

On the diffeomorphism types of elliptic surfaces with
multiple fibers

東大理 上 正明 (Masaaki Ue)

複素曲面でリーマン面の上への正則写像をもちその一般
的ファイバーが楕円曲線であるものを楕円曲面 (elliptic surface)
という。ここでは楕円曲面を実4次元多様体と見て、その微分同相類を
考える。楕円曲面 $\pi: M \rightarrow N$ に対して、 M の多重ファイバーの
 π による像を $\{p_1, \dots, p_k\}$ とおく。 $\pi^{-1}(p_i)$ の重複
度が m_i であるとする。 N を $\{p_1, \dots, p_k\}$ を cone
point で cone-angle $2\pi/m_i$ の 2-orbifold とみなす。
このとき次の定理がなりたつ。

定理. $\pi: M \rightarrow S$, $\pi': M' \rightarrow S'$ を
relatively minimal (fiber には一種例外曲線

を含まない) 楕円曲面とする. $\pi: M \rightarrow S$ が次の

(i), (ii) をみたすとする.

(i) M に 多重トラス以外に特異ファイバーがある.

(ii) S は orbifold として bad でも, cone point

2個以下の spherical orbifold でもない.

このとき.

$$M \text{ と } M' \text{ が diffeo} \iff e(M) = e(M') \text{ かつ}$$

$$\pi_1 M \cong \pi_1 M'$$

ただし $e(M)$ は M の euler 数.

注: 1) 条件(i) は $e(M) > 0$ に同値である.

2) $\pi_1 M$ は 後述の様に S の orbifold としての基本群 $\pi_1^{orb} S$ に同値. 特に(ii)の条件のもと, $\pi_1 M \cong \pi_1 M'$ は orbifold として $S \cong S'$ と同値.

§1 証明の概略

Moishezon [3] によると. relatively minimal

が楕円曲面 $\pi: M \rightarrow S$ は deformation により特異ファイバーは I_1 型 (一点で "transverse" に交わる immersed S^2) または mI_0 型 (重複度 m の多重トーラス) に限るものに diffeo である. (この deformation は S の orbifold type を変えない.)
 従って以下この type のものだけ考えればよい. 一方多重ファイバーがないときは松本の定理 [2] により M の diffeo type は $e(M)$ と S の種数で完全にきまる, (種数 0 のときは Kas-Moishezon が示した) また一般の場合, S の種数 h , cone point $p_1, \dots, p_k$ (各重複度 $m_1, \dots, m_k$) とすると (この S を $\Sigma_h(p_1, \dots, p_k)$ と書くことにする) M は euler 数が等しく底曲面 Σ_h (即ち, 多重ファイバーを持たない) の楕円曲面 $\hat{M}$ から k 回の logarithmic transformation を行なって得られる. [2] により $\hat{M}$ の diffeo type は一意的に決まってしまう. ここで $\hat{M}$ の projection $\hat{\pi}: \hat{M} \rightarrow \Sigma_h$ を 1 次の様に見ておく. ($e(M)$ は常に 12 で割れ. I_1 型ファイバーの数に等しい [3] ことに注意する.)

$$\hat{M} = V_g^0 \cup T^2 \times (\Sigma_h - D_2^0). \quad \Sigma_h = D^2 \cup (\Sigma_h - D_2^0)$$

但. $\tilde{\omega}: V_g^0 \rightarrow D^2$ は $12(g+1)$ 個の I_1 型
ファイバーを含み. $\partial V_g^0 \cong T^2 \times \partial D^2$ は $Lefschetz$
fibration (この diffeotype は g のみで定まる [3])

D_2 は Σ_h の 2-disc.

$\pi|_{V_g^0} = \tilde{\omega}$, $\pi|_{T^2 \times (\Sigma_h - D_2^0)}$ は 自然な射影.

ここで $p_1, \dots, p_k$ は $\Sigma_h - D_2^0 \subset \Sigma_h$ に含まれどとし
てよい. すると M は $\hat{M}$ から $\pi^{-1}(p_i)$ の近傍 $\pi^{-1}(D_i')$
(D_i' は p_i の small 2-disc 近傍) $\cong T^2 \times D_i^2$ を取
いて新たに $T^2 \times D^2$ を張りつけることにより得られる.
即ち. logarithmic transformation は topological には
4次元の Dehn surgery とみなしてよい.

