

同値律をみたす述語による
関係データモデル従属性の一般化について

富士通・国際情報社会科学研究所 竹島 卓

1. まえがき

関係データモデル (Codd [1]) の提案以来、いわゆる従属性の問題が種々の意図をもって研究されている。それらは、(1) data anomaly の回避ないしは正規化 (2) 関係の情報無損失分解 (3) 検索 (問合せ) に対するアクセスパスの決定 (4) 簡易な統合制約 (5) 数学的興味 などに代表されよう。

そこにおける課題としては、(1) 情報無損失分解の必要十分条件 (2) 適切な正規形の設定 (3) 従属性についての適切な推論体系 などがあげられる。(1) に対しては結合従属 (JD), (2) に対しては射影結合正規形 (PJNF) によって一応の結着がつけられている。(3) については潜在形の従属性 (embedded dependency) には有限の公理系が存在しないという研究結果があり、適切な推論体系が望まれている。そこで本稿では課題(3)に対するひとつの解答を与える。

従属性を一階述語論理によ、て形式化しようという研究は
 己に Nicolas [2] や Fagin [3] らによ、て試みられている。
 彼等のアプローチでは、(i) 関係にひとつの述語を対応させる。
 (ii) タップルの成分を走る成分変数を用いる。(iii) 成分値に対
 する等号(=)の述語を用いる。という特徴をもっている。
 彼等の形式化はかなりうまくいっているが、それは少し乱暴
 な形式化によ、て(i)の方法を採用しているために、実は一階
 述語論理の意味論そのものが展開されているからに他ならな
 い。しかしながら次の2点は問題がある。(a) 関係モデル
 は本来 *many sorted* なものである。(b) 上記性質を無視した
 ためドメイン関数の選択によらない不変な構造(同値関係と
 からみ合い構造[4]など)が表現できない。

これに対し、本稿で述べる形式化は、(i') 各属性にひとつの
 2項述語を割当てる。(ii') タップルの上を走るタップル変数
 を用いる。(iii') 属性の数だけの同値律集合(LE)を用いる。
 という特徴をもち、上記(a)および(b)の欠点を解消している。
 また本稿で述べる結果は、独立に行なわれたカテゴリー論に
 よるアプローチ(加藤[4])の結果とちょうど対応し、それ
 によ、て代数的な肉付けが得られている。

2 関係モデル

従属性の形式化にとって最小限必要な関係モデルでの概念を定義する。その定義は、従来のものを多少整理洗練した形で述べてある。それは、空な属性集合やその上の関係、一般には非可算無限の濃度をもつ関係などを含んでいる。

したがって必ずしも計算機メモリ上に展開できるとはかぎらない数学的な関係を扱うが、これは統一的な議論のためにはたらのよい特別なものばかりと扱うわけにはいかないからである。

関係 R は 3 項組 $\langle A, \mathcal{D}, R \rangle$ のことである。ここに、 A は高々可算な集合で関係 R の属性集合と呼ばれる。 $\mathcal{D}$ は空でない任意の集合 $D_a (a \in A)$ 達から成る A 上の集合族で関係 R のドメイン関数と呼ばれる。また R は集合族 $\mathcal{D} = \{D_a\}_{a \in A}$ の直積 $\prod \mathcal{D}$ の任意の部分集合で関係 R の本体と呼ばれる。ここに集合族 $\mathcal{D}$ の直積 $\prod \mathcal{D}$ は次式で定義される。

$$\prod \mathcal{D} \equiv \left\{ \lambda \mid \lambda: A \rightarrow \bigcup_{a \in A} D_a \text{ \& } \forall a \in A (\lambda(a) \in D_a) \right\} \quad (1)$$

$\prod \mathcal{D}$ は $\mathcal{D}$ の定義域である属性集合 A 上の (1 つの) 関係ユニバースと呼ばれることもあり、そのときは $\mathcal{R}(A, \mathcal{D})$ と書かれる。関数 $\lambda \in \mathcal{R}(A, \mathcal{D})$ は $\mathcal{R}$ のタプル又は $\mathcal{D}$ 上のタプルと呼ばれる。また $\lambda(a) \in D_a$ はタプル λ の a -成分と呼ばれ、従来 $\lambda.a$ と書かれたものである。

