

Non congruence subgroup の Hecke 作用素

東大理 寺松 友秀.
(Tomohide Terasama)

§1 Reimann 面の分岐の様子.

$$E: y^2 = x(x-1)(x-p) \quad (p \text{ は odd, } \in \mathbb{N}, p \geq 5)$$

で定義した E は elliptic curve とする。

Lemma 1 E は $\mathbb{P}^1$ 上の $\{0, 1, \infty\}$ 以外で不分岐な covering と
して表わされる。

Proof これは Belyi による、これを一般化した形を知りたい
が、ここではその具体的な形のみを述べよう。 $E \rightarrow \mathbb{P}^1$ は
 $(x, y) \in E$ 上の x を $\mathbb{P}^1$ 上の morphism と考えよう。これは、 $X = \{0, 1, \infty, p\}$
以外で不分岐な covering であるから、 $f: X = \mathbb{P}^1 \rightarrow Y = \mathbb{P}^1$ なる
map で、 $f^{-1}(\{0, 1, \infty\}) = \{0, 1, \infty, p\}$ であり、 f は $\{0, 1, \infty\} \subset Y$
以外で不分岐な covering である。よって、 f は

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}, \quad f(x) = \frac{1}{p} (x-1)^{-1} (x-p)^p$$

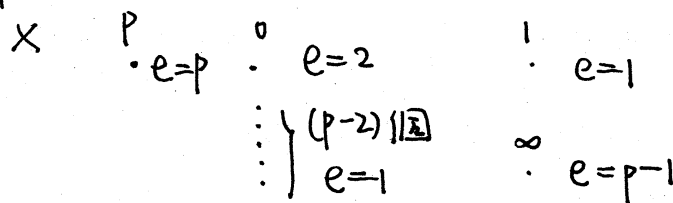
と表わすことができる。よって、 $E \rightarrow X \rightarrow Y$ により
求める covering が得られる。 Q.E.D.

±2 次に E/Y の Galois closure を与える。 $l \in Y^0 = Y - \{0, 1, \infty\}$ の点と
 する。 $E_l := l$ にあたる E の fiber には $\pi_1(Y^0, l)$ が作用する。

よって $\pi_1(Y^0, l) \rightarrow \text{Aut}(E_l)$ とし $\mathbb{Z}$ の kernel に対応する
 Y の covering を与える Galois closure とする。 $X_l := l$ にあ
 たる X の fiber とする。 この時 $\pi X_l = p$ である。

Lemma 2 $\pi_1(Y^0, l) \rightarrow \text{Aut}(X_l)$ は全射である。 すなわち
 X/Y の Galois closure の Y 上の Galois 群は p 次対称群 S_p
 である。

Proof 分岐点の様子はお下の図のようになる。



これは $e \mid p$ 。 $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ の分岐指数を表現する。 したがって上の map の像
 は $\mathbb{Z}/p$, $\mathbb{Z}/2$, $\mathbb{Z}/(p-1)$ を含む。 対称群の性質より、これは必
 ず S_p を生成する。 Q.E.D.

±2 次にいたる群を定義する。

$$H_2 = \{f \in \text{Aut}(\{-p, \dots, -1, 1, \dots, p\}) \mid f(-x) = -f(x) (\forall x \in \{p, \dots, p\})\}$$

$$H_1 = \{f \in H_2 \mid f(1) = 1\}$$

$$\exists f \in H_2 \xrightarrow{p} \sigma_p = \text{Aut}(\{1, \dots, p\}) \text{ へ } f \mapsto f \text{ (modulo sign)}$$

で定義し、その kernel を V とおく。この時

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow H_2 \xrightarrow{p} \sigma_p \longrightarrow 0 \text{ (exact)}$$

となる。±2E の Y 上の Galois closure を M , X の Y 上の Galois closure を L と書く。この時 Riemann の covering の関係は、図の様になる。

$$\begin{array}{ccc} L & \leftarrow & L \cdot E \leftarrow M \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \leftarrow & E \\ \downarrow & & \\ Y & & \end{array}$$

Theorem 3 上の図に対して、群の包含関係は下の図の様になる。

$$\begin{array}{ccc} V & \leftarrow & H_1 \wedge V \leftarrow 1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ P^*(\sigma_{p-1}) & \leftarrow & H_1 \\ \downarrow & & \\ H_2 & & \end{array}$$

Proof 証明は難しくないので、省略する。

§2 群論的解決.

