

セーフペトリネットによる正規集合の記述の簡潔さ
について ——有限オートマトンとの比較——

阪大 基礎工 松浦敏雄

杉山裕二

谷口健一

嵩 忠雄

1. ま え が き

ペトリネットは並列処理プロセスの同期等を簡潔に表現するモデルとして適している。並列処理プロセスにおける各操作や事象は、ペトリネットにおいては *transition* (ト-節点) に対応し、それによって成された仕事名や事象の種類は、そのト-節点に付されたラベルで表わされる。このト-節点のラベルをアルファベットの1つの記号とみなしたとき、ト-節点の発火系列に対応するラベル系列の集合としてある種の言語を記述できる。特に、ペトリネットが有界な場合(もちろん、セーフな場合も)、記述できる言語は有限オートマトンと同様、正規集合である。

ところで、我々はペトリネットがセーフな場合であっても、

発火系列に対応するラベル系列の集合の等価性、およびラベル付きセーフペトリネットの簡単化の判定問題は、いかなる非決定性チューリング機械を用いても、ペトリネットの記述の長さに対して、指数的領域が必要であることを示した。(3)

このことは、これらの問題が有限オートマトンの等価性および簡単化より“複雑な”問題のクラスに属することを示している。このことから逆に、ある種の正規集合に対しては有限オートマトンによる記述よりも、セーフペトリネットを用いた方がはるかに簡潔に、すなわち、少ない文字数で表現できることが予想されるが、両者の差の程度は明確にされていないかった。

セーフペトリネットによる正規集合の記述と有限オートマトンによる記述の簡潔さの差異については、 $place$ (p -節点数) n の任意に与えられたセーフペトリネットに対して、同じ正規集合を記述する非決定性(決定性)の有限オートマトンの状態数は 2^n (2^{2^n}) あれば十分であることは容易にわかる。

本稿では、 p -節点数 n のセーフペトリネットで記述できる言語で、それを受理するいかなる非決定性(決定性)の有限オートマトンも状態数が 2^n (2^{2^n}) のオーダーが必要であるような言語が存在することを示している。

2. 諸定義

[定義1]

ペトリネット N は次の4つ組で定義される有向グラフである。

$$N = \langle P, T, E, M_0 \rangle$$

ただし,

(1) $P = \{p_1, \dots, p_{|P|}\}$: 有限個の p -節点 (place) の集合.

(2) $T = \{t_1, \dots, t_{|T|}\}$: 有限個の t -節点 (transition) の集合.

(3) E : 有限個の有向枝 (arc) の集合.

各枝は t -節点から p -節点へ, または, p -節点から t -節点へ向かう.

(4) M_0 : 初期マーキング (initial marking).

P から $\mathbb{N}$ (非負整数の集合) への写像である.

もし, p -節点 p から t -節点 t (あるいは t -節点 t から p -節点 p) への枝があれば, p は t -節点 t の入力 p -節点 (あるいは出力 p -節点) という.

[定義2]

マーキング M は, P から $\mathbb{N}$ への写像である. 集合 P は有限

なので、マーキング M を $\mathbb{N}$ 上の $|P|$ 次元ベクトル $(s_1, \dots, s_{|P|})$ によって表わすことができる。ここで、第 i 成分の値 s_i は、 $M(p_i)$, $p_i \in P$ である。

〔定義3〕

ペトリネットを図で表わすときには、 p -節点を " $\circ$ " で、 t -節点を " $-$ " で、枝を " $\rightarrow$ " で表わす。また、マーキング M は各 p -節点 p_i の中に、 $M(p_i)$ 個のトークン (token: 図では " $\bullet$ " で示す) 置いて表わす。

〔定義4〕

p -節点 p から t -節点 t への枝の数を $I_p(t)$ で、 t -節点 t から p -節点 p への枝の数を $O_p(t)$ で表わす。 t -節点 t のすべての入力 p -節点 p に対して、 $M(p) \geq I_p(t)$ が成立するようなマーキング M に関して、 t -節点 t は発火可能 (firable) であるという。 t -節点 t が発火 (fire) すると、すべての入力 p -節点 p から $I_p(t)$ 個のトークンが取去られ、すべての出力 p -節点 p に $O_p(t)$ 個のトークンが加えられる。マーキング M から t -節点 t の発火によって得られるマーキングを M' とするとき、 $M \xrightarrow{t} M'$ と書く。

〔定義5〕

T の中の記号を重複を許して任意に有限個連接して得られる系列全体の集合を T^* で表わし, 0 個の記号の系列を入れて任意の系列 w を i 回反復して得られる系列を $(w)^i$ で表わす.

