

Burgers 乱流の漸近的性質

京大 数理解 木田 重雄

§1. 要旨

Burgers 方程式に従う速度場は、Reynolds 数及び時間が充分大きい極限においては、三角衝撃波の列で表わされる。この極限における Burgers 乱流の漸近的性質と Burgers 方程式の厳密解を用いて解析する。衝撃波の強さ・速さ及び二個の衝撃波間の距離の確率分布を求め、それを用いて、速度相関及びエネルギースペクトルを計算する。その結果、乱流の漸近的性質は、速度相関関数の積分距離 J が零であるかどうかによって定性的に異なる事が分る。特に、単位長当りの乱流エネルギー ε は、 $J = 0$ の時は $\varepsilon \propto t^{-1}$ 、 $J \neq 0$ の時は $\varepsilon \propto t^{-2/3}$ である。

§2. Burgers方程式の解

Burgers方程式は無次元形で次の様に表わされる:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2.1)$$

ここで、 $u(x, t)$ は速度、 x は空間座標、 t は時間、 $R = U_0 l_0 / \nu$ は初期速度場の代表速度 U_0 、代表長さ l_0 及び動粘性係数 ν から作った Reynolds 数である。

(2.1) の解のアニサンブルの $R \gg t \gg 1$ における統計的な振舞を考へる。任意の初期条件 $u(x, 0)$ に対する解は

$$u(x, t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-x'}{t} \exp\left[-\frac{R}{2}\left\{\frac{(x-x')^2}{2t} + \int_0^{x'} u(x'', 0) dx''\right\}\right] dx'}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{R}{2}\left\{\frac{(x-x')^2}{2t} + \int_0^{x'} u(x'', 0) dx''\right\}\right] dx'} \quad (2.2)$$

と表わされる (Hopf 1950; Cole 1951)。(2.2)は

$R \gg t \gg 1$ では、三角衝撃波と表わす事が知られている (Tatsumi & Kida 1972; Burgers 1974)。即ち

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{x - \xi_i}{t} & \left(\frac{\xi_{i-1} + \xi_i}{2} < x < \xi_i \right) \\ \frac{x - \xi_{i+1}}{t} & \left(\xi_i < x < \frac{\xi_i + \xi_{i+1}}{2} \right) \end{cases} \quad (2.3)$$

となる (図1の下图参照)。

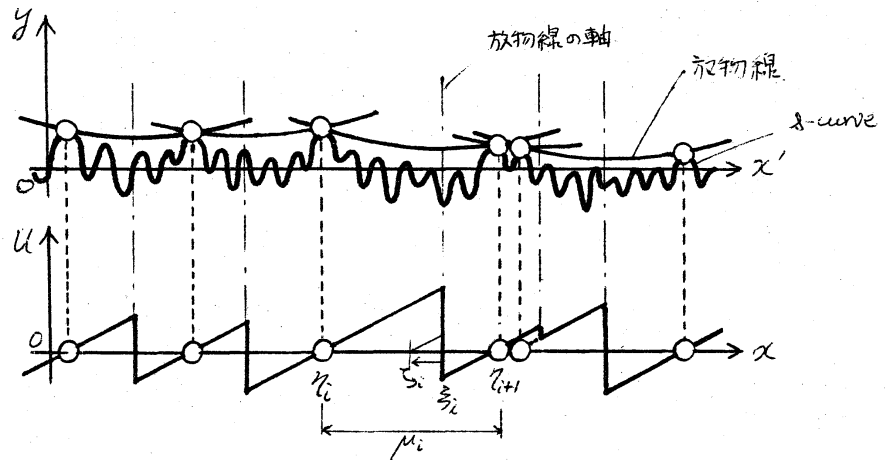


図 1. s -curve と二点で接する放物線の列と対応する速度場

(2.3) は点 ξ_i における強さ

$$\frac{\mu_i}{t} = \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{t} \quad (2.4)$$

の衝撃波を表わしている。又、この衝撃波は

$$\frac{\xi_i}{t} = \frac{\xi_i - \frac{\eta_{i+1} + \eta_i}{2}}{t} \quad (2.5)$$

なる速さで移動することになり容易に分る。

初期速度の不定積分

$$y = s(x') = - \int_0^{x'} u(x'', 0) dx'' \quad (2.6)$$

と、それに二点で接する放物線

$$y = \frac{(x' - x)^2}{2t} + C \quad (2.7)$$

(C は適当な定数) の列を考える (図 1 の上図参照)。

$t \gg 1$ の時、接点は α -curve の頂点に来る。この時、各放物線の軸が衝撃波の位置と、隣合う二接点の x 座標の差が衝撃波の強さを表わす。以下では、 α -curve をランダムに与えて、衝撃波の強さ・速さ等の確率分布を求める。

§3. 初期条件

速度場は統計的に一様且つ等方とする。また異った二点の速度の確率分布はその相対距離の増加と共に充分速く独立になり、速度相関関数

$$B(r, t) = \langle u(x, t) u(x+r, t) \rangle \quad (3.1)$$

は $r \rightarrow \infty$ で r の任意の逆冪よりも速く零に近づくものとする。

§2 で述べた様に、速度場は $R \gg t \gg 1$ では三角衝撃波の列で表わされる。衝撃波の数は衝突によって減少するので速度場の特性長——例えば隣合う衝撃波間の平均距離を表わす——は時間的に単調に増加する。今は $t \gg 1$ の状態を考えているので放物線の特性長は α -curve の特性長に比べてずっと長い。従って α -curve の特性長よりは充分長く、放物線の特性長よりは充分短かいある長さ (Δx とする) が存在する。

δu の一次及び二次エーメントは.

$$\langle \delta u \rangle = 0 \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \langle \delta u^2 \rangle &= \int_0^x dx' \int_0^x dx'' \langle u(x', 0) u(x'', 0) \rangle \\ &= 2 \int_0^x (x-r) B(r, 0) dr \end{aligned} \quad (3.3)$$

である。 $x \rightarrow \infty$ では、(3.3) は漸近的に

$$\langle \delta u^2 \rangle \approx \begin{cases} -2 \int_0^\infty r B(r, 0) dr \sim O(1) & (J=0; \text{Case I}) \quad (3.4) \\ 2Jx \sim O(x) & (J \neq 0; \text{Case II}) \quad (3.5) \end{cases}$$

但し.

$$J = \int_0^\infty B(r, t) dr = \int_0^\infty B(r, 0) dr \quad (3.6)$$

と表わされる。

Case II ($J \neq 0$) は Burgers (1974) によって詳しく論ぜられた。彼は高次エーメント $\langle \delta u \rangle^n$, $n = 3, 4, \dots$ と計算し、 δ -curve が x 軸に沿う Wiener 過程で与えられる事を見出した。 J が運動の恒量である事と次元解析を用いてエネルギー減衰則を導いた。又、衝撃波の強さ、速度の確率分布関

数を積分を含む形で求め、その低次のモーメントを計算した。しかしながら、その確率分布関数の表現は極めて複雑で具体的に形を示す事はできなかった。§3.2 では、この場合を取扱い、これらの関数を数値的に求める事にする。

この拙論では Case I ($J=0$) を主に取扱う。Jとは違って $\int_0^\infty r B(r, t) dr$ が運動の恒量である理由は何もない。ここではこれが時間的に変化するものと仮定する。時間の原点を適当に選べ (3.4) が零でないとすることができる。全てのモーメント $\langle \delta(x)^n \rangle$, $n=1, 2, 3, \dots$ が $x \rightarrow 0$ で有限の値をとるので、 δ -curve と x 軸に沿う 定常 確率過程とみなす事ができる。