$Y - \{0, 1, \infty\} \cong \mathbb{H}_g / \Gamma(2)$ である。ここで、上半空間 $\mathbb{H}_g = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im} z > 0\}$ に $\Gamma(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{Z}) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{2} \right\}$ は、1次分数変換に作用するものとする。 $\Gamma(2)/\pm 1$ は、 $\mathbb{H}_g$ に fixed-point free に作用するので、 $\pi_1(Y - \{0, 1, \infty\}, z) \cong \Gamma(2)/\pm 1$ である。 $Y \cong \mathbb{H}_g / \Gamma(2)$ 上、 $Y \ni 0$ と 0 -cusp, $Y \ni \infty$ と $i\infty$ cusp, に対応する様にしよ。 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は $\text{Aut}(X_{2,2})$ における image が、 $(2, \dots, p)$ と conjugate, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ は image が $(1, \dots, p)$ と conjugate とする。他方、 $AB^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \in \{1\text{-cusp stabilizer}\}$ となるので AB^{-1} は $(1, 2)$ と conjugate であるとしてよい。以上の事から適当な番号のつけかえ $(X_{2,2})$ により、

$$\pi_1(Y - \{0, 1, \infty\}) \longrightarrow \text{Aut}(X_{2,2})$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \Gamma(2)/\pm 1 & \xrightarrow{\varphi} & \Sigma_p \end{array}$$

$$\alpha = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto (2, \dots, p)^{-1}$$

$$\beta = AB^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto (1, 2)$$

$$\gamma = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto (1, \dots, p)$$

なる様に対応してよいとしてよい。

する。 $(2, \dots, p)^{\sim}$ は X_2 で見ると、 $(2, \dots, p)$ で、 $\{\pm 2, \dots, \pm p\}$ に transitive に作用する。 $(1, \dots, p)^{\sim} (2, \dots, p)^{\sim^{-1}}$ は、 $\{\pm 1, \pm 2\}$ に transitive に作用し、 $\{\pm 3, \dots, \pm p\}$ に trivial に作用するので、 二つの事を考え合わせ、 図の様な置換をひきおこして得る。
 Q.E.D.

±2. 前§の記号での $\pi_1(Y - \{0, 1, \infty\}) \cong \Gamma(2)/\pm 1 \twoheadrightarrow H_2$ なる map 及び l を奇素数とした時の自然な map $\Gamma(2)/\pm 1 \twoheadrightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{F}_l)$ を合わせ、 $f: \pi_1(Y - \{0, 1, \infty\}) \rightarrow H_2 \times \text{PSL}(2, \mathbb{F}_l)$ なる map を得る。 以後 p は 5 以上の自然数とする。

Proposition 2 $l > p, (l, p-1) = 1$ のもとで、 f は全射である。

Proof $\pi_1(Y - \{0, 1, \infty\})$ は surjective を行くと、 $\text{Im } f \cap H_2 \times \{e\} = H_2 \times \{e\}$ を言えば十分である。 まず $\text{Im } f \cap H_2 \times \{e\} \xrightarrow{\pi} \sigma_n$ が全射であることを言う。 今、 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は π に σ, τ 、 $(2, \dots, p)$ を行くと、 $A^l = \begin{pmatrix} 1 & 2^l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は、 $(2, \dots, p)^l$ を行くと A は、 $\text{order}(p-1)$ の元である。 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は π に σ, τ 、 $(1, \dots, p)$ を行くと、 B^l の π に σ による image の order は、 p である。 又、 $(AB^{-1})^l \equiv 1 \pmod{l}$ であり、 π に σ による image は、 $\text{order } 2$

である。 $\text{Im} f \cap H_2 \times \{e\} \rightarrow G_p$ の image は、order $p, p-1, 2$ の元を含み全射となる。また、 $A^{(p-1)l}, B^{p^l}$ の image は、 ± 1 のみと交換し、他は fix する。 $\text{Im} f \cap H_2 \times \{e\} = H_2 \times \{e\}$ となる。

Q.E.D.