〔定義6〕

マーキング M からマーキング M' への発火系列(firing sequence) σt を次のように帰納的に定義する. ただし, $\sigma \in T^*$, $t \in T$, $\mathbb{N}^{|P|}$ は $\mathbb{N}$ 上の $|P|$ 次元ベクトルの集合である.

$$M \xrightarrow{\sigma t} M' \triangleq \exists M'' \in \mathbb{N}^{|P|} [M \xrightarrow{\sigma} M'' \ \& \ M'' \xrightarrow{t} M']$$

また, $M \xrightarrow{\lambda} M$ とする.

〔定義7〕

$M \xrightarrow{\sigma} M'$ なる発火系列 σ ($\sigma \in T^*$)が存在するとき, マーキング M' はマーキング M から到達可能(reachable)であるという.

〔定義8〕

ペトリネット $N = \langle P, T, E, M_0 \rangle$ における発火系列集合 $F(N)$ を次のように定義する.

$$F(N) = \{ \sigma \in T^* \mid \exists M \in \mathcal{N}^{|P|}, M_0 \xrightarrow{\sigma} M \}$$

また、特に N におけるマーキング M_f への発火系列集合 $F(N, M_f)$ を次のように定義する。

$$F(N, M_f) = \{ \sigma \in T^* \mid M_0 \xrightarrow{\sigma} M_f \}$$

〔定義 9〕

右節点にラベルを付けるとき、右節点 u に対応するラベルを $L(u)$ 、発火系列 σ に対応するラベル系列を $L(\sigma)$ で表わす。また、発火系列の集合 F に対応するラベル系列集合 $L(F)$ を次のように定義する。

$$L(F) = \{ L(\sigma) \mid \sigma \in F \}$$

〔定義 10〕

ペトリネット $N = \langle P, T, E, M_0 \rangle$ において、 p -節点 p_i がセーフであるとは、初期マーキング M_0 から到達可能なすべてのマーキング M に対して、 $M(p_i) \leq 1$ が成立することである。 P に属するすべての p -節点がセーフであるとき、ペトリネット N はセーフであるという。

以下、本稿で取扱うペトリネットはセーフであり、すべての p -節点 p 、右節点 u に対して、 $I_p(u) \leq 1$ 、 $Q_p(u) \leq 1$ である

ものとする。従って、マーキングをトークンの置かれた p -節
点全体の集合で表わすこともある。また、枝を p -節点と q -節
点の順序対で表わす。

また、ペトリネット $N = \langle P, T, E, M_0 \rangle$ において、 N の
記述の長さを $|N|$ で表わし、 p -節点数、 q -節点数、枝数の和
 $|P| + |T| + |E|$ を N のサイズという。

3. 問題 および 本稿で示す結果

状態数 n の任意の非決定性有限オートマトン（以下、NFA
と略す）が受理するいかなる言語も状態数が 2^n あれば決定
性の有限オートマトン（以下、DFA と略す）で受理できるこ
とは、よく知られているが、F. R. Moore⁽⁴⁾ によつて、次
に示す補題 1 が示されている。以下に示す状態数 n の NFA
 B_n （図 1 参照）によつて受理される言語を L_n とする。^(注 1)

