

ON INHOMOGENEOUS DIOPHANTINE APPROXIMATION AND THE BORWEINS' ALGORITHM

三重大教育 小松 尚夫 (TAKAO KOMATSU)

We obtain the values $\mathcal{M}(\theta, \phi) = \liminf_{|q| \rightarrow \infty} |q| \|q\theta - \phi\|$ by using the algorithm by Borwein and Borwein. One example is given.

1. 序論

θ を無理数、 ϕ を実数とし、 $q\theta - \phi$ がどんな整数 q を取っても整数にならないものとする。このようなペア θ, ϕ に対して 非斉次近似定数

$$\mathcal{M}(\theta, \phi) = \liminf_{|q| \rightarrow \infty} |q| \|q\theta - \phi\|$$

を定義する。また、補助定数として

$$\mathcal{M}_+(\theta, \phi) = \liminf_{q \rightarrow +\infty} q \|q\theta - \phi\|, \quad \mathcal{M}_-(\theta, \phi) = \liminf_{q \rightarrow +\infty} q \|q\theta + \phi\|$$

を定義しておく。すなわち、 $\mathcal{M}(\theta, \phi) = \min(\mathcal{M}_+(\theta, \phi), \mathcal{M}_-(\theta, \phi))$ である。 $\mathcal{M}(\theta, \phi)$ や $\mathcal{M}_+(\theta, \phi)$ の値については、いろいろな独自のアルゴリズムを使うことによってその評価が研究されてきた(例えば、[2], [3], [4], [6], [7], [11] などを見よ)。しかし、具体的な θ と ϕ のペアについて、 $\mathcal{M}(\theta, \phi)$ を求めることは殆どなく、実際今までの研究で使ったアルゴリズムは実用的なものではなかった。最近になって著者[7]は、西岡-塩川-田村のアルゴリズム[9]を使うことにより $\mathcal{M}(\theta, \phi)$ の値が比較的簡単に求められることを発見した。この方法によれば、少なくとも θ が実2次無理数で $\phi \in \mathbb{Q}(\theta)$ であるどんなペア θ, ϕ に対しても $\mathcal{M}(\theta, \phi)$ の値が実際に求められることがわかった。更に著者 [8] は、 θ が Hurwitzian number、すなわちその連分数展開が擬似循環節を持つときにも $\mathcal{M}(\theta, \phi)$ が求められることを突き止めた。例えば、 $\mathcal{M}(e, 1/3) = 1/18, \mathcal{M}(e^{1/s}, 1/3) = 0$ ($s \equiv 2 \pmod{3}$) などがわかったが、これはまた、 $\mathcal{M}(\theta, \phi) = 0$ を満たす θ と ϕ の具体的なペアがわかった最初のケースであった。

このように、西岡-塩川-田村のアルゴリズムと $\mathcal{M}(\theta, \phi)$ の値については非常によい相性をもつことが立証されてきているのであるが、西岡-塩川-田村のアルゴリズムと対称的な関係にある Borwein 兄弟のアルゴリズム [1] と $\mathcal{M}(\theta, \phi)$ の値についての関係も興味深いものと思われる。この論文ではその関係を述べると共に、その応用例も示す。

$\theta = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ によって θ の (単純) 連分数展開を表すが、

$$\begin{aligned} \theta &= a_0 + \theta_0, & a_0 &= [\theta], \\ 1/\theta_{n-1} &= a_n + \theta_n, & a_n &= [1/\theta_{n-1}] \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

と $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots$ を導入しておく。 θ の第 k 近似 (分数) $p_k/q_k = [a_0; a_1, \dots, a_k]$ は漸化式

$$\begin{aligned} p_k &= a_k p_{k-1} + p_{k-2} \quad (k = 0, 1, \dots), & p_{-2} &= 0, \quad p_{-1} = 1, \\ q_k &= a_k q_{k-1} + q_{k-2} \quad (k = 0, 1, \dots), & q_{-2} &= 1, \quad q_{-1} = 0 \end{aligned}$$