我々は A を任意にひとつ固定したとき、その上で可能なすべての関係 R に関心がある。ドメイン関数 μ は属性 $a \in A$ の意味を与えるものと解釈できるが、従属性といわれるものは実はこの意味付けに依存しない不変な構造の表現を意図したものである。たと理解される。

3 従属性の形式化

3.1 構文

属性集合 A を任意にひとつ固定し、その上の言語 (従属性言語) $L(A)$ をつぎのように定める。これは等号なしの一階言語の小さな部分集合である。ここではやや非形式的に述べるがその意図するところは了解できると思う。

(1) 基本記号

- ・ 変数記号の集合 $X = \{x, y, z, \dots\}$.
- ・ 2項述語記号の集合 $P = \{p_a\}_{a \in A}$,
ただし $a \neq b$ ならば $p_a \neq p_b$.
- ・ 基本論理記号の集合 $\{\sim (\text{not}), \wedge (\text{and}), \forall (\text{for all})\}$.

(2) 原子式

$x, y \in X$ で $p_a \in P$ のとき $p_a(x, y)$ は原子式。

(3) 式

- (i) α が原子式 $\Rightarrow \alpha$ は式。

(ii) α が式 $\Rightarrow \neg \alpha$ は式.

(iii) α, β が式 $\Rightarrow \alpha \wedge \beta$ は式.

(iv) α が式, $x \in X \Rightarrow \forall x \alpha$ は式.

(4) 閉じた式

α が式でかつ α の中のすべての変数記号の出現が束縛されているとき, α は 閉じている といわれる. 閉じた式のことを 文 ともいう.

3.2 意味

(1) モデル

文の意味を定めるためにモデルを定義する. モデル M は組 $\langle D, A_p \rangle$ である. ここに D は空でない集合で M の基礎領域と呼ばれる. また A_p は 2 項述語記号 $p_a \in P$ 達に D 上の 2 項述語 $\pi_a \in 2^{D \times D}$ 達を割当てる関数で P 上の割当てと呼ばれる.

(2) 変数記号への割当て

モデル $M = \langle D, A \rangle$ 上の変数記号への割当て A_v とは, 変数記号 $x \in X$ に D の元を割当てる関数である. すなわち,
 $A_v(x) \in D$ である.

(3) 割当ての変種

割当て A_v の変種 $A_v[x/d]$ とはやはり M 上の変数記号への割当てであってつぎのように定義される. 任意の $x \in X$

に対して、

$$A_v[x/d](\xi) = \begin{cases} d & \text{if } \xi = x \\ A_v(\xi) & \text{otherwise} \end{cases}$$

(4) 付値

式 γ の付値関数とは、モデル $M = \langle D, A_p \rangle$ と割当て A_v とにより定まる式の意味——1(真), 0(偽)——を計算する関数である。これを $V_{A_v}^M(\gamma)$ と書く。 $V_{A_v}^M(\gamma)$ はつぎのように帰納的に定義される。

(i) 原子式 $p_a(x, y)$ に対して、

$$V_{A_v}^M(p_a(x, y)) = A_p(p_a)(A_v(x), A_v(y)).$$

(ii) 式 $\sim \alpha$ に対して、

$$V_{A_v}^M(\sim \alpha) = \neg V_{A_v}^M(\alpha). \quad (*)$$

(iii) 式 $\alpha \wedge \beta$ に対して、

$$V_{A_v}^M(\alpha \wedge \beta) = V_{A_v}^M(\alpha) \& V_{A_v}^M(\beta). \quad (*)$$

(iv) 式 $\forall x \alpha$ に対して、

$$V_{A_v}^M(\forall x \alpha) = \bigwedge_{d \in D} V_{A_v}^M(\alpha), \quad (*)$$

ここで $A_v = A_v[x/d]$ である。

この付値関数が論理結合記号の通常の解釈に沿ったものであることは、脚注の $\times$ 記号の定義によってわかる。

(*) 注: $\neg, \&, \bigwedge$ は意味領域での演算記号でそれぞれ、

$\neg 0 = 1, \neg 1 = 0, 0 \& 0 = 0 \& 1 = 1 \& 0 = 0, 1 \& 1 = 1, \bigwedge_{d \in D} \alpha_d = 1$
for all $d \in D \ \alpha_d = 1$ then 1 else 0, と定められる。