$$B_n = \langle S, \Sigma, \delta, 1, \{n\} \rangle$$

ただし、 $S = \{1, 2, \dots, n\}$: 状態の集合,

$\Sigma = \{a, b\}$: 入力アルファベットの集合,

δ : 遷移関数

$$\delta(i, a) = \{i+1\} \quad i=1, 2, \dots, n-1$$

$$\delta(n, a) = \{1, 2\}$$

$$\delta(1, b) = \{1\}$$

$$\delta(i, b) = \{i+1\} \quad i = 2, 3, \dots, n-1$$

$$\delta(n, b) = \emptyset$$

1 : 初期状態

{n} : 最終状態

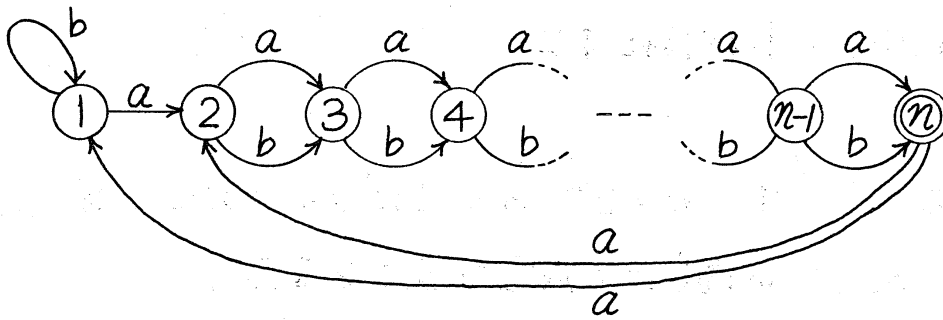


図1. NFA B_n の状態遷移図

(注1): $\mathcal{L}_n$ は正規表現によって次のように表わされる.

$$\mathcal{L}_n = b^* a \underbrace{((a+b) \cdots (a+b))^*}_{(n-2)\text{回}} \underbrace{(a+b) \cdots (a+b)}_{(n-2)\text{回}}$$

[補題1]

任意の正整数 n に対して, NFA B_n は $\mathcal{L}_n$ を受理する NFA の中で状態数最小であり, $\mathcal{L}_n$ を受理するいかなる DFA も 2^n の状態数が必要である. □

補題1では, 同じ正規集合を受理する DFA と NFA の記述の簡潔さのちがいを示しているが, 次の補題2では, NFA とラベル付きセーフペトリネットの記述の簡潔さのちがいを示し

ている。

〔補題2〕

任意の n に対して, L_n を最終マーキングに至る発火系列に対応するラベル系列集合として持つサイズ $O(\lceil \log n \rceil)$ のセーフペトリネットが存在する。 $\square$

(証明) まず, $n = 2^m$ のときについて示し, 後で n が 2 のべき乗でない場合にも成立することを示す。

$n = 2^m$ のとき, 次に示すペトリネット N_m はセーフであり, L_n を最終マーキング M_{fm} に至る発火系列に対応するラベル系列集合として持つことを示す。

$$N_m = \langle P_m, T_m, E_m, M_{om} \rangle$$

ただし,

$$P_m = \{p_0, p_1, \dots, p_m\} \cup \{g_1, \dots, g_{m-1}\} \cup \{\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_{m-1}\}$$

$$T_m = \{t_{ij} \mid 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq 4\} \cup \{t_{01}, t_{02}, t_{m1}, t_{m2}\}$$

$$E_m = \{(p_i, t_{ij}) \mid 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq 4\}$$

$$\cup \{(\bar{g}_i, t_{ij}) \mid 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq 2\}$$

$$\cup \{(g_i, t_{ij}) \mid 1 \leq i \leq m-1, 3 \leq j \leq 4\}$$

$$\cup \{(t_{ij}, g_i) \mid 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq 2\}$$

$$\cup \{(t_{ij}, \bar{g}_i) \mid 1 \leq i \leq m-1, 3 \leq j \leq 4\}$$

$$\cup \{(t_{ij}, p_1) \mid 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq 2\}$$

$$U\{(t_{ij}, p_{i+1}) \mid 1 \leq i \leq m-1, 3 \leq j \leq 4\}$$

$$U\{(p_0, t_{01}), (t_{01}, p_0), (p_0, t_{02}), (t_{02}, p_1), \\ (p_m, t_{m1}), (t_{m1}, p_0), (p_m, t_{m2}), (t_{m2}, p_1)\}$$

$$M_{0m} = \{p_0, \bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots, \bar{s}_{m-1}\}$$

$$M_{fm} = \{p_m, \bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots, \bar{s}_{m-1}\}$$

各右節点へのラベルの付け方は, t_{i2}, t_{i4} ($1 \leq i \leq m-1$),
および t_{01} に対してラベル b を付け, その他の右節点に
は, すべてラベル a を付ける. (図2参照)

まず, 初期マーキング M_{0m} より到達可能なすべてのマーキ
ングにおいて, 次の3つの性質が満たされることを示そう.