によって定められる。西岡-塩川-田村のアルゴリズム[9]では、数列 $\{\theta_0, \theta_1, \dots\}$ による ϕ の表現 (非斉次連分数展開) を

$$\begin{aligned} \phi &= b_0 - \phi_0, & b_0 &= [\phi], \\ \phi_{n-1}/\theta_{n-1} &= b_n - \phi_n, & b_n &= [\phi_{n-1}/\theta_{n-1}] \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

によって与え、それによって ϕ は

$$\begin{aligned} \phi &= b_0 - b_1 \theta_0 + b_2 \theta_0 \theta_1 - \dots + (-1)^k b_k \theta_0 \theta_1 \dots \theta_{k-1} - (-1)^k \theta_0 \theta_1 \dots \theta_{k-1} \phi_k \\ &= b_0 - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_{k+1} \theta_0 \theta_1 \dots \theta_k = b_0 - \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1} D_k \end{aligned}$$

と表された。ここで $D_k = q_k \theta - p_k = (-1)^k \theta_0 \theta_1 \dots \theta_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) である。以上の記号のもと、筆者[7]は次を得た。

定理A.

$$\mathcal{M}_-(\theta, \phi) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \min(B_n \|B_n \theta + \phi\|, B_n^* \|B_n^* \theta + \phi\|),$$

ここで $B_n = \sum_{k=1}^n b_k q_{k-1}$ 及び $B_n^* = B_n - q_{n-1}$ である。

また、 $\|B_n \theta + \phi\| = \phi_n |D_{n-1}|$, $\|B_n^* \theta + \phi\| = (1 - \phi_n) |D_{n-1}|$ が成り立ち、 $\mathcal{M}_+(\theta, \phi) = \mathcal{M}_-(\theta, 1 - \phi)$ とから $\mathcal{M}(\theta, \phi)$ が求められる。

一方、Borwein兄弟[1]は次のアルゴリズムを使った。

$$\begin{aligned} \phi &= d_0 + \gamma_0, & d_0 &= [\phi], \\ \gamma_{n-1}/\theta_{n-1} &= d_n + \gamma_n, & d_n &= [\gamma_{n-1}/\theta_{n-1}] \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

これによって ϕ は

$$\begin{aligned} \phi &= d_0 + d_1 \theta_0 + d_2 \theta_0 \theta_1 + \dots + d_i \theta_0 \theta_1 \dots \theta_{i-1} + \gamma_i \theta_0 \theta_1 \dots \theta_{i-1} \\ &= d_0 + d_1 D_0 - d_2 D_1 + \dots + (-1)^{i-1} d_i D_{i-1} + (-1)^{i-1} \gamma_i D_{i-1} \\ &= d_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} d_i D_{i-1} \end{aligned}$$

と表される。

$C_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} d_k q_{k-1}$ とおくと、 $\|C_n \theta - \phi\| = 1 - \{C_n \theta - \phi\} = \|(-1)^n \gamma_n D_{n-1}\| = \gamma_n |D_{n-1}|$ がわかる。

以下、一般性を失わずに $0 < \phi \leq 1/2$ と仮定する。すると $\phi = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} d_k D_{k-1}$ と表される。ここで更に $1 - \phi$ も Borwein兄弟のアルゴリズムを使って表す。

$$\begin{aligned} 1 - \phi &= d'_0 + \gamma'_0 = \gamma'_0, & d'_0 &= [1 - \phi] = 0, \\ \gamma'_{n-1}/\theta'_{n-1} &= d'_n + \gamma'_n, & d'_n &= [\gamma'_{n-1}/\theta'_{n-1}] \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

とすれば、 $1 - \phi = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} d'_k D_{k-1}$ が成り立つ。 $C'_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} d'_k q_{k-1}$ とおけば、 $\|C'_n \theta + \phi\| = \gamma'_n |D_{n-1}|$ である。以上の記号のもとに次が成り立つ。

定理 1.