3.3 二次論理記号

記法上の便宜のために, $\forall$ (for all), $\rightarrow$ (implies), $\exists$ (for some) の3論理結合記号を定義する. 定義は構文的に行なうが, その意味が通常の解釈と変わらないことは, 前項(4)の付値関数の定義にもとづいて確かめられる. 定義はつぎのとおり.

$$(i) \alpha \vee \beta \equiv \sim(\sim\alpha \wedge \sim\beta).$$

$$(ii) \alpha \rightarrow \beta \equiv \sim\alpha \vee \beta.$$

$$(iii) \exists x \alpha \equiv \sim \forall x \sim \alpha.$$

3.4 モデルによる式の充足

式 γ が割当 A_u によってモデル M において充足されるとは,

$V_{A_u}^M(\gamma) = 1$ となることである. このことを, $M, A_u \text{ sat } \gamma$ と書く. また式の集合 Γ に対しては, $M, A_u \text{ sat } \Gamma$

とは, 任意の $\gamma \in \Gamma$ について $M, A_u \text{ sat } \gamma$ であることという.

特に γ が閉じている場合, すなわち, 文である場合には,

付値 $V_{A_u}^M(\sigma)$ の値は A_u に依存しないので, A_u を省略して,

$M \text{ sat } \sigma$ と書く. 同様に, 文の集合 Σ に対しても

A_u を省略して, $M \text{ sat } \Sigma$ と書く.

3.5 関係による式の充足

(1) 誘導モデル

本体が空でない関係 $R = \langle A, \mathcal{A}, R \rangle$ はつぎのように $\mathcal{A}$ と R のモデル $M^* = \langle D^*, A_p^* \rangle$ を誘導する. すなわち,

$$D^\# = R, \quad A_p^\# \rightarrow 2^{R \times R} \quad \text{s.t.} \quad A_p^\#(p_a) = \pi_a \quad \text{と おく と 3,}$$

$$\lambda, \mu \in R \quad \text{に対して} \quad \pi_a(\lambda, \mu) = \begin{cases} 1 & \text{if } \lambda(a) = \mu(a) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

(2) 関係による充足

式 γ が割当て A_v によって関係 R において充足される ということと $R, A_v \text{ sat } \gamma$ と書くことにすれば、それは誘導モデルによってつぎのように定義される。

$$R, A_v \text{ sat } \gamma \stackrel{\text{def}}{=} M^\#, A_v \text{ sat } \gamma.$$

ただし、 A_v は変数記号 v の R の元の割当てである。同じに式、すなわち文 ϕ や、文の集合 Σ に対してはモデルでの解釈同様 A_v を省略し、 $R \text{ sat } \phi$ や $R \text{ sat } \Sigma$ のように書く。

これが「従属性 ϕ が関係 R で成立する。」という言明のモデル論的定義である。ここで、 ϕ は従来の肯定的な従属性のみならず、その否定であってもかまわないことに注意を喚起しておく。

4 同値律集合 LE

関係 R の誘導するモデル $M^\# = \langle D^\#, A_p^\# \rangle$ では、 $A_p^\#$ の割当てる R 上の 2 項述語がどれも同値律をみたすという特徴がある。このことは式 (2) によって確かめられる。これに対し、勝

手なモデル $M = \langle D, A_p \rangle$ では、その A_p の割当てる 2 項述語は必ずしも同値律を満足しない。そこで一般のモデルのうち、それによつて割当てられる 2 項述語が同値律をみたすような特別なモデルが、式の意味として従属性を考察する上で重要であろうと推察できる。この考えを実現するため (A 上の) 同値律集合と呼ばれる特別な文の集合を導入しておく。この集合を LE であらわすことにすると、 LE はすべての $a \in A$ に対して次の形の (同値律をあらわすと解釈できる) 特別な文の全体から成る。

- (i) $\forall x p_a(x, x),$
- (ii) $\forall x \forall y (p_a(x, y) \rightarrow p_a(y, x)),$
- (iii) $\forall x \forall y \forall z (p_a(x, y) \wedge p_a(y, z) \rightarrow p_a(x, z)).$

5 特徴関係

LE をみたす任意のモデルから、特徴関係と呼ばれる関係が構成できることを示す。さらに特徴関係ではもとのモデルと丁度同じ文達が充足されることを示す。この特徴関係は、いわゆる Armstrong の関係 [5] といわれるものの拡張になっている。

5.1 特徴関係の構成

LE を満たすモデルの任意の M と $M = \langle D, A_p \rangle$ とする。
 M の特徴関係 $R^* = \langle A, \mathcal{D}^*, R^* \rangle$ は下記の4段階で構成される。

(1) $D \times A$ 上の関数 $\mathcal{D}^*: A \rightarrow \text{Sets}$, s.t. $\mathcal{D}^*(a) = D/\pi_a$.