性質1: すべての i ($1 \leq i \leq m-1$) に対して, $\bar{s}_i$ と $\bar{s}_i$
のどちらか一方にトーフンが1つだけ存在する.

性質2: M_{0m} を除く到達可能なすべてのマーキングに
おいて, p -節点 $p_1, \dots, p_m$ のうちの唯一つの p -
節点にトーフンが1つだけ存在し, p_0 にトーフ
ンが入り得るのは, M_{0m} のみである.

性質3: p -節点 p_i ($1 \leq i \leq m$) にトーフンがあるとき,
 $1 \leq j < i$ なるすべての j について, $\bar{s}_j$ にはトーフ
ンがなく, $\bar{s}_j$ に1つだけ存在する.

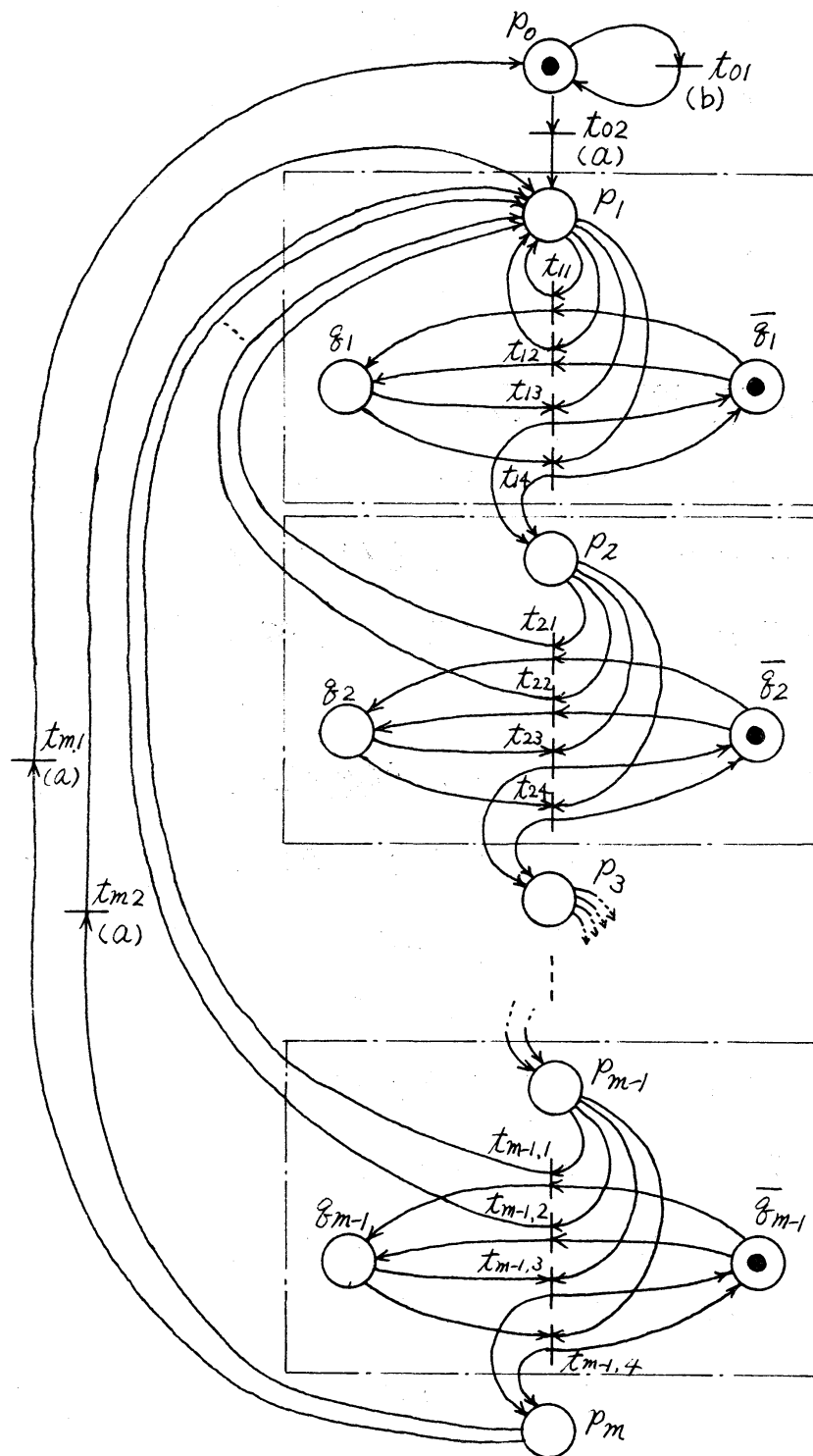


図2. セーフペトリネット N_m

初期マーキング Mom において、性質 1, 2, 3 を満たすのは明らかである。Mom において発火可能な右節点は u_1, u_2 のみであり、これらの右節点の発火後も性質 1, 2, 3 を満たす。

いま、 k 回以下の発火可能な右節点の発火によって得られるすべてのマーキングについて、性質 1, 2, 3 が満たされているものとする。ここで、すべての右節点のそれぞれについて、 $(k+1)$ 回目の右節点として発火したときを考える。(イ) 右節点 u_i (ラベル a) または u_{i+1} (ラベル b) ($1 \leq i \leq m-1$) が発火したとき、1 つのトーションが p_i から p_1 へ移され、かつ同時に、 $\bar{p}_i$ から $\bar{p}_1$ へ移される。従って仮定と考えあわせて、発火後のマーキングにおいても性質 1, 2, 3 が満たされる。(ロ) 右節点 u_{i+1} (ラベル a) または u_{i+2} (ラベル b) ($1 \leq i \leq m-1$) が発火したとき、1 つのトーションが p_i から p_{i+1} へ、同時に、 $\bar{p}_i$ から $\bar{p}_{i+1}$ へ移される。よって、この場合も性質 1, 2, 3 が満たされる。(ハ) 右節点 u_1 または u_2 が発火した場合、1 つのトーションが p_0 から p_0 、または p_0 から p_1 へ移されるだけであり、明らかに性質 1, 2, 3 が満たされる。(ニ) 最後に、右節点 u_{m-1}, u_m が発火するときを考える。これらの右節点は p -節点 p_m にトーションが存在するときのみ発火可能である。ところが仮定より、これらの右節点の発火前において、性質 1, 2, 3 が満たされており、これらの性質を満たし、かつ、 p -節点 p_m にト