$$\mathcal{M}(\theta, \phi) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \min(|C_n| \gamma_n |D_{n-1}|, |C'_n| \gamma'_n |D_{n-1}|, \\ (|C_n| + q_{n-1})(1 - \gamma_n) |D_{n-1}|, (|C'_n| + q_{n-1})(1 - \gamma'_n) |D_{n-1}|).$$

注意. 定理の証明のところでわかることだが、最後の2つの値はそれぞれ $C_{2n-1} > 0$ (よって下のLemma4より、同時に $C'_{2n-1} > 0$); $C_{2n} < 0$ (よって同時に $C'_{2n} < 0$)の時のみ考慮すればよく、それ以外の時は不要である。

$\mathcal{M}_+(\theta, \phi)$ や $\mathcal{M}_-(\theta, \phi)$ の個々の値については、(より複雑な形になるが) 次がわかる。

命題.

$$\mathcal{M}_+(\theta, \phi) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \min(C_n \|C_n \theta - \phi\|, (C_{2n-1} + q_{2n-2}) \|(C_{2n-1} + q_{2n-2}) \theta - \phi\|, \\ |C'_n| \| |C'_n| \theta - \phi \|, (|C'_{2n}| + q_{2n-1}) \|(|C'_{2n}| + q_{2n-1}) \theta - \phi \|),$$

ここで n は $C_n > 0$ または $C'_n < 0$ を満たすものだけを取る。

$$\mathcal{M}_-(\theta, \phi) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \min(C'_n \|C'_n \theta + \phi\|, (C'_{2n-1} + q_{2n-2}) \|(C'_{2n-1} + q_{2n-2}) \theta + \phi\|, \\ |C_n| \| |C_n| \theta + \phi \|, (|C_{2n}| + q_{2n-1}) \|(|C_{2n}| + q_{2n-1}) \theta + \phi \|),$$

ここで n は $C_n < 0$ または $C'_n > 0$ を満たすものだけを取る。

2. 諸 LEMMA

証明は省略するが、定義より次の4つの事実がわかる。

Lemma 1.

- (1) もし $a_n = d_n > 0$ ならば、 $d_{n+1} = 0$.
- (2) もし $\theta_n + \gamma_n > 1$ ならば、 $0 \leq a_{n+1} - d_{n+1} \leq 1$. もし $\theta_n + \gamma_n < 1$ ならば、 $a_{n+1} \neq d_{n+1}$.
- (3) $\theta_n > \gamma_n$ であるのは、 $d_{n+1} = 0$ である時またその時に限る。 $\theta_n \leq \gamma_n$ であるのは、 $d_{n+1} \geq 1$ である時またその時に限る。
- (4) もし $d_n > 0$ ならば、 $\begin{cases} 1 \leq C_n \leq q_n, & (n \text{ が奇数}); \\ -q_n + 1 \leq C_n \leq 0, & (n \text{ が偶数}). \end{cases}$

Lemma 2 ([5], [10]). $j = 1, 2, \dots, q_n - 1$ に対して、 $u_j \equiv jq_{n-1} \pmod{q_n}$ とおき、集合として $\{u_1, u_2, \dots, u_{q_n-1}\} = \{1, 2, \dots, q_n - 1\}$ を満たすものとする。このとき、

$$\begin{aligned} \{u_1 \theta\} &< \{u_2 \theta\} < \dots < \{u_{q_n-1} \theta\} & (n \text{ が奇数}); \\ \{u_1 \theta\} &> \{u_2 \theta\} > \dots > \{u_{q_n-1} \theta\} & (n \text{ が偶数}). \end{aligned}$$

Lemma 3. もし $C_n + C'_n = (-1)^{n-1}q_n$ ならば、 $C_{n+1} + C'_{n+1} = (-1)^{n-1}q_n$.
 もし $C_n + C'_n = (-1)^{n-1}(q_n - q_{n-1})$ または $C_n + C'_n = (-1)^n q_{n-1}$ ならば、

$$C_{n+1} + C'_{n+1} = \begin{cases} (-1)^n q_{n+1}, & \gamma_{n+1} + \gamma'_{n+1} = \theta_{n+1} \text{の時;} \\ (-1)^n (q_{n+1} - q_n), & \gamma_{n+1} + \gamma'_{n+1} = \theta_{n+1} + 1 \text{の時.} \end{cases}$$

Lemma 4.