ここで以下 $\Gamma(2)/\pm 1$ を略して $\tilde{\Gamma}(2)$ と書く。今 $\tilde{\Gamma}(2) \xrightarrow{\varphi} H_2$ とおく。
 $\varphi^*(H_1) = G$ とおく。 Main Theorem は次の Theorem である。

Theorem 3 l は奇素数で $l > p$, $l \equiv 1 (p)$, $l \not\equiv 1 (p-1)$,
 $(l, p-1) = 1$ とする。この時、

$$\# \left(G / \begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} l^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cap G \right) = 2p(l+1)$$

である。

Remark G が Γ の congruence subgroup なら、ほとんどすべての l について $\# \left(G / \begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} l^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cap G \right) = l+1$ となる。 G は、congruence subgroup でない事がわかる。

Proof $\# \left(G / \begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{\Gamma}(2) \begin{pmatrix} l^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cap G \right) = l+1$ と。

$$\# \left(\left(\begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{\Gamma}(2) \begin{pmatrix} l^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cap G \right) / \begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} l^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cap G \right) = 2p$$

を示せばよい。自然な map

$G / \begin{pmatrix} \ell & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \widetilde{\Gamma}(2) \begin{pmatrix} \ell^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \wedge G \hookrightarrow \widetilde{\Gamma}(2) / \begin{pmatrix} \ell & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \widetilde{\Gamma}(2) \begin{pmatrix} \ell^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \wedge \widetilde{\Gamma}(2)$
 が全射となる事は. Proposition の全射性の結論である。ゆえにあと
 は. 次の Proposition を示す事に帰着される。

Proposition 4 記号. 仮定は定理のものとする。自然な map

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} \ell & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \widetilde{\Gamma}(2) \begin{pmatrix} \ell^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \wedge G / \begin{pmatrix} \ell & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} \ell^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \wedge G \\
 & \longrightarrow \begin{pmatrix} \ell & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \widetilde{\Gamma}(2) \begin{pmatrix} \ell^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} \ell & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} \ell^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cong H_2 / H_1
 \end{aligned}$$

は全射である。

Proof の概略. $\forall \varepsilon. \forall (A^\ell) = A, \forall (B) = B^\ell (= \tau).$
 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ として定義する. $\widetilde{\Gamma}(2) \xrightarrow{\varphi} H_2 / H_1 \cong$
 $\{ \pm 1, \dots, \pm p \}$ とした時. 任意の $j \in \{ \pm 1, \dots, \pm p \}$ に対して次の様な性質を満たす
 word $F(A, B)$ が存在すればよい。

$$\begin{cases} \varphi(F(A^\ell, B)) = H \\ \varphi(\psi(F(A, B^\ell))) = j \end{cases}$$

この様な F を実際に構成する事に依り. この proof を得る。この
 部分について。組み合わせ論的な考察を必要とし. 一連の結果の
 本質的な部分であるが. かなり長い考察を必要とするので. 証明を
 省く。しかしこれは. あとに出る論文を見て下さい。 Q.E.D.

§3 Correspondence に関する結果.

== Γ の correspondence を考える。(l は素数とする)

$$\begin{array}{ccc} \text{hy} / \begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} l^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \wedge G & & \\ \swarrow p & & \searrow q \\ \text{hy} / G & & \text{hy} / G. \end{array}$$

§2 の main theorem 参照. $l > p$, $l \equiv 1 (p)$, $l \not\equiv 1 (p-1)$, $(l, p-1) = 1$

の時 $\deg p = \deg q = 2p(l+1)$ であることがわかる. Γ について. 今

hy / G の compactification $(\text{hy} / G)^*$ は $E: y^2 = x(x-1)(x-p)$ と同型であるから. この correspondence $q^* p^*$ は $H^1(E, \mathbb{Q})$ の自己準同型型をひきおこす. Γ は $T(l)$ と書く. 今. 自然な map $\text{hy} / G \rightarrow \text{hy} / \Gamma(2)$ から induce される map を τ . とする. $\text{hy} / \Gamma(2)$ 上には $\Gamma(2)$ と同様の

$$\begin{array}{ccc} \text{hy} / \begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma(2) \begin{pmatrix} l^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \wedge \Gamma(2) & & \\ \swarrow p & & \searrow \bar{q} \\ \text{hy} / \Gamma(2) & & \text{hy} / \Gamma(2) \end{array}$$

なる map を得るが. このグラフを考える.

$$T_{\bar{p}, \bar{q}} = \text{hy} / \begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma(2) \begin{pmatrix} l^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \wedge \Gamma(2) \xrightarrow{(\bar{p}, \bar{q})} \text{hy} / \Gamma(2) \times \text{hy} / \Gamma(2)$$

さらに (p, q) のグラフを $T_{p, q}$ とする.

$$T_{p, q} = \text{hy} / \begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} l^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \wedge G \xrightarrow{(p, q)} \text{hy} / G \times \text{hy} / G.$$

Proposition 1. F a commutative diagram $\bar{\sigma}$. fiber product τ exists.