ここに $\pi_a = A_p(p_a)$ であり仮定によりこれは同値律を満たしている。また D/π_a は D の π_a による商集合をあらわす。

(2) 関係 $\mathcal{E}$ = バース $\mathcal{R}(A, \mathcal{D}^*) = \Pi \mathcal{D}^*$.

(3) $\varphi: D \rightarrow \mathcal{R}$ なる特別な関数 φ s.t.

$$d \in D, a \in A \text{ に対して } \varphi(d)(a) = d/\pi_a, \quad (3)$$

ここに d/π_a は d の π_a による同値類をあらわす。

(4) $R^* \triangleq \varphi(D)$... D の φ による像。

以上の $\mathcal{D}^*$ と R^* とによってできる $R^* = \langle A, \mathcal{D}^*, R^* \rangle \in M$ の特徴関係という。(図1)

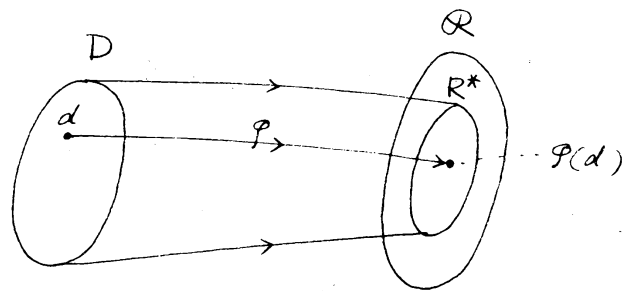


図1 特徴関係

5.2 特徴関係の誘導モデル

モデル $M = \langle D, A_p \rangle$ が LE を満たすものとする。この M

の特徴関係 R^* を前項 5.1 のように定める. 今その R^* の誘導するモデル $M^\#$ を $M^\# = \langle D^\#, A_p^\# \rangle$ であらわそう. M と $M^\#$ との対応、とくに A_p によって割当てられる 2 項述語と $A_p^\#$ によって割当てられるそれとの間の対応を調べよう. 今 $pa \in \mathbb{P}$ に対して, $A_p(pa) = \pi_a$, $A_p^\#(pa) = \pi_a^\#$ とおこう.

$\pi_a: D \times D \rightarrow 2$, $\pi_a^\#: D^\# \times D^\# \rightarrow 2$ である. ここで, $M^\#$ の定義から $D^\# = R^*$ であり, R^* の定義 $R^* = \mathcal{P}(D)$ から

$\pi_a^\#: \mathcal{P}(D) \times \mathcal{P}(D) \rightarrow 2$ となる. ただし, φ は式(3)で与えられる. さて, 任意の $d, c \in D$ に対して,

$$\begin{aligned} \pi_a^\#(\mathcal{P}(d), \mathcal{P}(c)) = 1 &\iff \mathcal{P}(d)(a) = \mathcal{P}(c)(a) \\ &\iff d/\pi_a = c/\pi_a \\ &\iff \pi_a(d, c) = 1 \end{aligned}$$

である. すなわち, 任意の $d, c \in D$ に対して,

$$\pi_a^\#(\mathcal{P}(d), \mathcal{P}(c)) = 1 \iff \pi_a(d, c) = 1 \quad (4)$$

が成立つ. ($\mathcal{P}$ は全射であるから, 任意の $\lambda, \mu \in R^*$ に対して, 適当な $d, c \in D$ が存在し, $\lambda = \mathcal{P}(d)$, $\mu = \mathcal{P}(c)$ となり, かつ そのような任意の d, c に対して