- (1) すべての $n = 1, 2, \dots$ に対して、 $C_n C'_n \geq 0$
- (2) $C_n C_{n+1} \geq 0$ かつ $C'_n C'_{n+1} \geq 0$ であるのは、 $C_n + C'_n = (-1)^{n-1}q_n$ または $(-1)^n q_{n-1}$ である時またその時に限る。そしてこの時、 $|C_{n+1}| = |C_n| + d_{n+1}q_n \geq |C_n|$ かつ $|C'_{n+1}| = |C'_n| + d'_{n+1}q_n \geq |C'_n|$ である。
- (3) $C_n C_{n+1} < 0$ かつ $C'_n C'_{n+1} < 0$ であるのは、 $C_n + C'_n = (-1)^{n-1}q_n + (-1)^n q_{n-1}$ である時またその時に限る。そしてこの時、 $|C'_{n+1}| = |C_n| + (d'_{n+1} - 1)q_n + q_{n-1} > |C_n|$ かつ $|C_{n+1}| = |C'_n| + (d_{n+1} - 1)q_n + q_{n-1} > |C'_n|$ である。

3. 定理 1 及び命題の証明

n を奇数とする。もし $C_n > 0$ ならば、Lemma 3 より $C_n + C'_n = q_n$ または $C_n + C'_n = q_n - q_{n-1}$ である。 $\{jq_{n-1}\theta\}$ は Lemma 2 より $\{q\theta\}$ ($0 < q < q_n$) の中で j 番目に小さい値であること、また $\|(C_n + jq_{n-1})\theta - \phi\| = (j - \gamma_n)|D_{n-1}| > \gamma_n|D_{n-1}| = \|C_n\theta - \phi\|$ ($j \geq 2$) であることから、 $0 < q < q_n$ で $q \neq q_{n-1}$ であるようなすべての整数 q に対して、

$$(C_n + q)\|(C_n + q)\theta - \phi\| > C_n\|C_n\theta - \phi\|$$

が成り立つ。 $\{(q_n - jq_{n-1})\theta\}$ は $\{q\theta\}$ ($0 < q < q_n$) の中で j 番目に小さい値であり $\|(C_n - q_n + jq_{n-1})\theta - \phi\| = |D_n| + (j - \gamma_n)|D_{n-1}| > \gamma_n|D_{n-1}| = \|C_n\theta - \phi\|$ ($j \geq 2$) であるから、 $0 < q < q_n - jq_{n-1}$ であるすべての整数 q に対して

$$\begin{aligned} (C_n - q)\|(C_n - q)\theta - \phi\| \\ &> \min(C_n\|C_n\theta - \phi\|, (C_n - q_n + jq_{n-1})\|(C_n - q_n + jq_{n-1})\theta - \phi\|, \\ &\quad (C_n - q_{n-1})\|(C_n - q_{n-1})\theta - \phi\|) \end{aligned}$$

を得る。ここで、 $C_n - q_n + jq_{n-1} > 0$ を満たす最小の正整数を j とした。また $\|(C_n - q_{n-1})\theta - \phi\| = (1 + \gamma_n)|D_{n-1}|$ であることに注意。

Lemma 3 より $C_{n-1} + C'_{n-1} = -(q_{n-1} - q_{n-2})$ または $C_{n-1} + C'_{n-1} = q_{n-2}$ である。 $C_{n-1} + C'_{n-1} = -(q_{n-1} - q_{n-2})$ であるとき、もし

$$C_n - q_n + jq_{n-1} = |C'_{n-1}| - (a_n - d_n - j + 1)q_{n-1} > |C'_{n-1}| + q_{n-2}$$