トーフンが存在するマーキングは最終マーキング M_{fm} に限られる。ここで、 t -節点 t_{m1} が発火すると初期マーキング M_0 となり、性質 1, 2, 3 が満たされ、 t -節点 t_{m2} の発火後もこれらの性質が満たされる。

従って、到達可能なすべてのマーキングにおいて性質 1, 2, 3 が満たされる。性質 1, 2 より、ただちにペトリネット N_m がセーフであることがわかる。

以下、NFA B_n の各状態と N_m の到達可能なマーキングとの対応を示すために、 N_m の各マーキング M に対し、 M の重み $W(M)$ を次のように定義する。

$$W(M) = \sum_{r \in M} w(r)$$

ただし、 $w(r)$ は p -節点 r に対応する非負整数で、 N_m において、次のように定義する。

$$w(p_i) = 2^i \quad (0 \leq i \leq m)$$

$$w(\bar{p}_i) = 2^i - 1 \quad (1 \leq i \leq m-1)$$

$$w(\bar{p}_i) = 0 \quad (1 \leq i \leq m-1)$$

すなわち、 $W(M)$ は M においてトーフンの存在する p -節点 r に対する $w(r)$ の和である。

次に、 N_m の到達可能なマーキングに対して、次の性質 4 も成立することを示そう。

性質4: $1 \leq k \leq 2^m$ なる各 k について, 重み k の到達可能なマーキングがただ1つ存在する. 逆に到達可能な任意のマーキング M に対して,
 $1 \leq W(M) \leq 2^m$ が満たされる.

まず, $1 \leq k \leq 2^m$ なる各 k について, 重み k の到達可能なマーキング M_k が少なくとも1つ存在することを示す.

定義より明らかに $W(M_0) = 1$ が成立つ ($M_0 = M_1$ とおく). M_0 において, ラベル a の n -節点 x_{02} とラベル b の n -節点 x_{01} のみが発火可能であり, x_{02} の発火後のマーキングを M_2 とすれば $W(M_2) = 2$ となり, x_{01} の発火後のマーキングは M_0 のままである.