$$\pi_a^\#(\lambda, \mu) = 1 \iff \pi_a(d, c)$$

でもある.) そこで, $\mathcal{P}$ によって引き起こされる $D \times D$ 上の述語から $D^\# \times D^\#$ 上のそれへの写像で, $\pi_a \mapsto \pi_a^\#$ となるものも $\mathcal{P}$ であらわすよう拡大すると, $\pi_a^\# = \mathcal{P}(\pi_a)$ と書け, 式(4)は

$$\mathcal{P}(\pi a)(\mathcal{P}(d), \mathcal{P}(c)) = \pi a(d, c) \quad (5)$$

となる。この様子を図示すると図2のようになる。

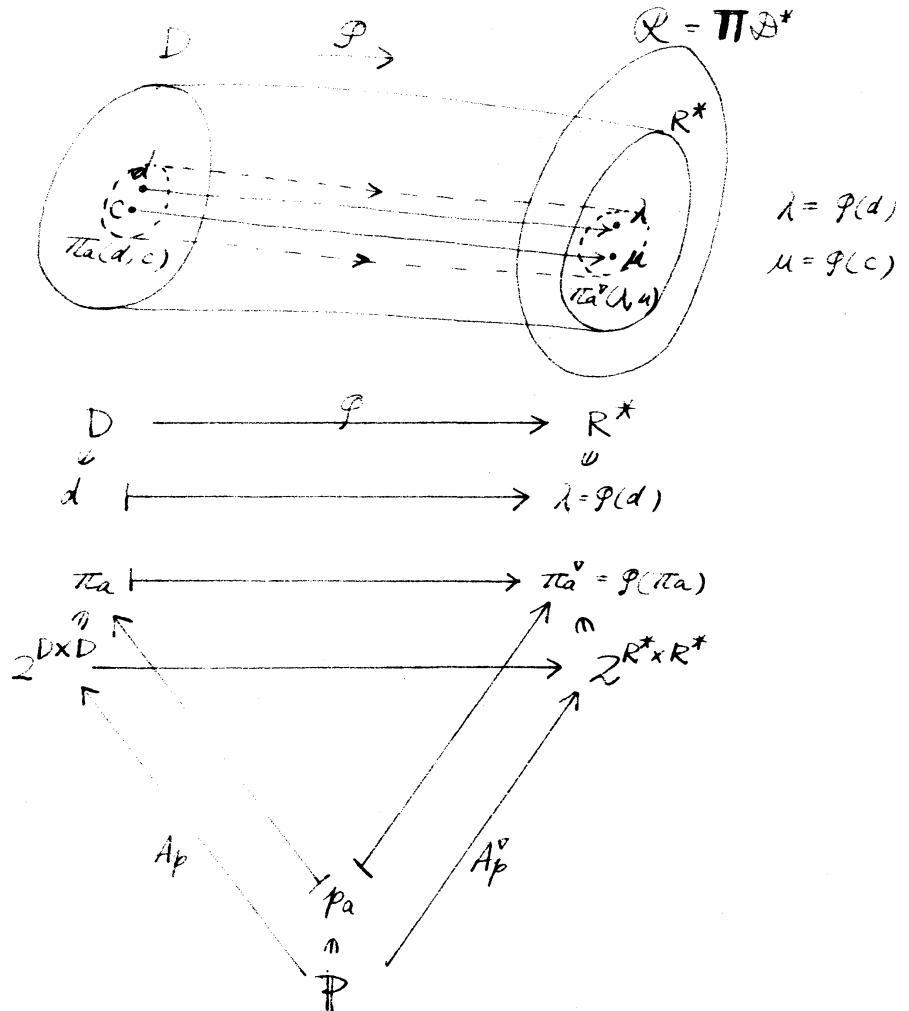


図2 M と $M^\#$ との対応

5.3 特徴関係の定理

M をLEを満たす任意のモデルとし、 R^* を5.1項で与えた特徴関係とする。このときつぎの定理が成立つ。

[定理1] 任意の文 ϕ に対して, $\underline{M \text{ sat } \phi}$ と $\underline{R^* \text{ sat } \phi}$ とは同等である. $\square$

(証明) A_u をモデル M 上の任意の割り当てとする. R^* 上の割り当て A_u^* をつぎのように定める. すなわち, 任意の $\xi \in X$ に対して $A_u^*(\xi) = \varphi(A_u(\xi)) \in R^*$, ただし, φ は式(3)で与えられる. このとき, 定理は次の補助定理の特別な場合となる.

