap_{i=-a}^a f^{-im}(B_\varepsilon(x_i))$ とおく、このとき、

$P(x) \neq \emptyset$ 。また $d(p_k, p_l) > 2\varepsilon$ ($k \neq l$) より $x, x' \in \Sigma_A^a, x \neq x'$ なら

$P(x) \cap P(x') = \emptyset$ 。 $Y_a = \bigcup_{x \in \Sigma_A^a} P(x)$ とおき $Y = \bigcap_{a=1}^\infty Y_a$ とおく。

Y は closed であり $f^m(Y) = Y$ 。 $\Sigma_A = \{(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in P^{\mathbb{Z}}; x_i = p_k, x_{i+1} = p_l$

なら $A_{kl} = 1, \forall i \in \mathbb{Z}\}$ とおく。 $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \Sigma_A$ に対し $\sigma_A((x_i)_{i \in \mathbb{Z}}) =$

$(x_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$ により $\sigma_A: \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$ が定義される。 $x \in \Sigma_A$ に対し

$P(x) = \bigcap_{i=-\infty}^\infty f^{-im}(B_\varepsilon(x_i))$ ($x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$) とおく。このとき

$x, x' \in \Sigma_A^a$ について $x \neq x'$ ならば $P(x) \cap P(x') = \emptyset$ であるから、 $Y = \bigcup_{x \in \Sigma_A} P(x)$ が成立する。異なった $x, x' \in \Sigma_A$ に対し $P(x) \cap P(x') = \emptyset$ であるから、 $\pi: Y \rightarrow \Sigma_A$ を $\pi(P(x)) = \{x\}$ ($x \in \Sigma_A$) で定義することからできる。 π が continuous であることを示せばよい。 $\beta = \min_{k \neq l} d(p_k, p_l) - 2\varepsilon > 0$ とおく。 $a \in \mathbb{N}$ を任意にとったとき、 $\delta > 0$ が存在し、 $d(y, y') < \delta$ ($y, y' \in Y$) ならば $\pi(y) = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, $\pi(y') = (x'_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ と書いたとき、 $x_i = x'_i$ ($\forall i$ s.t. $|i| \leq a$) であることを示せばよい。

そこで $\delta > 0$ を $d(y, y') < \delta$ ならば $d(f^{jm}(y), f^{jm}(y')) < \beta$ ($|j| \leq a$) となるようにとる。今 j ($|j| \leq a$) があって $x_j \neq x'_j$ とする。このとき、 $2\varepsilon + \beta \leq d(x_j, x'_j) \leq d(x_j, f^{jm}(y)) + d(f^{jm}(y), f^{jm}(y')) + d(f^{jm}(y'), x'_j) < \varepsilon + \beta + \varepsilon = 2\varepsilon + \beta$ 、となり矛盾が生じる。

よって π は continuous。 □

Cor. 18. f が P.O.T.P. を持つ homeo. で chain mixing chain

component F があって $\#F > 1$ とすると $h(f) > 0$ 。

Proof. $\{p_1, p_2\} \subset F$ を $p_1 \neq p_2$ となるようにとる。 $\varepsilon = d(p_1, p_2)/3 > 0$ とおく。 $\alpha > 0$ を任意の α -P.O. が ε -trace されるようにとる。 $f|_F$ が chain mixing であるから $m > 0$ があって各 $i, j = 1, 2$ について p_i から p_j への長さ $m+1$ の α -chain がある。よって $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とすると、theorem 17 から closed set $Y \subset X$ と continuous surjection $\pi: Y \rightarrow \Sigma_A$ があって $f^m(Y) = Y$, $\sigma_A \circ \pi = \pi \circ f^m|_Y$ となる。

よって、 $h(f) = \frac{1}{m} h(f^m) \geq h(f^m|_Y) \geq \frac{1}{m} h(\sigma_A) = \frac{1}{m} \log 2 > 0$ 。 □

Cor. 19. f が P.O.T.P. を持つ homeo. で点 $P, q \in X$ ($P \neq q$) があつて $f(P) = P$, $P \sim q$ とする。このとき $h(f) > 0$ 。

Proof. P を含む chain component は P が fixed point だから chain mixing でありまた q を含む。よつて corollary 18 より $h(f) > 0$ 。□

Th. 20. f が P.O.T.P. を持つ homeo. で $h(f) = 0$ とする。このとき各 $m \in \mathbb{N}$ に対して $\text{Fix}(f^m) = \{x \in X \mid f^m(x) = x\}$ は totally disconnected。

Proof. $m \in \mathbb{N}$ を固定する。 $\text{Fix}(f^m)$ の connected component K が一点でないとする。 $R(f^m|_K) = K$ で K は connected だから proposition 6 より K は chain transitive. よつて theorem 16 より K は chain mixing よつて f^m にかんする chain component E で K を含むものは chain mixing で $\#E > 0$ 。 f^m は P.O.T.P. を持つから corollary 18 より $h(f^m) > 0$ 。よつて $h(f) > 0$ で矛盾が生じる。よつて K は一点から成る。□