(II) N の orbifold type 及び $u \in e(M)$ を固定する. こ
の時は $\hat{M}$ は up to diffeo は一意. 従って k 個の
多重トーラス (各の重複度 $m_1, \dots, m_k$) のはりつけ方
によらず. M の diffeo type が一意に決まることを示

すなわちわばならない. この目の多重ファイバーに
 相当する Dehn Surgery は diffeo $\varphi_i: T^2 \times \partial D_i \rightarrow$
 $\partial_i(\hat{M} - \pi^{-1}(\cup D_i)) \cong \pi^{-1}(\partial D_i)$ を与える
 ことにより表わされるがこれは $\pi_1 L_3 \pi$ の元により表示
 される. $\pi^{-1}(\partial D_i)$ の座標を (l, h, q_i) . — (l, h)
 は $\hat{M}$ のファイバーの座標を表わす curves. q_i は
 1 点 $x \in \partial_i D_i^2 \subset T^2 \times \partial D_i^2 \subset T^2 \times ([h - D_2^0] \subset \hat{M}$ で表わさ
 れる curve, によって定め. $T^2 \times \partial D_i$ の座標を
 $(l_i, h_i, q_i) \rightarrow l_i = \pi' x * x^*, h_i = * x \pi' x^*,$
 $q_i = * x * x \partial D_i$ — で定めるとき φ_i は
 $(l_i, h_i, q_i) = (l, h, q_i) A_i$ なる $\pi_1 L_3 \pi$ の元
 A_i で表わされる. 多重トラスのはりつぎ方は実
 際には meridian のはりつぎ方 (A_i の第 3 列) によ
 り決定される. 特に (3.3) 成分は $\pm m_i$ である. (座
 標系のとり方に ambiguity はあるが最後の性質は不
 変である)

補題 1. $\hat{M}_R = \hat{M} - \pi^{-1}(\cup \text{int } D_i)$ とおく

上記の座標系 (l, h, g_i') により $B_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha_i \\ 0 & 1 & \beta_i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}$ で表わされる diffeo. $g_i: \pi^{-1}(D_i) \rightarrow$
 に対して, diffeo $G: M^{\wedge} \rightarrow T^*G/\pi^{-1}(D_i)$
 $= g_i$ ($i=1, \dots, k$) なるものが存在する.

補題 2. 上記の座標系 (l, h, g_i') により $C_i =$
 $\begin{pmatrix} D_i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $D_i \in SL_2\mathbb{Z}$ で表わされる diffeo. $f_i:$
 $\pi^{-1}(D_i) \rightarrow$ に対して diffeo. $F: M^{\wedge} \rightarrow T^*F/\pi^{-1}(D_i)$
 $= f_i$ ($i=1, \dots, k$) なるものが存在する.

補題 1, 2 とともに多重トーラス以外の特殊ファイバーが存在
 することが本質的である. これらと, 次の簡単な
 事実: $T^2 \times D^2$ の self-diffeo g が $T^2 \times D^2$ の self-
 diffeo に拡張する $\Leftrightarrow g$ が meridian を保つ. とか,
 ら, M の diffeo type を変えることなく A_i を
 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & m_i \end{pmatrix}$ に変換することができる. 即ち, M の
 diffeo type (及びその標準形) が一意に定まる. これを
 便宜上, $L(m_1, \dots, m_k) \vee g, h$ と書くことにしよう.

(II). 次に $\pi_1 M$ と S の orbifold type との関係を確認
 べし.

補題 3. 定理の (i) の条件のもとで, $\pi_1 M$ は
 $\pi_1^{orb} S$ に同型である.

これは, M のファイバーの $\pi_1 M$ への寄与が 0 である
 ということを示す. 従って問題は oriented
 2-orbifold の分類に帰着された. 即ち.

- (a) S bad or spherical with $\# \text{cone point} \leq 2 \Leftrightarrow \pi_1^{orb} S$
 cyclic (finite), (b) S spherical with 3 cone points
 $\Leftrightarrow \pi_1^{orb} S$ polyhedral group of finite order
 c) S euclidean or hyperbolic. $\Leftrightarrow \pi_1^{orb} S$ infinite
 planar discontinuous group. よく知られている様
 に次の場合を除いて S の orbifold type は $\pi_1^{orb} S$ で決
 まる.

$\pi_1^{orb} S \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \Leftrightarrow S$ の種数 0, $\# \text{cone point} \leq 2$
 でその重複度 $m, n (\geq 1)$ とすると $\text{g.c.d.}(m, n) = d$.

Donaldson [1] Morgan Friedman によると, euler 数
 12 で (上記の $g=1$) で 底曲面 S が back cone point
 の重複度 m, n に対して, $m, n \geq 2$, $\text{g.c.d.}(m, n) = 1$
 のもの (Dolgachev surface と呼ばれる class) は
 S の orbifold type が異なると diffeo でなく. さらに
 $m=n=1$ (即ち多重ファイバーがない) の case のもの
 とも diffeo でない. 即ち, 上記の記号によれば,
 $L(m, n)V_{0,0} \not\cong V_{0,0}$. Freedman の分類理論か
 ら, $L(m, n)V_{0,0}$ と $V_{0,0}$ は同相であることが知られる.
 一方 $V_{0,0}$ は $\mathbb{C}P^2 \# 9\overline{\mathbb{C}P^2}$ に diffeo なの. $\mathbb{C}P^2 \# 9\overline{\mathbb{C}P^2}$
 に無限個の微分構造が入ることになる. (但し, $L(m, 1)V_{0,0}$
 $= L(m)V_{0,0}$ は $V_{0,0}$ に diffeo). よって上記に述べた定
 理は彼らの例の complement であり, 基本群 (S の type)
 が十分複雑なる exotic な構造をもつ例はない (少なく
 とも 4 次元曲面の category では) ことを主張するもので
 ある. (2) の残りの case については不明だが, 上記
 の Donaldson type の議論がますます必要となると
 思われる.