[補助定理] 任意の式 γ に対して, $\underline{M, A_u \text{ sat } \gamma}$ と $\underline{R^*, A_u^* \text{ sat } \gamma}$ とは同等である. $\square$

補助定理を証明する. 証明は, $V_{A_u^*}^{M^*}(\gamma) = V_{A_u}^M(\gamma)$ であることを, γ の構成に関する帰納法を用いて行なう. ここに M^* は R^* の誘導モデルで, 5.2項で与えられるものとする.

(case 1) γ が原子式 $p_a(x, y)$ のとき.

$$\begin{aligned} V_{A_u^*}^{M^*}(p_a(x, y)) &= A_p^v(p_a)(A_u^*(x), A_u^*(y)) \\ &= \varphi(A_p(p_a))(\varphi(A_u(x)), \varphi(A_u(y))) \quad \dots (*) \\ &= A_p(p_a)(A_u(x), A_u(y)) \quad \dots \text{式(5)より} \\ &= V_{A_u}^M(p_a(x, y)). \end{aligned}$$

(*) 注. 5.2項 φ の拡張により, $A_p^v(p_a) = \pi_a^v = \varphi(\pi_a) = \varphi(A_p(p_a))$.
また, A_u^* の定義より $A_u^*(x) = \varphi(A_u(x))$.

(case 2) γ が式 $\sim \alpha$ のとき.

$$\begin{aligned} V_{A\alpha}^{M\#}(\sim \alpha) &= \neg V_{A\alpha}^{M\#}(\alpha) \\ &= \neg V_{A\alpha}^M(\alpha) \quad \dots \quad \text{帰納法の仮定より.} \\ &= V_{A\alpha}^M(\sim \alpha). \end{aligned}$$

(case 3) γ が式 $\alpha \wedge \beta$ のとき. (case 2) と同様.

(case 4) γ が式 $\forall x \alpha$ のとき.

$$\begin{aligned} V_{A\alpha}^{M\#}(\forall x \alpha) &= \bigwedge_{\lambda \in R^*} V_{A\alpha}^{M\#}[x/\lambda](\alpha) \\ &= \bigwedge_{d \in D} V_{A\alpha}^{M\#}[x/\varphi(d)](\alpha) \quad \dots \quad R^* = \varphi(D) \text{ ゆえ.} \\ &= \bigwedge_{d \in D} V_{(A\alpha)[x/d]}^{M\#}(\alpha) \quad \dots \quad (*) \\ &= \bigwedge_{d \in D} V_{A\alpha}^M[x/d](\alpha) \quad \dots \quad \text{帰納法の仮定.} \\ &= V_{A\alpha}^M(\forall x \alpha). \end{aligned}$$

(case 1) から (case 4) までで補助定理の証明が完了した.
定理は、補助定理における式 γ が文 α である場合として与えら
れに得られる. (証明終) $\square$

[系] M, R^* は定理 1 と同様とする.

任意の文の集合 Σ に対して, $M \text{ sat } \Sigma$ と $R^* \text{ sat } \Sigma$ とは同等である. $\square$

(*) 注: $A\alpha^*[x/\varphi(d)](\xi) = \begin{cases} \varphi(d) & \text{if } x = \xi \\ A\alpha^*(\xi) = \varphi(A\alpha(\xi)) & \text{otherwise.} \end{cases}$

$$\therefore A\alpha^*[x/\varphi(d)](\xi) = \varphi(A\alpha[x/d](\xi)) = (A\alpha[x/d])^*(\xi).$$

6 推論と形式化の完全性

σ を任意の文, Σ を任意の文の集合とする.

[定義] 関係での推論 ($\Rightarrow$)

σ が Σ の関係モデルでの帰結であるとは、任意の関係

$R = \langle A, \omega, R \rangle$, ただし R は空でない, について

$R \models \Sigma$ ならば $R \models \sigma$ となることであり、

そのことを $\Sigma \Rightarrow \sigma$ と書く. $\square$

[定義] モデルでの推論 ($\models_{WLE}$)

σ が Σ の意味論的帰結であるとは、任意のモデル M につ

いて $M \models \Sigma \cup LE$ ならば $M \models \sigma$ となることじ

あり、そのことを $\Sigma \models_{WLE} \sigma$ と書く. $\square$

上記の2つの定義におけるそれぞれの推論 $\Rightarrow$ と $\models_{WLE}$ と
について互に同等であることが証明できる.