§4. 一個の衝撃波に関する確率分布

$t \gg 1$ の時、 δ -curve と放物線の接点は δ -curve の頂点に来るので、隣合う放物線は δ -curve の頂点で繋がっていると見る事ができる (図1)。

x 軸を区間 $I_m = (x_m - \frac{\Delta x}{2}, x_m + \frac{\Delta x}{2}]$ に分ける。ここに

$$x_m = m \Delta x, \quad m \text{ は 整数} \quad (4.1)$$

で、 Δx は前章に述べた特性長である。区間 I_m における

λ -curveの頂点のうち最高のものの y 座標を y_m とし、 I_m における接点の代表座標を (x_m, y_m) とする。この近似は考えている速度場の特性長が Δx よりずっと長いから適当である。この時 λ -curveのアンサンブルの統計的性質は y_m の確率分布によって決定される。一方 Δx は λ -curveの特性長よりずっと長いから異なった区間 I_m における y_m の確率分布は互に独立である。従って接点の列を x 軸に沿う独立定常過程とみなす事ができる。

$P(y_m)$ を y_m の分布関数とする。規格化条件は

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(y) dy = 1 \quad (4.2)$$

である。点 (x, y) の回りの面要素 $dx dy$ 内に存在する接点の列の代表点の個数は

$$\frac{1}{\Delta x} P(y) dx dy \quad (4.3)$$

である。放物線の方程式と

$$y = \frac{(x-p)^2}{2t} + \xi \quad (4.4)$$

とすれば、この放物線上の点 (x_{m1}, y_{m1}) , (x_{m2}, y_{m2}) の回りの面要素 $dx_{m1} dy_{m1}$, $dx_{m2} dy_{m2}$ を通り、放物線と横切らない接点の列の数は

$$\frac{1}{(\Delta\lambda)^2} \prod_{j=1}^2 P(y_{mj}) dx_{mj} dy_{mj} \prod_{i=1, m_1, m_2} \{1 - F(y_i)\} \quad (4.5)$$

但し、

$$y_i = \frac{(x_i - p)^2}{2\pi} + g \quad (4.6)$$

$$F(y) = \int_y^\infty P(y') dy' \quad (4.7)$$

である(図2参照)。対応する衝撃波は図2の下図に示してある。

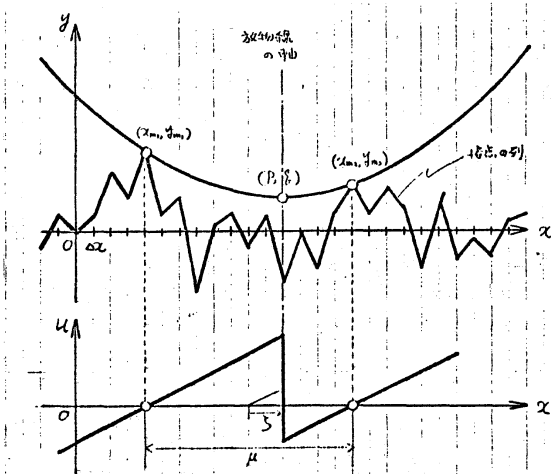


図2. 一個の衝撃波を惹起する接点の列

衝撃波の強 μ/t , 速 ζ/t は (2.4) - (2.6) と参照すれば

$$\frac{\mu}{t} = \frac{x_{m_2} - x_{m_1}}{t} \quad (4.8)$$

$$\frac{\zeta}{t} = - \frac{y_{m_2} - y_{m_1}}{x_{m_2} - x_{m_1}} \quad (4.9)$$

とる事が分る。放物線の頂点 (P, ξ) は

$$P = x_{m_1} + \xi + \frac{\mu}{2} \quad (4.10)$$

$$\xi = y_{m_1} - \frac{1}{2t} \left(\xi + \frac{\mu}{2} \right)^2 \quad (4.11)$$

と書ける。(4.5)の独立変数を(4.8)-(4.11)を用いて、 μ, ξ に書き換えると、 x の単位長当りに強さが μ/t と $(\mu+d\mu)/t$ の間であり、速度が ξ/t と $(\xi+d\xi)/t$ の間にある衝撃波の個数密度が得られる:

$$n(\mu, \xi; t) d\mu d\xi = \frac{d\mu d\xi}{(\Delta x)^2} \frac{\mu}{t} \int_{-\infty}^{\infty} P(y_{m_1}) P(y_{m_1} - \frac{\mu\xi}{t}) \prod_{i=m_1, m_2} \{1 - F(y_i)\} dy_{m_1}. \quad (4.12)$$

$t \gg 1$ の時には $\prod_{i=m_1, m_2} \{1 - F(y_i)\}$ を積分で近似できるから、

(4.12) は

$$n(\mu, \xi; t) = \frac{1}{(\Delta x)^2} \frac{\mu}{t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(y)}{1 - F(y)} \frac{P(y - \frac{\mu\xi}{t})}{1 - F(y - \frac{\mu\xi}{t})} \times \\ \times \exp \left[\frac{\sqrt{2t}}{\Delta x} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \{1 - F(x^2 + y)\} dx \right] dy \quad (4.13)$$

但し

$$\xi = y - \frac{1}{2t} \left(\xi + \frac{\mu}{2} \right)^2 \quad (4.14)$$

となる。ところで(4.13)の被積分関数は $t \gg 1$ では、 $P(y)$ の標準偏差 $\sqrt{\langle y^2 \rangle}$ よりもずっと大きい点 ($y = \bar{y}$ とする) で、

極大値を持つ。この事は、 $P(y)$ が $y \rightarrow \infty$ で代数的又は指数的に減少する場合には容易に証明する事ができる。

$P(y)$ が指数的に減少する場合には、その極大は局所的で、(4.13)の積分は鞍点法を用いて計算できる。ここではこの場合を考える。^{*} $P(y)$ の漸近形を

$$P(y) \approx A y^{\alpha} \exp[-B y^{\beta}] \quad (y \gg \sqrt{\langle y^2 \rangle}) \quad (4.15)$$

とする。但し、 A, B, β は正の定数、 α は任意の定数である。詳しい計算の内容は省略するが、衝撃波の強さ・速さの分布として、

$$\tilde{f}(\tilde{\mu}, \tilde{\xi}) = \tilde{f}(\tilde{\mu}) \tilde{h}(\tilde{\xi})^{\dagger} \quad (4.16)$$

但し、

$$\tilde{f}(\tilde{\mu}) = \frac{\pi}{2} \tilde{\mu} \exp\left[-\frac{\pi}{4} \tilde{\mu}^2\right] \quad (4.17)$$

^{*} $P(y)$ が代数的に減少する場合には、その極大は局所的ではなく積分値は $P(y)$ の全体の形に依存し一般性のある結果は得られない。

† § 8.2 と除いて、変数 $\tilde{\mu}, \tilde{\xi}, \tilde{\lambda}, \tilde{\nu}$ は対応する量と $l(t)$ を単位として測ったものと。又、 $\tilde{f}, \tilde{g}_n, \tilde{g}_s, \tilde{g}, \tilde{h}$ はこれらの関数を表わす。

$$\tilde{h}(\tilde{\zeta}) = \exp[-\pi \tilde{\zeta}^2] \quad (4.18)$$

が得られる。ここに

$$\tilde{\mu} = \frac{\mu}{l(t)}, \quad \tilde{\zeta} = \frac{\zeta}{l(t)} \quad (4.19)$$

$$l(t) \approx \left(\frac{\pi t}{B^{1/2} \beta} \right)^{1/2} \left[\ln \left\{ \frac{A}{\Delta x} \left(\frac{\pi t}{2} \right)^{1/2} \beta^{-3/2} B^{-\frac{2\alpha+3}{2\beta}} \right\} \right]^{\frac{1-\beta}{2\beta}} \quad (4.20)$$