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_{P, \bar{g}}^* & \longrightarrow & (h_y/G)^* \times (h_y/G)^* \cong E \times E \\ \downarrow & & \downarrow \tau \times \tau \\ \Gamma_{\bar{P}, \bar{g}}^* & \longrightarrow & (h_y/\Gamma(2))^* \times (h_y/\Gamma(2))^* \end{array}$$

Proof $\bar{\sigma}$ is commutative $\bar{\sigma}$ a τ . F a commutative diagram can be obtained.

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma_{P, \bar{g}}^* & \xrightarrow{\quad P \quad} & E & & \\ \downarrow \alpha & \searrow & \downarrow \tau \times \tau & \searrow \beta_1 & \\ \Gamma_{\bar{P}, \bar{g}}^* & \xrightarrow{\quad \bar{P} \quad} & (h_y/\Gamma(2))^* \times (h_y/\Gamma(2))^* & \xrightarrow{\quad \tau \quad} & (h_y/\Gamma(2))^* \\ & & \downarrow \alpha & & \\ & & \Gamma_{\bar{P}, \bar{g}} & & \end{array}$$

Diagram description: A commutative diagram with nodes $\Gamma_{P, \bar{g}}^*$, $\Gamma_{\bar{P}, \bar{g}}^*$, $E \times E$, E , $(h_y/\Gamma(2))^* \times (h_y/\Gamma(2))^*$, and $(h_y/\Gamma(2))^*$. Arrows include $P: \Gamma_{P, \bar{g}}^* \rightarrow E$, $\alpha: \Gamma_{P, \bar{g}}^* \rightarrow \Gamma_{\bar{P}, \bar{g}}^*$, $\beta_1: E \times E \rightarrow E$, $\tau \times \tau: E \times E \rightarrow (h_y/\Gamma(2))^* \times (h_y/\Gamma(2))^*$, $\tau: (h_y/\Gamma(2))^* \times (h_y/\Gamma(2))^* \rightarrow (h_y/\Gamma(2))^*$, and $\bar{P}: \Gamma_{\bar{P}, \bar{g}}^* \rightarrow (h_y/\Gamma(2))^* \times (h_y/\Gamma(2))^*$. There is also an arrow $\alpha: \Gamma_{\bar{P}, \bar{g}}^* \rightarrow \Gamma_{\bar{P}, \bar{g}}$ and an arrow from $\Gamma_{\bar{P}, \bar{g}}$ to $(h_y/\Gamma(2))^* \times (h_y/\Gamma(2))^*$.

$\exists \bar{\sigma}$ $\deg \tau = 2p$ $\bar{\sigma}$ a τ . $\deg \alpha = \deg(\tau \times \tau) = (2p)^2$.

$\Gamma_{P, \bar{g}}^* \rightarrow E \times E$ is injective $\bar{\sigma}$ a τ β is injective. $\exists \tau =$

$\Gamma_{P, \bar{g}}^*, \Gamma_{\bar{P}, \bar{g}}^*$ are irreducible. $\tau \circ P$ is finite $\bar{\sigma}$ a τ $\alpha \circ \beta$ is finite.

It is the commutative diagram from above. $\deg(\beta \circ \alpha) \cdot \deg \bar{P} = \deg P \cdot \deg \tau$.

$\therefore \deg \bar{P} = l+1$ is known. $\deg P = 2p(l+1)$, $\deg \tau$

$= 2p$ $\exists l \in \mathbb{Z}$. $\deg(\beta \circ \alpha) = (2p)^2 = \deg \alpha$. $\forall \bar{\sigma}$ is surjective.