Th. 21. X が connected で f は homeo. とする。 f の periodic point の集合が X で dense であり、 $\#X > 1$ であれば $h(f) > 0$ 。

Proof. $\text{Per}(f)$ を f の periodic point の集合とすると、 $X = \overline{\text{Per}(f)}$ となる。 $R(f) \supset \text{Per}(f)$ だから、 $X = R(f)$ 。よつて proposition 6 より X は chain transitive. よつて theorem 16 より f は chain mixing. $\#X > 0$ だから corollary 18 より $h(f) > 0$ 。□

(X, f) を homeo. とする。 closed set $K \subset X$ が $f(K) = K$ を満た

すとする。 K を一点に同一視して得られる空間を X/K とし、
 $\pi: X \rightarrow X/K$ を *natural projection* とする。 X/K 上の metric d_K
 を $x, y \in X$ に対して $d_K(\pi(x), \pi(y)) = \min \{d(x, y), d(x, K) + d(y, K)\}$
 で定めることができる。 $f_K: X/K \rightarrow X/K$ を $f_K \circ \pi = \pi \circ f$ と
 なるように定める。 このとき f_K は homeo. となる。

Th. 22. closed set $K \subset X$ が chain mixing とするとき、 f が
 P.O.T.P. を持つば、 f_K も P.O.T.P. を持つ。

まず次の lemma を示す。

Lemma 23. f が chain mixing とする。 $\alpha > 0$ に対して $N \in \mathbb{N}$ があ
 って任意の $p, q \in X$ 及び $m \geq N$ に対し p から q への長さ $m+1$ の
 α -chain がある。

Proof. $(p, q) \in X \times X$ を任意に固定する。 $N(p, q) \in \mathbb{N}$ があ
 って任意の $m \geq N(p, q)$ に対し、 p から q への $\alpha/2$ -chain
 $\{x_0, \dots, x_m\}$ がある。 $0 < \delta < \frac{\alpha}{2}$ を $d(x, y) < \delta$ なら $d(f(x), f(y)) < \alpha/2$ と
 なるようにとる。 $U_\delta(p) = \{x \mid d(p, x) < \delta\}$ とおくと、 $(p', q') \in$
 $U_\delta(p) \times U_\delta(q)$ に対し、 $\{p', x_1, \dots, x_{m-1}, q'\}$ は α -chain である。
 $(p_1, q_1), \dots, (p_m, q_m) \in X \times X$ があって $X \times X = \bigcup_{i=1}^m U_\delta(p_i) \times U_\delta(q_i)$ と
 なる。 $N = \max_{i=1, \dots, m} N(p_i, q_i)$ とおくと、これは条件を満たす。 $\square$

Th. 22. の proof. $\varepsilon > 0$ を任意に固定する。 $0 < \delta \leq \varepsilon$ を f によ
 る任意の α -p.o. が ε -trace されるようにとる。 Lemma 23 より、
 $n \in \mathbb{N}$ があって任意の $x, y \in K$ と $m \geq n$ に対して x から y への

$\delta/2$ -chain $\{x_0, \dots, x_m\} \subset K$ がある。 $0 < \alpha < \delta/2$ を $d(x, K) < \alpha$ なる $x_0 = x$ なる任意の α -p.o. $\{x_0, \dots, x_m\}$ に対し $d(x_i, K) < \delta/2$ ($0 \leq i \leq m$) が成り立つようにとる。 $\{x'_0, \dots, x'_l\} \subset X/K$ を f_K による α -p.o. とするとき、これがある $\pi(x)$ ($x \in X$) により 2δ -trace されることを示す。点列 $\{x_0, \dots, x_l\} \subset X$ を $\pi(x_i) = x'_i$ となるようにとる。 $d(x_i, K) < \alpha$ のとき $x_i, \dots, x_{i+m-1}$ を記号 $*$ で置きかえて列 $\{\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_l\}$ を作る。もし $\tilde{x}_{i-1} \neq *, \tilde{x}_{i+l} \neq *, \tilde{x}_{i+j} = *$ $0 \leq j < l$ なる $l \geq m$ とする。 $\tilde{x}_{i+l} = x_{i+l}$ で $d(x_{i+l}, K) < \delta/2$ となることに注意する。このとき

$$d(f(x_{i-1}), K) < \begin{cases} \alpha & \text{if } d(x_i, f(x_{i-1})) \geq d(x_i, K) + d(f(x_{i-1}), K) \\ & \text{--- (i)} \\ 2\alpha & \text{if } d(x_i, f(x_{i-1})) < d(x_i, K) + d(f(x_{i-1}), K) \\ & \text{--- (ii)} \end{cases}$$