であり、 $\tilde{f}(\tilde{\mu})$, $\tilde{h}(\tilde{\zeta})$ はそれぞれ一個の衝撃波の強さ、速さの確率密度、 $\tilde{f}(\tilde{\mu}, \tilde{\zeta})$ はその結合確率密度である。これらは図3, 図4に示してある。(4.16) から $\tilde{\mu}$ と $\tilde{\zeta}$ の分布が独立である事が分る。 $l(t)$ は隣合う衝撃波間の距離で $t \rightarrow \infty$ の時

$$l(t) \propto t^{1/2} \quad (4.21)$$

なる漸近形を持っている。

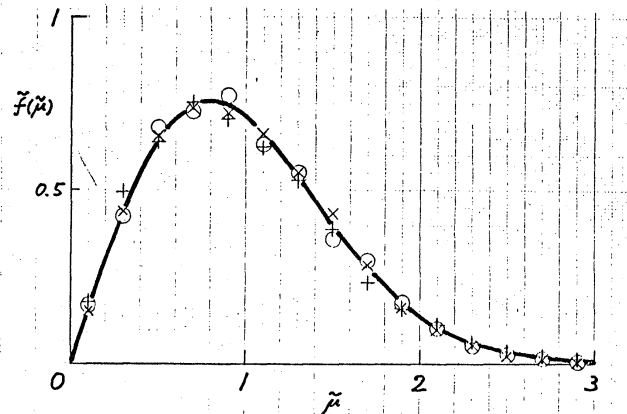


図3. Case Iにおける衝撃波の強さの確率分布。+, o, xはそれぞれ8.1の実験(i), (ii), (iii)の結果である。

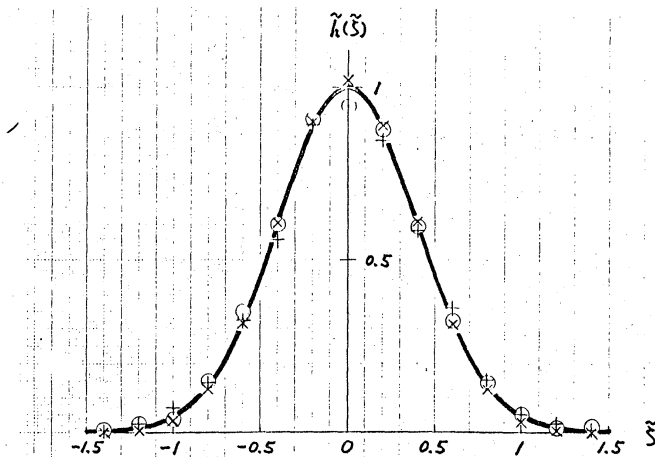


図4. Case Iにおける衝撃波の速さの確率分布

(4.16) に関する $\tilde{\mu}$, $\tilde{\xi}$ のモーメントは

$$\begin{aligned}
 \langle \tilde{\mu}^m \tilde{\xi}^n \rangle &= \langle \tilde{\mu}^m \rangle \langle \tilde{\xi}^n \rangle \\
 &= \begin{cases} \frac{2^m}{\pi^{(m+n+1)/2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right) \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) & (n: \text{偶数}) \\ 0 & (n: \text{奇数}) \end{cases} \quad (4.22)
 \end{aligned}$$

となる。

§5. 隣合った二個の衝撃波に関する結合確率分布

速度相関あるいはエネルギースペクトルを計算するためには、二個の衝撃波の結合確率分布を知る必要がある。この章では隣合った二個の衝撃波の結合確率分布と、次の章では間に他の衝撃波が存在する離れた二個の衝撃波の結合確率分布

を調べる。

隣合った二個の衝撃波は隣合った二個の放物線の交点を通り、それぞれ放物線ととう一度接し、それらの放物線を横切らない接点の列で表わされる(図5参照)。

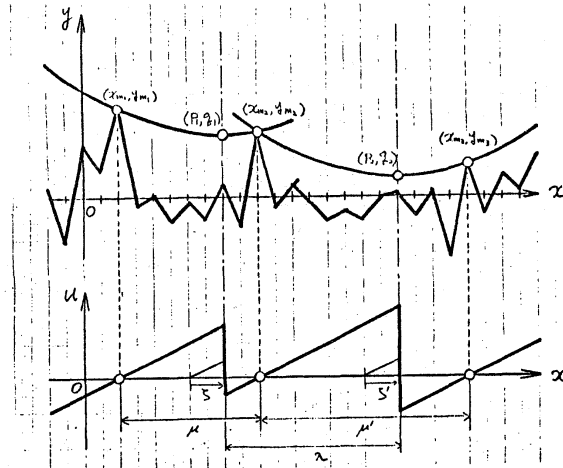


図5. 隣合った二個の衝撃波を表わす接点の列
二個の放物線の方程式と

$$y = \frac{(x-P_1)^2}{2t} + q_1 \quad (5.1)$$

$$y = \frac{(x-P_2)^2}{2t} + q_2 \quad (5.2)$$

但し、 $P_1 < P_2$ とし、その交点の座標を (x_{m2}, y_{m2}) とする。
左の放物線上の点 (x_{m1}, y_{m1}) の回りの面要素 $dx_{m1} dy_{m1}$ 、交点 (x_{m2}, y_{m2}) の回りの面要素 $dx_{m2} dy_{m2}$ 、右の放物線上の点 (x_{m3}, y_{m3}) の回りの面要素 $dx_{m3} dy_{m3}$ と通り、その他では常にこれらの放物線の下にある接点の列の個数は、

$$\frac{1}{(\Delta x)^3} \prod_{j=1}^3 p(y_{m_j}) dx_{m_j} dy_{m_j} \prod_{i \neq m_1, m_2, m_3} \{1 - F(y_i)\} \quad (5.3)$$

但し、

$$y_i = \begin{cases} \frac{1}{2t}(x_i - P_1)^2 + \xi_1 & (x_i \leq x_{m_2}) \\ \frac{1}{2t}(x_i - P_2)^2 + \xi_2 & (x_i > x_{m_2}) \end{cases} \quad (5.4)$$

である。\$P_1, P_2\$ にある衝撃波とそれぞれ \$(\mu, \zeta)^*\$, \$(\mu', \zeta')\$ とする。(4.8) - (4.11) から

$$\mu = x_{m_2} - x_{m_1}, \quad \mu' = x_{m_3} - x_{m_2} \quad (5.5)$$

$$\frac{\mu \zeta}{t} = y_{m_1} - y_{m_2}, \quad \frac{\mu' \zeta'}{t} = y_{m_2} - y_{m_3} \quad (5.6)$$

$$P_1 = x_{m_2} + \zeta - \frac{\mu}{2}, \quad P_2 = x_{m_2} + \zeta' + \frac{\mu'}{2} \quad (5.7)$$

$$\xi_1 = y_{m_2} - \frac{1}{2t}(\zeta - \frac{\mu}{2})^2, \quad \xi_2 = y_{m_2} - \frac{1}{2t}(\zeta' + \frac{\mu'}{2})^2 \quad (5.8)$$

が分る。二個の衝撃波間の距離は

$$\lambda = P_2 - P_1 = \zeta' - \zeta + \frac{\mu + \mu'}{2} > c \quad (5.9)$$

である。(5.5) - (5.8) を用いて、(5.3) を \$\mu, \mu', \zeta, \zeta'\$ で書き換え、前章と同様な計算を行うと、隣合った二個の衝撃波の結合確率分布が得られる。

* 記号 \$(\mu, \zeta)\$ は強さ \$\mu/t\$, 速さ \$\zeta/t\$ の衝撃波を表わす。

$$\tilde{g}_a(\tilde{\mu}, \tilde{\xi}; \tilde{\mu}', \tilde{\xi}') = \begin{cases} \frac{\pi^{7/2}}{2^{1/2}} \frac{\tilde{\mu}\tilde{\mu}' \exp\{-\pi(\tilde{\mu}\tilde{\xi} - \tilde{\mu}'\tilde{\xi}')\}}{\{\phi(\tilde{\mu} - 2\tilde{\xi}) + \phi(\tilde{\mu}' + 2\tilde{\xi}')\}^3} & (\tilde{\xi}' - \tilde{\xi} + \frac{\tilde{\mu} + \tilde{\mu}'}{2} > 0) \\ 0 & (\tilde{\xi}' - \tilde{\xi} + \frac{\tilde{\mu} + \tilde{\mu}'}{2} < 0) \end{cases} \quad (5.10)$$

但し、

$$\phi(x) = \int_0^\infty \exp[-y^2 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} xy] dy \quad (5.11)$$

である。

(5.10) と衝撃波間の距離

$$\tilde{\chi} = \tilde{\xi}' - \tilde{\xi} + \frac{\tilde{\mu} + \tilde{\mu}'}{2} \quad (5.12)$$