Corollary 2 ℓ . $p \in \mathcal{A}$ かつ τ の通りに ℓ がある。 $\Rightarrow \mathcal{A} \neq \emptyset$.

$$T(\ell) | H^1(E, \mathbb{Q}) = 0 \text{ である。}$$

Proof 前より τ は $E \rightarrow E/\pm 1 \cong \mathbb{P}^1$

$$\tau \downarrow \cong \mathbb{P}^1 / \Gamma(2)$$

と factor できる。 $\Gamma_{p,q}^* \cong \Gamma_{p,-p}^*$ である。 $\Rightarrow \tau - q = (-1) \left(\frac{1}{2} \text{ map} \right) \circ q$

である。 $\exists \Gamma$ correspondence として $H^1 \cong (-1) \left(\frac{1}{2} \text{ map} \right) \circ \tau$ と

作用する。 $q \circ p^* = -((1-q) \circ p^*)$ 。 $\Rightarrow$ したがって、上の等式を

得る。

Q.E.D.

Corollary 3. $\Gamma_{p,q}^*(\text{mod } \ell)$ は次の様に定まる。

$$\Gamma_{p,q}^*(\text{mod } \ell) = H + \tau H$$

$$H = F + (-F) + C.$$

$\Rightarrow \tau F$ は $E(\text{mod } \ell)$ の Frobenius の graph。 C は τ と ℓ と

が τ の ℓ について除数 $\tau(-1) \left(\frac{1}{2} \right)$ stable。

Proof $\Gamma_{p,q}^*(\text{mod } \ell) = (T \times T(\text{mod } \ell))^{-1}(F) + (T \times T(\text{mod } \ell))^{-1}(F)$

で、 $(T \times T(\text{mod } \ell))^{-1}(F) = H$ である。

$$H = \{(x, y) \in (E \times E)(\text{mod } \ell) \mid T(x)^\ell = T(y)\}$$

$$= \{(x, y) \mid T(x^\ell) = T(y)\}$$

$$\mathbb{I} \zeta \mathbb{I} = H' = \{(x, u) \in (E \times E)(\text{mod}) \mid \tau(x) = \tau(u)\}$$

Ex: 17/8. $H'(x, u) \mapsto (x, u^2) \in H$ define $\mathcal{H}$.

$$\begin{array}{ccc} H' & \longrightarrow & H \\ & \searrow & \downarrow \end{array} \quad \deg \text{pr}_1|_H = (\deg \text{pr}_1|_F) \times (2p)^2 = (2p)^2$$

$$(h_{\mathcal{Y}}/T(z)^*)^{(\text{mod})} \deg p_{\mathcal{Y}}|_H = \ell(2p)^2$$

$$\deg p_{r_1}|_{H'} = (2p)^2, \deg p_{r_2}|_{H'} = l(2p)^2. \text{ Then } H' \subset H$$

$$\begin{array}{ccc} H' & \xrightarrow{\beta} & H \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \\ E & \xleftarrow{\text{pr}_1} & E \times E \end{array}$$

β は separable, β は purely inseparable である。 β は injective である。

他方. $H' = (\text{Iy}/G)^* \times_{\text{Iy}/\Pi^*} (\text{Iy}/G)^* \text{ mod } 2$ であり。一般に次の

Lemma 11.4.2 がある。

Lemma 4 $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \Gamma \in SL(2, \mathbb{Z})$ a finite index of subgroup $\in \mathcal{F} \ni \epsilon$. $(h_{\mathbb{H}}/\Gamma_1)^* \times (h_{\mathbb{H}}/\Gamma)^* (h_{\mathbb{H}}/\Gamma_2)^*$ a normalization $\cong \coprod_{\Gamma_1 \backslash \Gamma/\Gamma_2 \ni \bar{g}} (h_{\mathbb{H}}/\Gamma_1 \cap g\Gamma_2 g^{-1})^* \in \mathcal{F} \ni \epsilon$

proof 略.

今この Lemma を使おうと

$$\begin{aligned}
 & (\chi_y / G)^* \times (\chi_y \pi_{(2)})^* (\chi_y / G)^* \text{ の normalization} \\
 & \cong \coprod_{G \backslash T(2) / G} (\chi_y / G \cap g G g^{-1})^* \\
 & \cong \coprod_{H_1 \backslash H_2 / H_1} (\chi_y / G \cap g G g^{-1})^*
 \end{aligned}$$

で. $H_1 \backslash \{\pm i \mid i=1, \dots, p\} = \{+1\} \cup \{-1\} \cup \{\pm 2, \dots, \pm p\}$
 となり. 2415. ℓ に independent であるから. ほとんどすべての
 ℓ について既約成分は 3 つである. F と $-F$ は明らかにこの異なる
 成分であるから. 残りの 1 つは. ほとんどすべての ℓ について既約
 である. Q.E.D.