または $j \geq a_n - d_n + 2$ であるならば、

$$\begin{aligned} (|C'_{n-1}| + q_{n-2})(1 - \gamma'_{n-1})|D_{n-2}| &= (|C'_{n-1}| + q_{n-2})(a_n + \theta_n - d_n - \gamma'_n)|D_{n-1}| \\ &< (C_n - q_n + jq_{n-1})(|D_n| + (j - \gamma_n)|D_{n-1}|) \end{aligned}$$

を得る。 $j = a_n - d_n + 2$ である時、 $C_n - q_n + jq_{n-1} = |C'_{n-1}| + q_{n-1}$ が成り立つことに注意する。次に、もし

$$C_n - q_{n-1} = |C'_{n-1}| + (d_n - 2)q_{n-1} + q_{n-2} > |C'_{n-1}| + q_{n-2}$$

または $d_n \geq 3$ ならば、 $d_n + d'_n = a_n + 1$ より $\gamma_n + \gamma'_n = \theta_n$ かつ $|C'_{n-1}| < q_{n-1} - q_{n-2} < (1 + \gamma_n)q_{n-1} - q_{n-2}$ であるから、

$$\begin{aligned} & (|C'_{n-1}| + q_{n-2}) \|(|C'_{n-1}| + q_{n-2})\theta - \phi\| = (|C'_{n-1}| + q_{n-2})(1 - \gamma'_{n-1})|D_{n-2}| \\ & = (|C'_{n-1}| + q_{n-2})(d_n - 2)|D_{n-1}| + (|C'_{n-1}| + q_{n-2})(1 + \gamma_n)|D_{n-1}| \\ & < q_{n-1}(1 + \gamma_n)(d_n - 2)|D_{n-1}| + (|C'_{n-1}| + q_{n-2})(1 + \gamma_n)|D_{n-1}| \\ & = (C_n - q_{n-1})(1 + \gamma_n)|D_{n-1}| = (C_n - q_{n-1})\|(C_n - q_{n-1})\theta - \phi\| \end{aligned}$$

を得る。もし $d_n = 2$ ならば、 $C_n - q_{n-1} = |C'_{n-1}| + q_{n-2}$ である。

$C_{n-1} + C'_{n-1} = q_{n-2}$ である時、もし

$$C_n - q_n + jq_{n-1} = C_{n-1} - (a_n - d_n - j)q_{n-1} - q_{n-2} \geq C_{n-1} + q_{n-1} - q_{n-2}$$

または $j \geq a_n - d_n + 1$ ならば、

$$\begin{aligned} & (C_n - q_n + jq_{n-1})(|D_n| + (j - \gamma_n)|D_{n-1}|) \\ & \geq (C_{n-1} + q_{n-1} - q_{n-2})(|D_{n-1}| + (1 - \gamma_{n-1})|D_{n-2}|) \end{aligned}$$

が成り立つ。もし

$$C_n - q_{n-1} = C_{n-1} + (d_n - 1)q_{n-1} > C_{n-1} + q_{n-1} - q_{n-2}$$

または $d_n \geq 2$ ならば、 $C_{n-1} < q_{n-2} < q_{n-1}(1 + \gamma_n)$ より

$$\begin{aligned} C_{n-1}\|C_{n-1}\theta - \phi\| &= C_{n-1}\gamma_{n-1}|D_{n-2}| = C_{n-1}(d_n - 1 + 1 + \gamma_n)|D_{n-1}| \\ &< q_{n-1}(1 + \gamma_n)(d_n - 1)|D_{n-1}| + C_{n-1}(1 + \gamma_n)|D_{n-1}| \\ &= (C_n - q_{n-1})(1 + \gamma_n)|D_{n-1}| \end{aligned}$$

が成り立つ。もし $d_n = 1$ ならば、 $C_n - q_{n-1} = C_{n-1}$ である。 C_n と C'_n (同じく d_n と d'_n , γ_n と γ'_n など) が互いに交換されている場合にも、同様の事実が証明できる。

n が奇数で $C_n + C'_n = -q_{n-1}$ であると仮定する。Lemma 3 より $d_n = d'_n = 0$ かつ $C_{n-1} + C'_{n-1} = -q_{n-1}$ である。 $0 < q < q_n$ で $q \neq q_n - q_{n-1}$ なすべての整数 q に対して

$$(|C_n| + q)\|(|C_n| + q)\theta - \phi\| = |C_n - q|\| |C_n - q|\theta - \phi\| > |C_n|\| |C_n|\theta - \phi\|$$