となることを示す。(i) のとき、 $d_K(\pi(x_i), \pi(f(x_{i-1}))) = d(x_i, K) + d(f(x_{i-1}), K)$ 。よって $d(f(x_{i-1}), K) \leq d_K(\pi(x_i), \pi(f(x_{i-1}))) = d_K(x'_i, f_K(x'_{i-1})) < \alpha$ 。(ii) のとき $d_K(\pi(x_i), \pi(f(x_{i-1}))) = d(x_i, f(x_{i-1}))$ 。よって

$$\begin{aligned} d(f(x_{i-1}), K) &\leq d(f(x_{i-1}), x_i) + d(x_i, K) \\ &= d_K(\pi(x_i), \pi(f(x_{i-1}))) + d(x_i, K) \\ &= d_K(x'_i, f_K(x'_{i-1})) + d(x_i, K) < \alpha + \alpha = 2\alpha. \end{aligned}$$

よって $d(f(x_{i-1}), p) < 2\alpha$ なる $p \in K$ が存在する。また $d(x_{i+l}, K) < \delta/2$ なる $d(x_{i+l}, q) < \delta/2$ なる $q \in K$ がある。 p から q への $\frac{\delta}{2}$ -p.o. $\{y_i, \dots, y_{i+l}\}$ を固定する。 $\tilde{x}_j, i \leq j < i+l$ を y_j で置きか

える。このとき、 $d(f(\tilde{x}_{i-1}), y_i) = d(f(x_{i-1}), p) < 2\alpha < \delta$ 。また

$$\begin{aligned} d(f(y_{i+k-1}), \tilde{x}_{i+k}) &\leq d(f(y_{i+k-1}), y_{i+k}) + d(y_{i+k}, \tilde{x}_{i+k}) \\ &< \frac{\delta}{2} + d(q, x_{i+k}) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta. \end{aligned}$$

上のような全ての i について上の操作をしてできる列を、

$\{\bar{x}_a, \dots, \bar{x}_b\}$ とかくと、これは f による δ -p.o. になる。これを ε -trace する点を x とする。

$\pi(\bar{x}_j) = x'_j$ とする。このとき $\bar{x}_j \in K$ であり、 $j = i+a$ ($0 \leq i \leq b-a$) とすると、

$$\begin{aligned} d_K(f_K^i(\pi(x)), x'_{i+a}) &\leq d_K(f_K^i(\pi(x)), \pi(\bar{x}_{i+a})) \\ &\quad + d_K(\pi(\bar{x}_{i+a}), x'_{i+a}) \\ &\leq d(f^i(x), \bar{x}_{i+a}) + d(K, x_j) \\ &\leq \varepsilon + \frac{\delta}{2} < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

$\pi(\bar{x}_j) = x'_j$ とする。このとき $j = i+a$ とすると、

$$d_K(f_K^i(\pi(x)), x'_{i+a}) \leq d(f^i(x), \bar{x}_{i+a}) \leq \varepsilon.$$

よって $\{x'_a, \dots, x'_b\}$ は $\pi(x)$ に 2ε -trace される。 $\square$

Cor. 24. M is compact Riemannian manifold, $g: M \rightarrow M$ is Axiom A diffeo. とする g が P.O.T.P. を持つとは g は no-cycle property を持つ。

Proof. $m \geq 1$ があって g^m の basic sets $X_1, \dots, X_m$ は top. mixing になる。 g^m が no-cycle property を持つことを示せばよい。各 X_i を一点 x_i に同一視して得られる空間を X とし、

$f: X \rightarrow X$ を g^n から誘導される homeo. とする。 f は P.O.T.P. を持つ。

各 x_i について $W^s(x_i) = \{y \in X; f^m(y) \rightarrow x_i \text{ as } m \rightarrow +\infty\}$

$W^u(x_i) = \{y \in X; f^{-m}(y) \rightarrow x_i \text{ as } m \rightarrow +\infty\}$

とおくと、 g^n が cycle を持つば、 $x_{i_0}, \dots, x_{i_m} = x_{i_0}$ があり、

$\exists q_j \in W^u(x_{i_j}) \cap W^s(x_{i_{j+1}})$ も $\neq \emptyset$ となる。 $q_j \neq x_{i_1}, \dots, x_{i_m}$ とする

ことが出来る。 $q_0 \sim x_0$ で $f(x_0) = x_0$ だから、 corollary 19 より

$h(f) > 0$ 。一方 $\Omega(f) = \{x_0, \dots, x_m\}$ だから $h(f) = h(f|_{\Omega(f)}) = 0$ 。

これは矛盾。 $\therefore g^n$ は cycle を持たない。 □

REFERENCE

[1] L. Block and J.E. Franke, The chain recurrent sets, attractors, and explosions, Ergod. Th. & Dynam. Sys. Vol. 5, (1985), 321-327.

[2] M. Hurley, Consequence of topological stability, J. Differentiable Equations Vol. 54, (1984), 60-72.

[3] C. Robinson, Stability theorems and hyperbolicity in dynamical systems, Rocky Mountain J. Math. Vol. 7, (1977), 425-437.