が一定という条件のもとで、 $\tilde{\xi}$, $\tilde{\xi}'$ について積分すると、距離 $\tilde{\chi}$ だけ離れた強さ $\tilde{\mu}/t$, $\tilde{\mu}'/t$ の隣合った二個の衝撃波の結合確率分布が得られる:

$$\tilde{g}_a(\tilde{\chi}; \tilde{\mu}, \tilde{\mu}') = \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\xi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\xi}' \tilde{g}_a(\tilde{\mu}, \tilde{\xi}; \tilde{\mu}', \tilde{\xi}') \delta(\tilde{\chi} - \tilde{\xi}' + \tilde{\xi} - \frac{\tilde{\mu} + \tilde{\mu}'}{2}) \quad (5.13)$$

(5.13) とさらに $\tilde{\mu}$, $\tilde{\mu}'$ について積分すると隣合った二個の衝撃波間の距離の分布が得られる:

$$\tilde{g}_a(\tilde{\chi}) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{d^2}{d\tilde{\chi}^2} \int_0^\infty \frac{dz}{\phi(\tilde{\chi} + z) + \phi(\tilde{\chi} - z)} \quad (5.14)$$

これは次の様な漸近形を持っている:

$$\tilde{g}_a(\tilde{\lambda}) \approx \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \approx 0.685 \quad (\tilde{\lambda} \rightarrow 0) \quad (5.15)$$

$$\tilde{g}_a(\tilde{\lambda}) \approx \frac{\sqrt{2}\pi^2}{32} \tilde{\lambda} \exp\left[-\frac{\pi}{8}\tilde{\lambda}^2\right] \quad (\tilde{\lambda} \rightarrow \infty) \quad (5.16)$$

分布関数 $\tilde{g}_a(\tilde{\lambda})$ とその漸近形を図6に示してある。

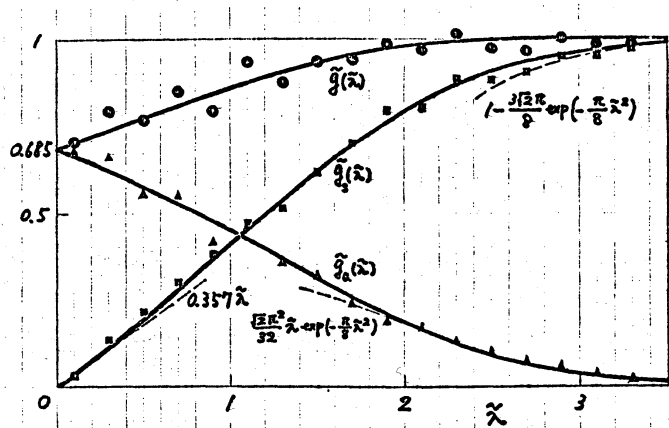


図6. Case I における隣合った衝撃波間の距離の確率分布。▲, ■, ●はそれぞれ実験(ii)における分布 $\tilde{g}_a(\tilde{\lambda})$, $\tilde{g}_s(\tilde{\lambda})$, $\tilde{g}_t(\tilde{\lambda})$ を表わす。

§6. 離れた二個の衝撃波に関する結合確率分布。

離れた二個の衝撃波は、二個の放物線の右右と二回接し、それらを横切らない接点の列で表わされる(図7参照)。二個の放物線を(5.1), (5.2)で表わし、その交点のx座標をxとする。左の放物線上の二点 (x_{m1}, y_{m1}) , (x_{m2}, y_{m2}) の回り

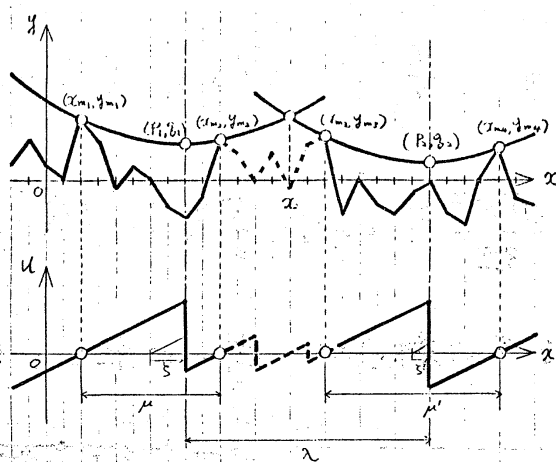


図7. 離れた二個の衝撃波を表わす接点の列

の面要素 $dx_{m_1} dy_{m_1}$, $dx_{m_2} dy_{m_2}$, 右の放物線上の二点 (x_{m_3}, y_{m_3}) , (x_{m_4}, y_{m_4}) の回りの面要素 $dx_{m_3} dy_{m_3}$, $dx_{m_4} dy_{m_4}$ を通り ($x_{m_1} < x_{m_2} < x_{m_3} < x_{m_4}$ とする), この二個の放物線を横切らぬい接点の列の個数は

$$\frac{1}{(\Delta x)^4} \prod_{j=1}^4 P(y_{m_j}) dx_{m_j} dy_{m_j} \prod_{\substack{i \neq m_1, m_2, \\ m_3, m_4}} \{1 - F(y_i)\} \quad (6.1)$$

但 L.

$$y_i = \begin{cases} \frac{1}{2t} (x_i - p_1)^2 + g_1 & (x_i \leq x) \\ \frac{1}{2t} (x_i - p_2)^2 + g_2 & (x_i > x) \end{cases} \quad (6.2)$$

である。 P_1, P_2 による衝撃波を $(\mu, \zeta), (\mu', \zeta')$ とすると、次の関係がある。

$$\mu^l = x_{m_2} - x_{m_1}, \quad \mu' = x_{m_4} - x_{m_3}, \quad (6.3)$$

$$\frac{\mu \zeta}{t} = y_{m_1} - y_{m_2},$$

$$\frac{\mu' \zeta'}{t} = y_{m_3} - y_{m_4} \quad (6.4)$$

$$P_1 = x_{m_2} + \zeta - \frac{\mu}{2},$$

$$P_2 = x_{m_3} + \zeta' + \frac{\mu'}{2} \quad (6.5)$$

$$Q_1 = y_{m_2} - \frac{1}{2t} \left(\zeta - \frac{\mu}{2} \right)^2,$$

$$Q_2 = y_{m_3} - \frac{1}{2t} \left(\zeta' + \frac{\mu'}{2} \right)^2 \quad (6.6)$$

$$\alpha = \frac{P_1 + P_2}{2} + \frac{Q_2 - Q_1}{P_2 - P_1} t. \quad (6.7)$$

二個の衝撃波間の距離は

$$\lambda = P_2 - P_1 = x_{m_3} - x_{m_2} + \zeta' - \zeta + \frac{\mu + \mu'}{2} \quad (6.8)$$

である。(6.3) - (6.8) を用いて (6.1) の変数を x_{m_j} , y_{m_j} ,

$j = 1, 2, 3, 4$ から $\lambda, \mu, \zeta, \mu', \zeta', Q_1, Q_2$,

α に変換し、前と同様に積分と計算すると、相対距離 (λ)

の離れた二個の衝撃波 $(\tilde{\mu}, \tilde{\zeta}), (\tilde{\mu}', \tilde{\zeta}')$ の結合確率分布が得

られる:

$$\tilde{q}_3(\tilde{\lambda}; \tilde{\mu}, \tilde{\zeta}; \tilde{\mu}', \tilde{\zeta}') = \begin{cases} \frac{3\pi^5}{2} \tilde{\lambda} \tilde{\mu} \tilde{\mu}' \exp \left\{ -\pi \left(\frac{\tilde{\mu}^2}{4} + \frac{\tilde{\mu}'^2}{4} + \tilde{\zeta}^2 + \tilde{\zeta}'^2 - \frac{\tilde{\lambda}^2}{2} \right) \right\} \times \\ \times \int_{-\frac{\tilde{\lambda}}{2} - \tilde{\zeta} + \frac{\tilde{\mu}}{2}}^{\frac{\tilde{\lambda}}{2} - \tilde{\zeta}' - \frac{\tilde{\mu}'}{2}} \frac{\exp \{ 2\pi s^2 \}}{\{ \phi(\tilde{\lambda} + 2s) + \phi(\tilde{\lambda} - 2s) \}^4} ds \left(\tilde{\lambda} > \tilde{\zeta}' - \tilde{\zeta} + \frac{\tilde{\mu} + \tilde{\mu}'}{2} \right) \\ 0. \quad \left(\tilde{\lambda} < \tilde{\zeta}' - \tilde{\zeta} + \frac{\tilde{\mu} + \tilde{\mu}'}{2} \right) \end{cases} \quad (6.9)$$