[定理2] $\Rightarrow$ に対する $\models_{WLE}$ の健全性.

$\Sigma \models_{WLE} \sigma$ ならば $\Sigma \Rightarrow \sigma$. $\square$

[定理3] $\Rightarrow$ に対する $\models_{WLE}$ の完全性.

$\Sigma \Rightarrow \sigma$ ならば $\Sigma \models_{WLE} \sigma$. $\square$

特徴関係の定理 (定理1) を用いて定理3が証明できる.

また誘導モデルを用いて同様に定理2が証明できる. $\square$ ここ

では定理3の証明のみをあげるが定理2の証明もほぼ同様の
ある.

(定理2の証明) 証明は背理法による。そこで、

$$\Sigma \Rightarrow \sigma \quad (6)$$

であるにもかかわらず

$$\text{not}(\Sigma \models_{WLE} \sigma) \quad (7)$$

であると仮定する。式(7)より、

$$M \text{ sat } \Sigma \cup LE \cup \{\neg \sigma\}$$

となるモデルMが存在する。MはLEをみたすので、その特徴関係が構成でき、それは定理1によってMと同じ文集合をみたす。特に $\Sigma \cup \{\neg \sigma\}$ をみたすから、

$$R^* \text{ sat } \Sigma \cup \{\neg \sigma\}$$

となる。これから

$$(R^* \text{ sat } \Sigma) \text{ and } \text{not}(R^* \text{ sat } \sigma)$$

となるが、これは式(6)のいう、

$$\text{任意の関係} R \text{ について } \underline{R \text{ sat } \Sigma} \text{ ならば } \underline{R \text{ sat } \sigma}$$

に反する。したがって仮定は反証され、したがって定理が証明された。□

7 あとがき

本稿で定義した従属性の文の集合は、従来のFD, JDグループ(JD, MD, MVD)およびそれらの潜在形(EJD, EMD, EMVD)あるいはTemplate従属(TD)[6]を包含し、十分大きな

表現力をもっている。また、第6節において、関係モデルにおける従属性の推論が一階述語論理の意味論における推論によって等価におよぼえられることがわかった。このことは、本稿の形式化によって、一階述語論理の形式的演算体系が従属性の推論に対して自由に適用できることを示している。したがって、先にあげたような従属性の推論には、少なくとも部分決定アルゴリズムが存在することは直ちに了解される。さらにこれら従来の従属性はいずれもホーン節で知られるので詳しく調べれば色々と興味ある性質をもっている。竹島他の属性集合条件[7]などの解析が可能なのとも、ホーン節の性質によっている。

本形式化の鍵となる概念は第4節で定義した同値律集合 LE であるが、カテゴリー論的接近を試みた研究[4]によっても、関係を特徴づけるものが、 LE と同等のものであることが指摘されている。この事実を示唆されて、関係による実世界のモデル化ということをおうために見直すことも重要である。

(REFERENCES)

1. Codd, E. F. "A Relational Model of Data for Large Shared Data Banks," CACM, Vol.13, No.6, pp.377-387(1970).
2. Nicolas, J. M. "First Order Formalization for Functional, Multivalued, and Mutual Dependencies," Proc. ACM SIGMOD, Jul. 1978, pp.40-46.
3. Fagin, R. "Horn clauses and Database Dependencies," Proc. 12th ACM Symp. on Theory of Computing, Apr. 1980, pp.123-134.
4. 加藤昭彦 "射の導入による関係データモデルの表現独立性への接近と従属性への応用," 本講究録.
5. Armstrong, W. W. "Dependency Structures of Data Base Relationships," Proc. IFIP 74, pp.580-583, North Holland(1974).
6. Sadri, F. & Ullman, J. "A Complete Axiomatization for a Large Class of Dependencies in Relational Database," Proc. 12th ACM Symp. on Theory of Computing, Apr. 1980, pp.117-122.
7. 竹島卓, 国藤進, 小林要 "従属性の属性集合条件," 情報処理学会第21回全国大会予稿集19-2 (1980)