いま, 重みが k (ただし, $2 \leq k < 2^m$) のあるマーキング M_k が到達可能であると仮定する.

マーキング M_k において, $W(M_k) < 2^m$ だから p -節点 p_m にはトークンが存在しない. また, $M_k \neq M_0$ だから性質2より, p -節点 p_0 にもトークンが存在しない. よって, 性質1, 2, 3より M_k において発火可能な n -節点は, p -節点 $p_1, \dots, p_{m-1}$ の中のトークンの存在する p -節点 p_j に対して, x_{j1} (ラベル a) と x_{j2} (ラベル b) の場合と, x_{j3} (ラベル a) と x_{j4} (ラベル b) の場合がある. いずれの場合も発火可能なラベル a ,

b の右節点が 1 つずつ存在し、前者の場合、 x_{j1} または x_{j2} の発火によって、 p -節点 p_j および $\bar{x}_j$ から 1 つのトーフンが除去され、 p -節点 p_1 および x_j に 1 つのトーフンが付加される。このときのマーキングを M_{k+1} とすれば (x_{j1} と x_{j2} の発火後のマーキングは一致する), $W(M_{k+1}) = W(M_k) - w(p_j) - w(\bar{x}_j) + w(p_1) + w(x_j) = W(M_k) - 2^j - 0 + 2 + (2^j - 1) = W(M_k) + 1 = \ell + 1$ となる。後者の場合、 x_{j3} または x_{j4} の発火によって得られるマーキングを M_{k+1} (x_{j3} と x_{j4} の発火後のマーキングは一致する) とすれば、同様にして、 $W(M_{k+1}) = W(M_k) - w(p_j) - w(x_j) + w(p_{j+1}) + w(\bar{x}_j) = W(M_k) - 2^j - (2^j - 1) + 2^{j+1} + 0 = W(M_k) + 1 = \ell + 1$.

従って、いずれの場合も、 M_k においてラベル a, b の右節点が 1 つずつ発火可能であり、これらの右節点の発火後のマーキング M_{k+1} において、 $W(M_{k+1}) = \ell + 1$ が成立し、 M_k からは M_{k+1} 以外のマーキングには移行できない。以上のことから、1 から 2^m までの各重みについて、その重みを持つ到達可能なマーキングが存在する。

次に、性質 1, 2, 3 を満たすマーキングの個数を調べよう。 Mom 以外で、これらの性質を満たし、 p -節点 p_ℓ ($1 \leq \ell \leq m$) にトーフンが存在するマーキングは $2^{m-\ell}$ 通りある。従って、

N_m において, 性質 1, 2, 3 を満たすマーキングは M_{0m} も含めて, 全部で $\sum_{\ell=1}^m 2^{m-\ell} + 1 = 2^m$ 通り存在する. 到達可能なマーキングは, 性質 1, 2, 3 を満たすから, 2^m 通り以下しか存在しない. 従って, 前述のマーキング $M_1, \dots, M_{2^m}$ 以外には到達可能なマーキングは存在しない. 以上のことから性質 4 が満たされる.

到達可能な各マーキング M に対して, B_n の状態 $W(M)$ を対応させる. 初期マーキング M_{0m} , 最終マーキング M_{fm} はそれぞれ B_n の初期状態 1, 最終状態 $n (= 2^m)$ に対応する. 以下, B_n の任意の状態 n , および各 $\sigma (\sigma \in \{a, b\})$ に対して, $\delta(n, \sigma) = n'$ のとき, かつそのときに限り, ラベル σ を持つ右節点 n が存在し, $M_n \xrightarrow{\sigma} M_{n'}$ となることを示そう.

性質 4 の証明の過程で $M_{0m}, M_2, M_3, \dots, M_{2^m-1}$ において, 発火可能なラベル a (または b) の右節点の発火によって得られるマーキングと, B_n の状態 $1, 2, \dots, 2^m-1$ より入力 a (または b) で遷移する状態とが 1 対 1 に対応していることが容易にわかる.

また, 性質 4 より, $W(M_{2^m}) = 2^m$ である. 一方定義より $W(M_{fm}) = 2^m$ だから, $M_{2^m} = M_{fm}$ であることがわかる.