これは $\tilde{\lambda} \rightarrow \infty$ で次の様な漸近形をもっている:

$$\tilde{g}_s(\tilde{\lambda}; \tilde{\mu}, \tilde{\xi}; \tilde{\mu}', \tilde{\xi}') \approx \tilde{f}(\tilde{\mu}, \tilde{\xi}) \tilde{f}(\tilde{\mu}', \tilde{\xi}'). \quad (6.10)$$

この誤差は指数的に小さい。これは、任意の二つの衝撃波の分布がその相対距離の増大と共に速かに独立になって行く事を示している。

(6.9) を $\tilde{\xi}$ と $\tilde{\xi}'$ について領域 $(-\infty, \infty)$ で積分すれば、相対距離 $l(t)\tilde{\lambda}$ で強さ $l(t)\tilde{\mu}/\lambda$, $l(t)\tilde{\mu}'/\lambda$ の離れた二つの衝撃波の分布が得られる:

$$\tilde{g}_s(\tilde{\lambda}; \tilde{\mu}, \tilde{\mu}') = \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\xi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\xi}' \tilde{g}_s(\tilde{\lambda}; \tilde{\mu}, \tilde{\xi}; \tilde{\mu}', \tilde{\xi}'). \quad (6.11)$$

(6.11) をさらに $\tilde{\mu}$ と $\tilde{\mu}'$ について区間 $[0, \infty)$ で積分すれば、強さ、速さは問わないで、相対距離 $l(t)\tilde{\lambda}$ の離れた二つの衝撃波の存在確率を得る:

$$\tilde{g}_s(\tilde{\lambda}) = \int_0^{\infty} d\tilde{\mu} \int_0^{\infty} d\tilde{\mu}' \tilde{g}_s(\tilde{\lambda}; \tilde{\mu}, \tilde{\mu}') \quad (6.12)$$

(6.9) と (6.11) と (6.12) に代入すれば

$$\tilde{g}_s(\tilde{\lambda}) = 3\pi^2 \tilde{\lambda} \int_0^{\infty} \frac{\{\sqrt{2}\phi(\sqrt{2}(\tilde{\lambda}+s)) - \phi(\tilde{\lambda}+s)\} \{\sqrt{2}\phi(\sqrt{2}(\tilde{\lambda}-s)) - \phi(\tilde{\lambda}-s)\}}{\{\phi(\tilde{\lambda}+s) + \phi(\tilde{\lambda}-s)\}^4} ds \quad (6.13)$$

となる。この分布関数は次の様な漸近形を持っている:

$$\tilde{g}_0(\tilde{\lambda}) \approx 0.357 \tilde{\lambda}, \quad (\tilde{\lambda} \rightarrow 0) \quad (6.14)$$

$$\tilde{g}_0(\tilde{\lambda}) \approx 1 - \frac{3\sqrt{2}\pi}{8} \exp\left(-\frac{\pi\tilde{\lambda}^2}{8}\right), \quad (\tilde{\lambda} \rightarrow \infty) \quad (6.15)$$

(5.14) と (6.13) と加えると, $\lambda(t)\tilde{\lambda}$ だけ離れた任意の二個の衝撃波の存在確率が得られる:

$$\tilde{g}(\tilde{\lambda}) = \tilde{g}_a(\tilde{\lambda}) + \tilde{g}_0(\tilde{\lambda}). \quad (6.16)$$

図 6 に分布関数 (6.13), (6.16) とその漸近形と共に示してある。小さい $\tilde{\lambda}$ に対する $\tilde{g}(\tilde{\lambda})$ の値は大きい $\tilde{\lambda}$ に対する値よりも小さい事が分る。これは、近くにある二個の衝撃波が衝突によって融合する事を反映している。

§7. 速度相関とエネルギースペクトル

距離 r だけ離れた任意の二個の衝撃波の強さの結合確率分布 $g(r, \mu, \mu', t)$ を用いて (3.1) で定義した速度相関 $B(r, t)$ を計算する事ができる。§2 で述べた様に $R \gg t \gg 1$ では速度場は三角衝撃波の列として表わされ速度の空間分布 $u(x, t)$ は衝撃波の所で $-(\mu/t)\delta(x-\xi)$, 但し ξ , μ/t はそれぞれ衝撃波の位置, 強さである, 又, 斜線部では $1/t$ である。従って

$$\langle (u'(x,t) - \frac{1}{t})(u'(x+c,t) - \frac{1}{t}) \rangle = \frac{1}{t^2 l(t)} \int_0^\infty d\mu \int_0^\infty d\mu' \mu \mu' g(r; \mu, \mu'; t) \quad (7.1)$$

となる。境界条件

$$\tilde{B}(\tilde{r}) = \frac{d}{d\tilde{r}} \tilde{B}(\tilde{r}) = 0 \quad (\tilde{r} \rightarrow \infty) \quad (7.2)$$

を考慮すると、(7.1)から

$$\tilde{B}(\tilde{r}) = \int_{\tilde{r}}^\infty (\tilde{r}' - \tilde{r}) \left\{ 1 - \frac{1}{\langle \tilde{\mu} \rangle} \int_0^\infty d\tilde{\mu} \int_0^\infty d\tilde{\mu}' \tilde{\mu} \tilde{\mu}' g(\tilde{r}'; \tilde{\mu}, \tilde{\mu}') \right\} d\tilde{r}' \quad (7.3)$$

を得る。但し

$$\tilde{B}(\tilde{r}) = \left(\frac{t}{l(t)} \right)^2 B(ct)^* \quad (7.4)$$

と規格化してある。

(7.3) と同等右側の表現が Burgers (1950) によって既に求められている:

$$\begin{aligned} \tilde{B}(\tilde{r}) = \frac{1}{\langle \tilde{\mu} \rangle} \left\{ \langle \tilde{\mu}^2 \rangle + \frac{1}{12} \langle \tilde{\mu}^3 \rangle - \frac{\langle \tilde{\mu}^2 \rangle}{2} \tilde{r} + \frac{\langle \tilde{\mu} \rangle}{2} \tilde{r}^2 - \right. \\ \left. - \int_0^{\tilde{r}} d\tilde{r}' (\tilde{r} - \tilde{r}') \int_0^\infty d\tilde{\mu} \int_0^\infty d\tilde{\mu}' \tilde{\mu} \tilde{\mu}' g(\tilde{r}'; \tilde{\mu}, \tilde{\mu}') \right\} \quad (7.5) \end{aligned}$$

(7.3), (7.5) はそれぞれ大きな $\tilde{r}$ 、小さな $\tilde{r}$ に対する $\tilde{B}(\tilde{r})$

* §8.2 では Burgers (1974) の結果と比較する為に J と t を用いて規格化してある ((8.11) 参照)。

の振舞を調べるのに便利である。

単位長当りの乱流エネルギーを

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \langle u(x,t)^2 \rangle = \frac{1}{2} B(0,t) \quad (7.6)$$

で定義する。(7.4), (7.5), (4.22) を用いると

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\ell(t)}{t} \right)^2 \frac{1}{\langle \tilde{\mu} \rangle} \left(\langle \tilde{\mu}^2 \rangle + \frac{1}{12} \langle \tilde{\mu}^3 \rangle \right) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\ell(t)}{t} \right)^2 \quad (7.7)$$

