

# 実閉体の順序極小拡張におけるデファイナブルファイバー束について

川上 智博

640-8510 和歌山市栄谷 930

和歌山大学教育学部数学教室

kawa@center.wakayama-u.ac.jp

## 1. 序文

ここでは、実閉体  $R$  の通常の構造  $(R, +, \cdot, >)$  の順序極小拡張  $\mathcal{N} = (R, +, \cdot, >, \dots)$  において、デファイナブルファイバー束のホモトピー性質について考察する。順序極小構造は、実数体の順序極小拡張  $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, +, \cdot, >, \dots)$  に限っても、[10] により、非可算無限個存在することが知られている。

デファイナブルカテゴリーに関しては、[2], [3] などに性質がまとめられている。また、[11] では、少し一般化された形でまとめられている。

ここでは、デファイナブル集合は、すべてパラメータつきとし、デファイナブル写像は連続とし、特に断らなければ、すべて  $\mathcal{N} = (R, +, \cdot, >, \dots)$  で考えるものとする。

## 2. ファイバー束とデファイナブルファイバー束

Hausdorff 空間  $G$  が位相群とは、 $G$  が群であって、その群演算  $G \times G \rightarrow G, G \rightarrow G$  が連続となることである。

---

2000 *Mathematics Subject Classification*. 14P10, 14P20, 03C64.

*Keywords and Phrases*. 順序極小構造, デファイナブルファイバー束, デファイナブルベクトル束, 実閉体, ホモトピー性質.

$G$  を位相群、 $F$  を位相空間とする。 $F$  が  $G$  空間とは、 $F$  が  $G$  の連続群作用  $\phi: G \times F \rightarrow F$  をもつことである。ここでは、 $\phi(g, x)$  を  $gx$  と書く。 $G$  の  $F$  への作用が効果的とは、任意に  $g, g' \in G$  をとるとき、任意の  $f \in F$  に対して、 $gf = g'f$  ならば、 $g = g'$  となることである。

**定義 2.1.** 位相空間  $E, X$ , 位相群  $K$ ,  $K$  の効果的作用をもった位相空間  $F$  と全射連続写像  $p: E \rightarrow X$  の五つの組  $\eta = (E, p, X, F, K)$  がファイバー束とは、次の二つの条件を満たすことである。

(1)  $X$  の開被覆  $\{U_i\}$  と同相写像  $\phi_i: p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F$  が存在して、 $p = p_{U_i} \circ \phi_i$  となる。ただし、 $p_{U_i}: U_i \times F \rightarrow U_i$  を射影とする。

(2)  $p_i: U_i \times F \rightarrow F$  を射影とし、 $x \in U_i$  に対して、 $\phi_{i,x}: p^{-1}(x) \rightarrow F$  を  $\phi_{i,x}(z) = p_i \circ \phi_i(z)$  と定義する。 $x \in U_i \cap U_j$  に対して、 $\theta_{ji} := \phi_{j,x} \circ \phi_{i,x}$  とするとき、 $\theta_{ji} \in K$  かつ  $\theta_{ji}: U_i \cap U_j \rightarrow K$  が連続である。

このとき、 $E$  を全空間、 $X$  を底空間、 $p$  を射影、 $F$  をファイバー、 $K$  を構造群といい、 $\{\phi_i, U_i\}$  を局所自明化という。

**定義 2.2.**  $\eta = (E, p, X, F, K), \eta' = (E', p', X', F, K)$  をファイバー束とする。

(1) 連続写像  $\bar{f}: E \rightarrow E'$  がファイバー束写像とは、以下の二つの条件を満たすことである。

(a) 連続写像  $f: X \rightarrow X'$  が存在して、 $f \circ p = p' \circ \bar{f}$  となる。

(b)  $\{\phi_\alpha, U_\alpha\}, \{V'_\mu, \phi'_\mu\}$  をそれぞれ  $\eta, \eta'$  の局所自明化とする。 $U_\alpha \cap f^{-1}(V'_\mu) \neq \emptyset$  となる任意の  $\alpha, \mu$  に対して、 $f_{\mu\alpha}(x) = \phi'_{\mu, f(x)} \circ \bar{f} \circ \phi_{\alpha, x}^{-1}$  とするとき、 $f_{\mu\alpha} \in K$  かつ  $f_{\mu\alpha}: U_\alpha \cap f^{-1}(V'_\mu) \rightarrow K$  が連続である。

(2) ファイバー束写像  $\bar{f}: E \rightarrow E'$  がファイバー束同値写像とは、 $\bar{f}$  と  $f$  が同相写像であって、 $(\bar{f})^{-1}$  もファイバー束写像であることである。

(3) ファイバー束同値写像  $\bar{f}: E \rightarrow E'$  がファイバー束同型写像とは、 $X = X', f = id_X$  であることである。

連続写像  $f, h: X \rightarrow Y$  がホモトピックとは、連続写像  $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  が存在して、任意の  $x \in X$  に対して、 $H(x, 0) = f(x)$  かつ  $H(x, 1) = h(x)$  となることである。

**定理 2.3** ([9]).  $\eta = (E, p, X, F, K)$  をパラコンパクト空間上のファイバー束とし、 $f, h: Y \rightarrow X$  をパラコンパクト空間の間のホモトピックな連続写像とする。このとき、引き戻し束  $f^*(\eta)$  と  $h^*(\eta)$  はファイバー束同型である。

定義 2.4. (1) デファイナブル集合  $G$  がデファイナブル群とは、 $G$  が群であって、その演算  $G \times G \rightarrow G, G \rightarrow G$  がデファイナブル写像となることである。