が成り立つ。もし $a_n \geq 2$ ならば、 $\gamma_n + \gamma'_n = 1$ より

$$\begin{aligned} & |C'_n|\| |C'_n|\theta + \phi\| = |C'_n|\| |C'_n|\theta - \phi\| = |C'_n|\gamma'_n|D_{n-1}| \\ & < (|C_n| + q_n - q_{n-1})(\theta_n + \gamma'_n)|D_{n-1}| \\ & = (|C_n| + q_n - q_{n-1})\|(|C_n| + q_n - q_{n-1})\theta - \phi\| \end{aligned}$$

を得る。もし $a_n = 1$ ならば、 $|C_n| + q_n - q_{n-1} = |C_{n-1}| + q_{n-2}$ である。

n を偶数とする。もし $C_n > 0$ ならば、 $C_n + C'_n = q_{n-1}$ である。 $\{(q_n - jq_{n-1})\theta\}$ が $\{q\theta\}$ ($0 < q < q_n$) の中で j 番目に小さい値であり $\|(C_n + q_n - jq_{n-1})\theta - \phi\| = |D_n| + (j - \gamma_n)|D_{n-1}| > \gamma_n|D_{n-1}| = \|C_n\theta - \phi\|$ ($j \geq 2$) であることから、 $0 < q < q_n$ で $q \neq q_n - q_{n-1}$ なすべての整数 q に対して

$$(C_n + q)\|(C_n + q)\theta - \phi\| > C_n\|C_n\theta - \phi\|$$

を得る。もし $a_n \geq 2$ ならば、 $\gamma_n + \gamma'_n = 1$ より、

$$\begin{aligned} C'_n\|C'_n\theta + \phi\| &= C'_n\gamma'_n|D_{n-1}| \\ &< (C_n + q_n - q_{n-1})(\theta_n + \gamma'_n)|D_{n-1}| \\ &= (C_n + q_n - q_{n-1})\|(C_n + q_n - q_{n-1})\theta - \phi\| \end{aligned}$$

を得る。もし $a_n = 1$ ならば、 $C_n + q_n - q_{n-1} = C_{n-1} + q_{n-2}$ である。

$C_n + C'_n = -q_n$ または $C_n + C'_n = -q_n + q_{n-1}$ である時も同様に証明される。例えば、 $|C_n|$ と $|C'_n|$ を、奇数の場合の C_n と C'_n にそれぞれ置き換えればよい。

4. 応用例

簡単のため、Borwein兄弟による ϕ ($0 < \phi < 1$) の θ 展開による式を、自明な $d_0 = 0$ を省いて $\phi = {}_\theta\langle d_1, d_2, \dots, d_n, \dots \rangle$ で表すことにする。上線は循環(または)擬似循環を表し、

$$\begin{aligned} \phi &= {}_\theta\langle d_1, \dots, d_n, \overline{f_1(i), \dots, f_m(i)} \rangle_{i=1}^k \\ &= {}_\theta\langle d_1, \dots, d_n, \overline{f_1(1), \dots, f_m(1), f_1(2), \dots, f_m(2), \dots, f_1(k), \dots, f_m(k)} \rangle \end{aligned}$$

と約束する。

例として、 $\theta = (\sqrt{D} - ab)/(2a) = [0; \overline{a, b}]$ の場合を考える。ここで $D = ab(ab + 4)$ 、 a と b は固定された正整数である。

定理 2. ある正整数 $b \geq 2$ に対して

$$\mathcal{M}(\theta, \frac{1}{b}) = \frac{a}{b^2\sqrt{D}}$$

注意. $a = 1$ の場合だけが Theorem 6, [7] で証明された。

証明. $\phi = 1/b$ は

$$\frac{1}{b} = {}_\theta\left\langle \left[\frac{ia}{b} \right] - \left[\frac{(i-1)a}{b} \right], \left\{ \frac{ia}{b} \right\} b \right\rangle_{i=1}^b$$