となる。 $t \gg 1$ に対しては $\ell(t)$ は (4.21) で表わされるので、

$$\mathcal{E}(t) \propto \frac{1}{t} \quad (7.8)$$

となる。これが $J=C$ の場合のエネルギー減衰則である。

速度相関 $\tilde{B}(\tilde{r})$ は (5.10), (5.13), (6.9), (6.11) 等を用いて具体的に計算できて、

$$\tilde{B}(\tilde{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{d\tilde{r}} \tilde{r} \int_0^\infty \frac{ds}{\phi(\tilde{r}+s) + \phi(\tilde{r}-s)} \quad (7.9)$$

となる。これは次の様な漸近形を持っている:

$$\tilde{B}(\tilde{r}) \approx \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} \tilde{r} \quad (\tilde{r} \rightarrow 0) \quad (7.10)$$

$$\tilde{B}(\tilde{r}) \approx -\frac{\sqrt{2}}{8} \tilde{r} \exp\left[-\frac{\pi \tilde{r}^2}{8}\right] \quad (\tilde{r} \rightarrow \infty) \quad (7.11)$$

速度相関 (7.9) とその漸近形は図 8 に示してある。それは

$\tilde{r}=0$ で正の値をとり、最初 $\tilde{r}$ について線型に減少し、やがて負になり、最小値をとり、最後は指数的に零に近づく。

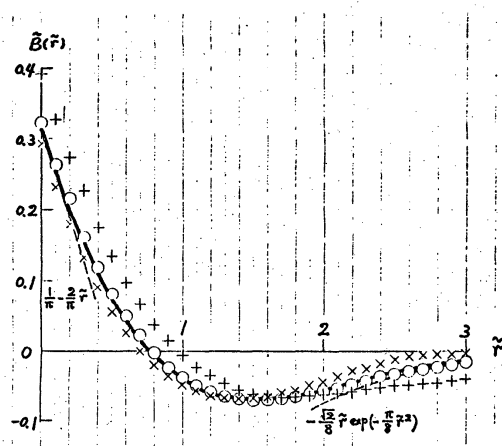


図 8. Case I における速度相関関数

エネルギースペクトルは速度相関のフーリエ変換として定義される。規格化した波数

$$\tilde{k} = l(t) k \quad (7.12)$$

と規格化したエネルギースペクトル

$$\tilde{E}(\tilde{k}) = \frac{t^2}{l(t)^3} E(k, t) \quad (7.13)$$

を用いると

$$E(\tilde{k}) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \tilde{B}(\tilde{r}) \cos \tilde{k} \tilde{r} d\tilde{r} \quad (7.14)$$

である。(7.9) と (7.14) に代入すると、

$$\tilde{E}(\tilde{k}) = \frac{\tilde{k}}{\sqrt{2\pi^3}} \int_0^\infty dr r \sin \tilde{k}r \int_0^\infty \frac{ds}{\phi(r,s) + \phi(r-s)} \quad (7.15)$$

となる。これは

$$\tilde{E}(\tilde{k}) \approx 0.062 \tilde{k}^2 \quad (\tilde{k} \rightarrow 0) \quad (7.16)$$

$$E(\tilde{k}) \approx \frac{2}{\pi^2} \tilde{k}^{-2} \quad (\tilde{k} \rightarrow \infty) \quad (7.17)$$

なる漸近形を持っている。

エネルギースペクトル(7.15)とその漸近形を図9に示してある。エルモゴロフの $k^{-5/3}$ スペクトルは現れない。

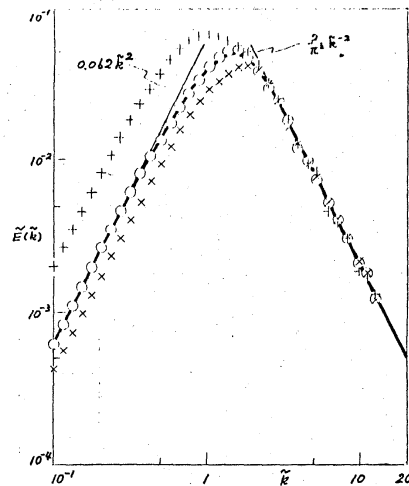


図9. (case I)におけるエネルギースペクトル

§8. 数値実験

前章までに調べた $J=0$ の場合における乱流の漸近的な性

質を確認する為と、Burgers (1974) によって調べられた $J=0$ の場合で具体的に形が明らかではない種々の関数——例えば衝撃波の強さ、速さ、相対距離の分布、速度相関、エネルギースペクトル等——を数値的に求める為に数値実験を行う。 $R \gg t \gg 1$ の状態を考えているから例の ϕ -curve と放物線を用いた速度場の構成方法を用いる事ができる。記述を簡単にする為に今考えている速度場の特性長及び特性時間を長さ及び時間の単位にとる。Case I では $l(1)=1$ とし、又、Case II では Burgers の結果と比較する為に $J=1$ と選ぶ。

8.1 Case I: $J=0$

初期条件として (4.1) の各点に接点の代表点の y 座標を予め定めた確率 $P(y)$ で分布しているランダムな数で独立に与える。次の三種類の実験を行う。

$$(i) \quad P(y) = A \exp(-B|y|^{1/2})$$

$$(ii) \quad P(y) = A \exp(-B|y|)$$

$$(iii) \quad P(y) = A \exp(-By^2).$$

これらは (4.15) の漸近形をもっている。 α は零であるが、 β はそれぞれ $1/2, 1, 2$ である。 A, B の値は (4.2) を満たし且つ $l(1)=1$ となる様に選ぶ。その値は表 1 に示してある。幅 Δx は 0.01 とし、計算を行う領域の広さは $t=1$ で

10,000 個の衝撃波を含む様に決めるが、周期条件は用いていない。計算する時刻は $t = 2^n$, $n = 0, 1, 2, \dots, 10$ である。

実験	$P(y)$	A	B
(i)	$A \exp(-B y ^{1/2})$	$B^2/4$	5.72588
(ii)	$A \exp(-B y)$	$\pi/2$	π
(iii)	$A \exp(-By^2)$	$\sqrt{B/\pi}$	0.975527

表1. 初期条件として与える接点の代表点の y 座標の確率分布

隣合った衝撃波の平均間隔と単位長当りの乱流エネルギーの時間変化とそれぞれ図10と図11に示してある。実験(ii)では解析結果と実験結果は完全に一致しているが実験(i), (iii)では時間依存性は良いが絶対値に多少の誤差がある。

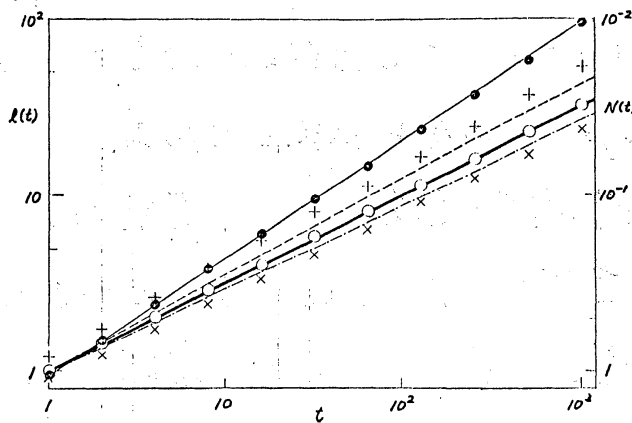


図10. 衝撃波間の平均距離の時間変化。---, —, — は Case I の実験 (i), (ii), (iii) と —, • は Case II の解析実験

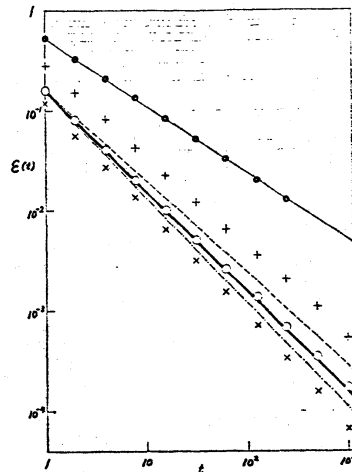


図11. 単位長当りの乱流エネルギーの時間変化

実験から求めた一個の衝撃波の強さ、速さの分布、二個の衝撃波間の距離の分布、速度相関、エネルギースペクトルは時間的に相似である（これは既に解析的に示されている）。即ち長さを $x(t)$ で規格化すると数値的に得られた関数の値は異った時間で互に一致する。従って、以下では $x=1$ におけるデータを代表例として示す。