§2. 特殊ファイバーが多重トーラスの場合

これは $\text{euler 数} = 0$ と同値. これらの case は.

4次元の "Seifert fibering" とみなせ. より直接的に
3次元の Seifert fibering の類似物である. そこで
3次元の case に成立つ事実が parallel に成りたっ
ていると期待することは不自然ではないであろう.
そして実際この場合は次のことが成立つ. (§1の定
理に対応するものとして)

定理': $\pi: M \rightarrow S, \pi': M' \rightarrow S'$. 上記の
条件を満たす積同曲面 (Seifert fibering) とする.
 S が "euclidean or hyperbolic (as orbifold)" と
仮定すると. M と M' が diffeo $\Leftrightarrow \pi_1 M \cong \pi_1 M'$.

この定理'は S, S' が hyperbolic な Zieschang [6]
 $S = S' = T^2$ (即ち M, M' が T^2 上の T^2 -bundle) の
ときは 坂本-福原 [4] により示されている.

$M, (M')$ の diffeo type は 3次元 Seifert fibering と同様の Seifert invariants によって記述される。即ち、底曲面の種数、蓋曲面の essential curve system に対するファイバーのモジュール、多重ファイバーの meridian の attaching を示す Triad、及び cross section を拡張するための降着である。そこで定理'を示すためにまず $\pi_1 M \cong \pi_1 M'$ を仮定したとき、各の Seifert invariant が一致するようにできる、(Seifert invariant には curve のとり方に伴う ambiguity がある) どうかを考察する。そのために底曲面の orbifold type を便宜上次の4つに分ける。

(H-1) hyperbolic, genus > 0 . (H-2) hyperbolic genus $= 0$

(E-1) T^2 (E-2) euclidean genus $= 0$.

そして π_1 に次を示す。

主張.1. S, S' が上記の同じ class に属するとき

$$M \cong M'$$

(本質的には Zieschang 及本福原により示、ユカテいる)

そして次に N, S' が異なる class に属する場合を考察する。

主張 2. 上記のとおり、7つの case を除いて $\pi_1 M$ と $\pi_1 M'$ は同型にならない。除外される 7つの case はいずれも $N = T^2$ 、 S' は 種類 0 の euclidean orbifold で M と M' は diffeo (当然 fiber を保たない) である。

このことから定理を導く。Zieschang は S, S' ともに hyperbolic のとき、regular fiber が生成する $\pi_1 M$ ($\pi_1 M'$) の部分群が maximal normal abelian subgroup of rank 2 として唯一のものであることを (従って characteristic subgroup であることを) を示して、主張 1 を証明した。この論法は euclidean orbifold をも許容すると成立しなくなる。このことにより T^2 上の T^2 -bundle の場合独立な議論を必要とさせ [4]。上記主張 2 の中の例外を生じさせる。例外の 7つの case はいずれも、 M は自然に S' 上の T^3 -bundle で

モ/ドローミーが有限位数なるものの構造をもつ。そ
して、 $M(M')$ とともに euclidean structure を許
容する。(即ち $\mathbb{E}^4/G$, G は $\text{Isom}^+ \mathbb{E}^4$ の discrete
torsion free subgroup と書ける)。その中の4つ
は $N' \times (N'$ 上の T^2 -bundle で "モ/ドローミーが有
限位数) という形をしている。

定理' で除外した case (即ち底曲面が bad 又は
spherical) は homotopy type の性質も定理' の case
と異なる。特に regular fiber の生成する $\pi_1 M$ の
subgroup, $\pi_1 M$ が rank 2 であるので定理' の証
明はそのままで通用しない。従って残る問題は、
底曲面が bad 又は spherical のとき M を分類する
ことである。これらの case の基本群はこれまで扱
った例の基本群と一致することはない。いづかにせ
よ base orbifold が十分複雑ならば (I) の場合と同
様 exotic なものは存在しない。この点は 3次元の
Seifert fibering の場合の事実に対応しているとい
てよい。

参考文献

- [1] Donaldson, S. K. The differential topology of complex surfaces, preprint 1985
- [2] Matsumoto, Y. Diffeomorphism types of elliptic surfaces. preprint '85
- [3] Moishezon, B. Complex Surfaces and connected sums of complex projective planes. Springer Lect Note 603, '77
- [4] Sakamoto-Fukuhara. Classification of T^2 -bundles over T^2 . Tokyo J Math 6 No. 2 '83
- [5] Ue, M. On the diffeomorphism types of elliptic surfaces with multiple fibers. preprint, 1985
- [6] Zieschang, H. On toric fiberings over surfaces. Math Notes 5, 1969