と表され、 $i = 1, 2, \dots, b$ に対して

$$\gamma_{2i-1} = \frac{\theta_1}{b} + \left\{ \frac{ia}{b} \right\}, \quad \gamma_{2i} = \frac{1}{b} + \left\{ \frac{ia}{b} \right\} \theta$$

である。

$$\begin{aligned} & \left(\left\lfloor \frac{ia}{b} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(i-1)a}{b} \right\rfloor \right) q_{2i-2} - \left\{ \frac{ia}{b} \right\} b q_{2i-1} \\ &= \frac{1}{b} (q_{2i-1} - q_{2i-3}) + \left\{ \frac{(i-1)a}{b} \right\} q_{2i-2} - \left\{ \frac{ia}{b} \right\} q_{2i} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} C_{2n} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{b} (q_{2i-1} - q_{2i-3}) + \left\{ \frac{(i-1)a}{b} \right\} q_{2i-2} - \left\{ \frac{ia}{b} \right\} q_{2i} \right) \\ &= \frac{1}{b} q_{2n-1} - \left\{ \frac{na}{b} \right\} q_{2n} \end{aligned}$$

を得る。 $\theta = [0; \overline{a, b}]$ の時、

$$q_{2n-1} = \frac{a(\alpha^n - \beta^n)}{\alpha - \beta} \quad \text{かつ} \quad q_{2n} = \frac{(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) - (\alpha^n - \beta^n)}{\alpha - \beta}$$

が成り立ち、

$$\alpha = \frac{(ab+2) + \sqrt{D}}{2} \quad \text{かつ} \quad \beta = \frac{(ab+2) - \sqrt{D}}{2}$$

であり、 $\alpha + \beta = ab + 2$, $\alpha\beta = 1$, $\alpha - \beta = \sqrt{D}$, $\theta\theta_1 = \beta$, $a\theta = b\theta_1$ を満たしている ([7]を見よ)。故に、

$$q_{2n-1}|D_{2n-1}| = \frac{a(\alpha^n - \beta^n)}{\alpha - \beta} (\theta\theta_1)^n \rightarrow \frac{a}{\sqrt{D}} \quad (n \rightarrow \infty)$$

かつ

$$q_{2n}|D_{2n-1}| = \frac{(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) - (\alpha^n - \beta^n)}{\alpha - \beta} \beta^n \rightarrow \frac{a}{\theta_1 \sqrt{D}}$$

を用いて、

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} C_{2n} \gamma_{2n} |D_{2n-1}| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{b} \frac{a}{\sqrt{D}} - \left\{ \frac{na}{b} \right\} \frac{a}{\theta_1 \sqrt{D}} \right) \left(\frac{1}{b} + \left\{ \frac{na}{b} \right\} \theta \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{b^2 \sqrt{D}} \left(1 - b^2 \left\{ \frac{na}{b} \right\} - \frac{b^3}{a} \left\{ \frac{na}{b} \right\}^2 \right) \end{aligned}$$

を得、これより $\liminf_{n \rightarrow \infty} |C_{2n}| \gamma_{2n} |D_{2n-1}| = a/b^2 \sqrt{D}$ が言える。

同様に、 $\liminf_{n \rightarrow \infty} |C_{2n-1}| \gamma_{2n-1} |D_{2n-2}| = a/b^2 \sqrt{D}$ を得る。

$1 - \phi = 1 - 1/b$ は

$$1 - \frac{1}{b} = \theta \left\langle a + \left\lfloor -\frac{ia}{b} \right\rfloor - \left\lfloor -\frac{(i-1)a}{b} \right\rfloor, \left\{ -\frac{ia}{b} \right\} b \right\rangle_{i=1}^b$$