一個の衝撃波の強さと速さの分布は実験(ii)においては完全に実験(i), (iii)においては近似的に独立である。図3、図4にはそれぞれ $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ の分布が示してある。

二個の衝撃波間の距離の分布は実験(ii)については図6に示してある。実験データには多少のゆらぎはあるが解析結果との一致は極めて良い。ここには省略するが実験(i), (iii)では大きい $\tilde{\lambda} (>1)$ では実験結果と解析結果は良く一致しているが小さな $\tilde{\lambda} (<1)$ では数%違っている。

速度相関、エネルギースペクトルはそれぞれ図8、図9に示してある。

以上の結果を見ると実験(ii)では実験と解析は完全に一致しているが実験(i), (iii)では多少の食違いが認められる。この食違いは $\Delta x = 0.01$ が実験(i), (iii)では漸近的状态に到達するのにまだ充分小さな値ではない事から来るものである。漸近的状态への接近は実験(ii)を除いて極めて遅いと言えろ。

8.2 Case II: $J \neq 0$

この場合は Burgers (1974) によって詳しく論ぜられた。接点の列は x 軸に沿う Wiener 過程で与えられる。 $P(x', y' | x, y)$ を Wiener 過程の点 (x, y) から点 (x', y') への遷移確率とすれば (3.5) と考慮して

$$P(x', y' | x, y) = \sqrt{\frac{1}{4\pi J |x' - x|}} \exp\left[-\frac{(y' - y)^2}{4J |x' - x|}\right]$$

となる。解析方法は $J=0$ の場合と全く同じであるからここでは彼の結果だけを示す。

隣合った衝撃波間の平均距離、単位長当りの乱流エネルギーはそれぞれ

$$l(t) = \frac{1}{m_1} t^{2/3} \quad (8.2)$$

$$E(t) = \frac{1}{2} m_1 J^{2/3} t^{-2/3} \quad (8.3)$$

で、 m_1 は (8.4) で与えられる定数である。

一個の衝撃波の μ, ξ が積分を含む形で求められた。しかしその表現は非常に複雑で分布の具体的な形は全く分らない。ただその分布に関するいくつかの低次モーメント $\langle \mu^m \xi^n \rangle$ が計算された (表2参照)*。ここで m_1, m_3, m_5 はある複雑な級数で表わされる定数である。 m_1, m_3 の近似値は

$$m_1 \approx 1.053, \quad m_3 \approx 1.8 \quad (8.4)$$

と求められているが、 m_5 は分っていない。速度場の一様等方性より

$$\langle \mu^m \xi^n \rangle = 0 \quad (n \text{ は奇数}) \quad (8.5)$$

である。

数値計算の方法は、確率分布関数 (8.1) が接点の列と与える時に用いられる以外は §8.1 と同じである。全ての統計量

* この章では変数 $\tilde{\mu}, \tilde{\xi}, \tilde{\lambda}, \tilde{\nu}$ は $J^{1/3} t^{2/3}$ を基準にして測ったものである。

$m \backslash n$	0	2	4
0	1	$\frac{m_3}{2m_1} (\doteq 0.85)$	$\frac{125}{42m_1} + \frac{11m_5}{40m_1}$
1	$\frac{1}{m_1} (\doteq 0.950)$	$\frac{2}{3} (\doteq 0.667)$	
2	$\frac{m_3}{m_1} (\doteq 1.7)$	$\frac{34}{2m_1} + \frac{m_5}{5m_1}$	
3	4		
4	$\frac{296}{2m_1} + \frac{m_5}{m_1}$		
5	$\frac{20m_3}{m_1} (\doteq 34)$		

表2. Burgers (1974) によって得られたいくつかの

低次モーメント $\langle \mu^m \xi^n \rangle = \langle \mu^m \xi^n \rangle / (J^{1/3} t^{2/3})^{m+n}$

は時間的に相似であるが特性長 $\lambda(t)$ は幅 Δx に多少依存する事が分る。その依存性を詳しく調べる為に異った Δx について各10回の実験を行いそのアンサンブル平均から全ての統計量を求める。 $t=1$ における単位長当りの衝撃波の個数と $\sqrt{\Delta x}$ との関係を図12に示した。多少の統計的ゆらぎは存在するが、それらは共通の直線にのる事が分る。実線は最小二乗法から求めた直線

$$N_{\Delta x}(1) = 1.058 - 0.425\sqrt{\Delta x} \quad (8.6)$$

である。従って $\Delta x=0$ の極限で

$$N(1) = m_1 \approx 1.058 \quad (8.7)$$

で、 $t=1$ における特性長はその逆数で

$$l(1) \approx 0.945 \quad (8.8)$$

である。これは (8.2), (8.4) と良く一致している。

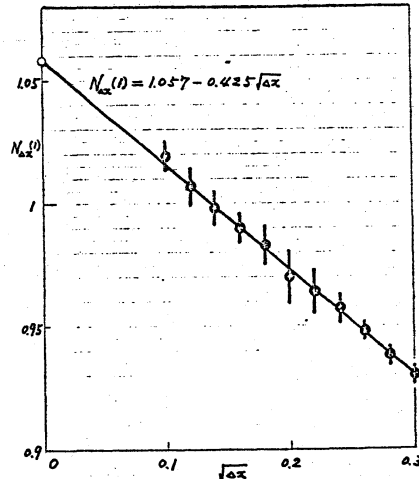


図12. 個数密度の幅(Δx) 依存性。黒丸、垂線は平均値, 標準偏差を意味する。

以下では、 $\Delta x=0$ の場合に対応する統計量として $\Delta x=0.01$ の実験データ ($N(1)=1.019$ であった) の長さの次元を持つ量に $1.019/1.053 \approx 0.968$ を掛けて修正したものを示す。

特性長、単位長当りの乱流エネルギーとそれぞれ図10、図11に示した。実験結果と解析結果が良く一致しているのが分る。

全ての統計量は時間的に相似であるので代表例として $t=1$ におけるデータを示す。表3には、いくつかの低次モーメント $\langle \rho^m \zeta^n \rangle$, n は偶数, が示してある。これらは解析結果

と統計的ゆらぎの範囲内で良く一致している。これら二つの表と比較すると

$$m_3 = 1.79 \pm 0.02, \quad m_5 = -2.6 \pm 0.1 \quad (8.9)$$

である事が分る。 m_3 は解析値(8.4)と一致している。ついでながら n が奇数の場合のモーメントは零の回りとゆらいでいる。

$m \backslash n$	0	2	4
0	1	0.828 ± 0.007	2.12 ± 0.05
1	0.950	0.666 ± 0.005	1.44 ± 0.03
2	1.70 ± 0.02	1.06 ± 0.02	2.04 ± 0.05
3	3.98 ± 0.08	2.26 ± 0.05	4.0 ± 0.2
4	10.9 ± 0.3	5.8 ± 0.2	9.5 ± 0.5
5	34 ± 1	17.3 ± 0.6	26 ± 2

表3. 10個の数値実験のアンサンブル平均から得られたいくつかの低次モーメント $\langle \tilde{\mu}^m, \tilde{\xi}^n \rangle$. $\pm$ は標準偏差を示す。

衝撃波の強さの分布関数 $\tilde{f}(\tilde{\mu})$ が図13 に示してある。これは $\tilde{\mu} = 0$ で発散するが詳しく調べてみると

$$\tilde{f}(\tilde{\mu}) \approx 0.37 \tilde{\mu}^{-1/2} \quad (\tilde{\mu} \rightarrow 0) \quad (8.10)$$