M_{fm} においては, ラベル a の右節点 n_{m1} と n_{m2} のみが発火可

能であり、これらの右節点の発火後のマーキングはそれぞれ M_{0m}, M_2 であることがわかる。よって、これらの右節点の発火は、 B_n の最終状態からの遷移と対応する。

以上のことから、 N_m および M_{fm} によって得られる発火系列に対応するラベル系列の集合 $L(F(N_m, M_{fm}))$ は NFA B_n が受理する正規集合 $\mathcal{L}_n$ に等しい。 N_m において、 μ -節点数 $3m-1$ 、右節点数 $4m$ 、枝数 $16m-8$ であるから、 N_m のサイズは $23m-9$ となる。ここで、 $m = \log_2 n$ だから、 N_m のサイズは $O(\log_2 n)$ である。

以上の議論は n が 2 のべき乗としているが、 n が任意の正整数のときは、次のようにして $O(\lceil \log_2 n \rceil)$ であることがわかる。 $m = \lceil \log_2 n \rceil$ とし、セーフベトリネット N_m を構成し、 N_m の 2 つの右節点 r_2, r_{m2} の発火後のマーキングを、重み $2^m - n + 2$ の性質 1, 2, 3 を満たすマーキング $M_{2^m - n + 2}$ へ遷移するように、これらの右節点から出射する枝を修正する。ここで、最悪の場合 N_m のサイズは $(2m-2)$ 増加し、合計して $25m-11$ となる。従って、 N_m のサイズは $O(\lceil \log_2 n \rceil)$ である。 □

補題 1, 2 より次の定理が導かれる。

〔定理3〕

任意の正整数 n に対して、次のような p -節点数 n （枝数は n に比例）のセーフペトリネット N とその最終マーキング M_f が存在する。ある定数 C （ $C > 0$ ）が存在し、ラベル系列集合 $L(F(N, M_f))$ を受理するどのような非決定性有限オートマトン、決定性有限オートマトンも、それぞれ、状態数が少なくとも $2^{C(n-1)}$, $2^{2^{C(n-1)}}$ 必要である。

（証明） 与えられた n に対して、 $3m+2 \geq n \geq 3m-1$ を満たす m 、すなわち、 $m = (n+1-\alpha)/3$ （ただし、 $\alpha \in \{0, 1, 2\}$ ）を考える。この m に対して、セーフペトリネット N_m およびその最終マーキング M_{fm} を補題2のように構成する。補題2より、 $L(F(N_m, M_{fm}))$ を受理するいかなるNFAも少なくとも $2^m = 2^{(n+1-\alpha)/3} \geq 2^{(n-1)/3}$ の状態数が必要であることがわかる。さらに補題1より、 $L(F(N_m, M_{fm}))$ を受理するいかなるDFAも少なくとも $2^{2^{(n-1)/3}}$ の状態数が必要であることがわかる。 □

参 考 文 献

- (1) 杉山, 荒木, 谷口, 嵩: "ペトリネットの発火系列に関する判定問題の複雑さ", 昭51年夏期L.A.シンポジウム予

稿(1976-7).

- (2) 嵩, 荒木: "Petri Net の Reachability に関する二, 三の問題", 信学会オートマトンと言語研資 AL 75-12 (1975-6).
- (3) 松浦, 杉山, 谷口, 嵩: "セーフペトリネットの等価性と簡単化に関する判定問題の複雑さ", 信学会オートマトンと言語研資 AL 77-67 (1978-1).
- (4) F. R. Moore: "On the Bounds for State-Set Size in the Proofs of Equivalence Between Deterministic, Nondeterministic, and Two-Way Finite Automata," IEEE Transactions on Computers, (October 1971).
- (5) N. D. Jones, L. H. Landweber and Y. E. Lien: "Complexity of some problems in Petri nets," Theoretical Computer Science, Vol.4, No.3, pp.277-299 (1977).
- (6) A. V. Aho, J. E. Hopcroft and J. D. Ullman: "The Design and Analysis of Computer Algorithms," Addison-Wesley (1974).
- (7) L. J. Stockmeyer and A. R. Meyer: "Word problems requiring exponential time," 5th Annual Symposium on Theory of Computing (1973).