と表され、 $i = 1, 2, \dots, b$ に対して

$$\gamma'_{2i-1} = \left(1 - \frac{1}{b}\right) \theta_1 + \left\{-\frac{ia}{b}\right\}, \quad \gamma'_{2i} = 1 - \frac{1}{b} + \left\{-\frac{ia}{b}\right\} \theta$$

である (ただし、 $b \geq a + 2$ でしかも $ka \equiv 1 \pmod{b}$ を満たす正整数 k が存在するときにはこの形が少しだけ違ってくるが、議論は殆ど同様である)。

$$C'_{2n} = \left(1 - \frac{1}{b}\right) q_{2n-1} - \left\{-\frac{na}{b}\right\} q_{2n}$$

より、

$$C'_{2n} \gamma'_{2n} |D_{2n-1}| \sim \frac{a}{\sqrt{D}} \left(\left(1 - \frac{1}{b}\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{b}\right) b \left\{-\frac{na}{b}\right\} - \frac{b}{a} \left\{-\frac{na}{b}\right\}^2 \right)$$

を得、これより $\liminf_{n \rightarrow \infty} |C'_{2n} \gamma'_{2n} |D_{2n-1}| = (1 - 1/b)^2 \cdot (a/\sqrt{D})$ が成り立つ。同様にして、 $\liminf_{n \rightarrow \infty} |C'_{2n-1} \gamma'_{2n-1} |D_{2n-2}| = (1 - 1/b)^2 \cdot (a/\sqrt{D})$ を得る。

また $\liminf_{n \rightarrow \infty} (|C'_{2n}| + q_{2n-1})(1 - \gamma'_{2n}) |D_{2n-1}|$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} (|C'_{2n-1}| + q_{2n-1})(1 - \gamma'_{2n-1}) |D_{2n-1}|$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} (C'_{2n-1} + q_{2n-2})(1 - \gamma'_{2n-1}) |D_{2n-2}|$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} (C'_{2n-1} + q_{2n-2})(1 - \gamma'_{2n-1}) |D_{2n-2}|$ の値はすべて $a/b^2 \sqrt{D}$ 以上であることも実際に計算される。

REFERENCES

- [1] J. M. Borwein and P. B. Borwein, *On the generating function of the integer part: $[n\alpha + \gamma]$* , J. Number Theory **43** (1993), 293–318.
- [2] J. W. S. Cassels, *Über $\lim_{x \rightarrow +\infty} x|\vartheta x + \alpha - y|$* , Math. Ann. **127** (1954), 288–304.
- [3] T. W. Cusick, A. M. Rockett and P. Szűsz, *On inhomogeneous Diophantine approximation*, J. Number Theory **48** (1994), 259–283.
- [4] R. Descombes, *Sur la répartition des sommets d'une ligne polygonale régulière non fermée*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **73** (1956), 283–355.
- [5] T. Komatsu, *The fractional part of $n\theta + \phi$ and Beatty sequences*, J. Théorie des Nombres de Bordeaux **7** (1995), 387–406.
- [6] ———, *On inhomogeneous continued fraction expansion and inhomogeneous Diophantine approximation*, J. Number Theory **62** (1997), 192–212.
- [7] ———, *On inhomogeneous Diophantine approximation and the Nishioka-Shiokawa-Tamura algorithm*, Acta Arith. **86** (1998), 305–324.
- [8] ———, *On inhomogeneous Diophantine approximation with some quasi-periodic expressions*, Acta Math. Hung. **85** (1999), 311–330.
- [9] K. Nishioka, I. Shiokawa and J. Tamura, *Arithmetical properties of a certain power series*, J. Number Theory **42** (1992), 61–87.
- [10] T. van Ravenstein, *The three gap theorem (Steinhaus conjecture)*, J. Austral. Math. Soc. (Series A) **45** (1988), 360–370.
- [11] V. T. Sós, *On the theory of Diophantine approximations. II*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. **9** (1958), 229–241.

TAKAO KOMATSU
FACULTY OF EDUCATION
MIE UNIVERSITY
514-8507 JAPAN
komatsu@edu.mie-u.ac.jp