である事が分る。これは(8.6)と両立している。

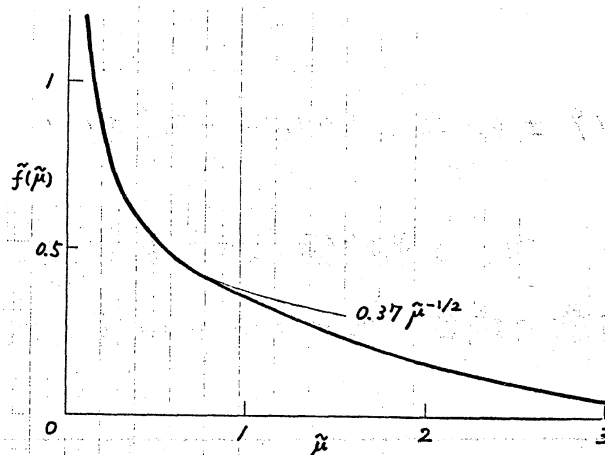


図13. Case IIにおける衝撃波の強さの確率分布

衝撃波の速さの分布関数 $\tilde{h}(\tilde{\zeta})$ を図14に示した。比較のために同じ分散のガウス分布を実線で引いてある。それらは非常に良く一致しているから $\tilde{h}(\tilde{\zeta})$ がガウス分布で近似できるものと思われる。しかし、この事は解析的にはまだ証明されていない。

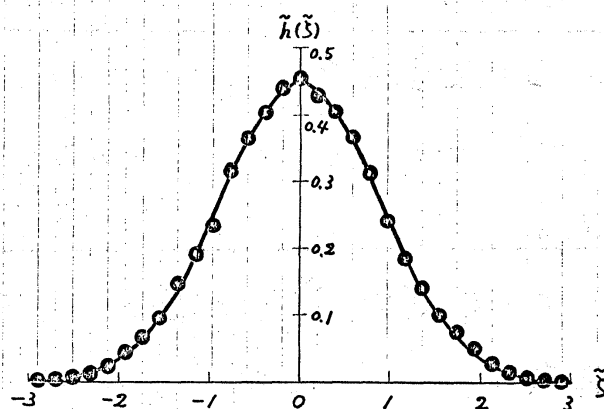


図14. Case IIにおける衝撃波の速さの分布。実線は同じ分散のガウス分布である。

隣合った二個の衝撃波と離れた二個の衝撃波の相対距離の分布とその和を図15に示した。これらは $J=0$ の場合と良く似ている。

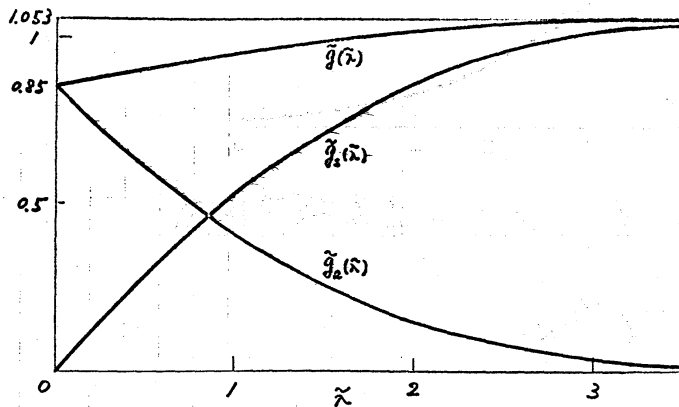


図15. Case IIにおける二個の衝撃波間の距離の分布

速度相関 $B(r,t)$ を図16に示した。ここに

$$\tilde{B}(\tilde{r}) = \left(\frac{t}{J}\right)^{2/3} B(r,t) \quad (8.11)$$

である。これは全ての r に対して正であり $\tilde{r}=0$ の近くでは直線

$$\tilde{B}(\tilde{r}) = 1.053 - 0.9\tilde{r} \quad (8.12)$$

に一致する。(8.12) は (7.5) と表2からも得られる。

図17に $B(r,t)$ のフーリエ変換として定義されたエネルギースペクトル $E(k,t)$ を示した。規格化した波数 $\tilde{k}$ 、規格化したエネルギースペクトル $\tilde{E}(\tilde{k})$ は

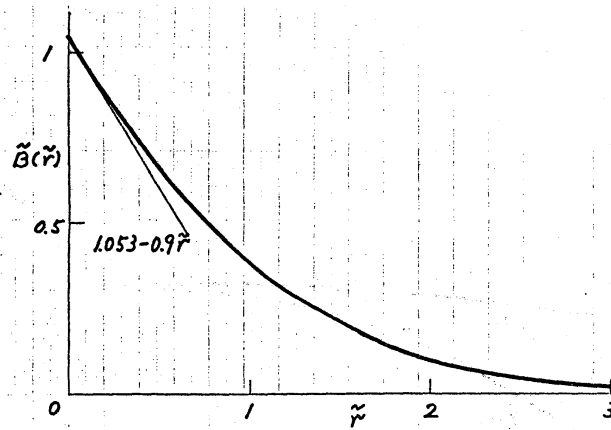


図16. Case II における速度相関関数

$$\tilde{k} = J^{1/3} t^{2/3} k \quad (8.13)$$

$$\tilde{E}(\tilde{k}) = \frac{1}{J} E(k, t) \quad (8.14)$$

で定義してある。エネルギースペクトルは $\tilde{k} \rightarrow \infty$ で

$$\tilde{E}(\tilde{k}) = 0.29 \tilde{k}^{-2} \quad (8.15)$$

なる漸近形をもっている。ここでもゴルモゴロフの $k^{-5/3}$ スペクトルは現われない。このエネルギースペクトルの形は、

Jeng et al (1966) や Hosokawa & Yamamoto (1970) のスペクトルと非常に良く似ているが、特性長の時間依存性が明らかではないので、定量的な比較はできない。

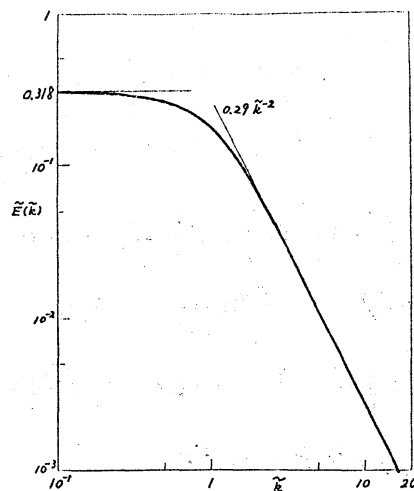


図17. Case II におけるエネルギースペクトル

参考文献

- Burgers, J. M. 1950 Proc. Amsterdam 53, 373-406.
- Burgers, J. M. 1974 The Nonlinear Diffusion Equation.
D. Reidel Publishing Co.
- Cole, J. D. 1951 Quart. Appl. Math. 9, 225-236.
- Crow, S. C. & Canavan, G. H. 1970 J. Fluid Mech. 41,
387-403.
- Hopf, E. 1950 Commun. Pure Appl. Math. 3, 201-230.
- Hosokawa, I. & Yamamoto, K. 1970 Phys. Fluids 13,
1683-1692.
- Jeng, D. T., Hoerster, R., Haaland, S. & Meecham, W. C. 1966
Phys. Fluids 9, 2114-2120.
- Kawahara, T. 1968 J. Phys. Soc. Japan, 25, 292-900.

- Kraichnan, R.H. 1968 Phys. Fluids 11, 265-277.
- Lighthill, M.J. 1956 Surveys in Mechanics, Cambridge University Press, London, 250-351.
- Malfliet, W.P.M. 1969 Physica, 45, 257-271.
- Meecham, W.C. & Siegel, A. 1964 Phys. Fluids 7, 1178-1190.
- Reid, W. H. 1957 Appl. Sci. Res. A6 85-91.
- Tatsumi, T. 1969 Phys. Fluids Suppl. II 12, II258-II264.
- Tatsumi, T. & Kida, S. 1972 J. Fluid Mech. 55, 659-675.
- Tatsumi, T., Kida, S. & Mizushima, J. 1978 J. Fluid Mech. 85, 97-142.
- Tatsumi, T. & Tokunaga, H. 1974 J. Fluid Mech. 65, 581-601.
- Yamamoto, K. & Hosokawa, I. 1976 Phys. Fluids 19, 1423-1424.