(2)  $Y$  をデファイナブル集合とする。 $Y$  がデファイナブル  $G$  作用をもったデファイナブル集合とは、連続群作用  $G \times Y \rightarrow Y$  が存在して、それがデファイナブル写像となることである。

セミアルジェブリック空間 ([1]) の拡張として、デファイナブル空間 ([2]) を考えることができる。

定義 2.5. (1) デファイナブルファイバー束 ([7], [8]) は、 $E$  をデファイナブル空間、 $X$  をデファイナブル集合、開被覆を有限デファイナブル開被覆、局所自明化写像の個数を有限個、同相写像をデファイナブル同相写像と置き換えて定義する。

(2) デファイナブル束写像、デファイナブル束同値写像、デファイナブル束同型写像、引き戻し束を同様に定義できる。

$\mathcal{N} = \mathcal{M}$  で、底空間がコンパクトの場合は、以下のホモトピー性質が知られていた。

定理 2.6 ([8]).  $\mathcal{N} = \mathcal{M}$ 、 $\eta = (E, p, X, F, K)$  をデファイナブルファイバー束、 $f, h: Y \rightarrow X$  をホモトピックなデファイナブル写像とする。 $Y$  がコンパクトならば、引き戻し束  $f^*(\eta)$  と  $h^*(\eta)$  はデファイナブル束同型である。

また、[6] より、 $\mathcal{N} = \mathcal{M}$  のとき、デファイナブル集合間の写像  $f, h: X \rightarrow Y$  に対して、 $f$  と  $h$  がホモトピックならば、 $f$  と  $h$  はデファイナブリーホモトピックとなる。つまり、デファイナブル写像  $H: Y \times [0, 1] \rightarrow X$  が存在して、任意の  $x \in Y$  に対して、 $H(x, 0) = f(x)$ ,  $H(x, 1) = h(x)$  となる。

ここでは、定理 2.6 の拡張として、以下を得た。

定理 2.7 ([5]).  $\eta = (E, p, X, F, K)$  をデファイナブルファイバー束とし、 $f, h: Y \rightarrow X$  をデファイナブル写像とする。 $f$  と  $h$  がデファイナブリーホモトピックならば、引き戻し束  $f^*(\eta)$  と  $h^*(\eta)$  はデファイナブル束同型である。

定理 2.7 により、定理 2.6 の  $Y$  がコンパクトの条件は、除けることがわかる。

定理 2.7 の証明の鍵となる命題が以下である。

命題 2.8 (3.2 [4]). デファイナブル集合  $X \times [0, 1]$  のデファイナブル開集合  $\{V_j\}_{j=1}^p$  による任意の有限開被覆に対して、 $X$  の有限デファイナブル開被覆  $\{U_i\}_{i=1}^q$  が存在して、各  $i$  に

対して、デファイナブル関数  $0 = \phi_{i,0} < \cdots < \phi_{i,k_i} = 1 : U_i \rightarrow R$  が存在して、 $1 \leq i \leq q$  かつ  $0 \leq l < k_i$  を満たす各  $(i, l)$  に対して、ある  $j$  があって、 $\{(x, y) | x \in U_i, \phi_{i,l}(x) \leq y \leq \phi_{i,l+1}(x)\} \subset V_j$  となる。

### 3. デファイナブル $G$ ファイバー束とデファイナブル $G$ ベクトル束

**定義 3.1.**  $G$  をデファイナブル群とする。

(1) デファイナブルファイバー束  $(E, p, X, F, K)$  がデファイナブル  $G$  ファイバー束とは、 $E$  がデファイナブル  $G$  空間であり、その  $G$  作用がデファイナブル  $G$  束同値写像であって、 $X$  がデファイナブル  $G$  集合で、 $p$  がデファイナブル  $G$  写像となることである。

(2) デファイナブル  $G$  ファイバー束がデファイナブル  $G$  ベクトル束とは、 $F = R^n, K = GL_n(R)$  となることである。

**定義 3.2.**  $G$  をデファイナブル群とする。 $\Omega$  を  $n$  次元  $G$  表現空間、 $B : G \rightarrow O_n(R)$  をその表現写像とする。 $M(\Omega)$  を  $R$  係数の  $n$  次正方行列全体のベクトル空間で、 $G$  作用が  $(g, A) \in G \times M(\Omega) \mapsto B(g)AB(g)^{-1} \in M(\Omega)$  とする。任意の自然数  $k$  に対して、 $\gamma(\Omega, k) = (E(\Omega, k), u, G(\Omega, k)), G(\Omega, k) = \{A \in M(\Omega) | A^2 = A, A' = A, \text{Tr} A = k\}, E(\Omega, k) = \{(A, v) \in G(\Omega, k) \times \Omega | Av = v\}, u : E(\Omega, k) \rightarrow G(\Omega, k), u((A, v)) = A$  と定義し、 $\gamma(\Omega, k)$  を  $\Omega$  と  $k$  に付随した普遍  $G$  ベクトル束という。ただし、 $A'$  は  $A$  の転置行列を表すとする。

**定義 3.3.**  $G$  をデファイナブル群とする。デファイナブル  $G$  ベクトル束  $\eta = (E, p, X)$  が強デファイナブルとは、デファイナブル  $G$  写像  $f : X \rightarrow G(\Omega, k)$  が存在して、 $\eta$  と  $f^*(\gamma(\Omega, k))$  がデファイナブル  $G$  ベクトル束同型となることである。ただし、 $k$  は  $\eta$  の階数を表すものとする。

**定理 3.4** ([5]).  $G$  を有限群とすると、任意のデファイナブル  $G$  ベクトル束は強デファイナブルである。

### REFERENCES

- [1] H. Delfs and M. Knebusch, *Semialgebraic topology over a real closed field II: Basic theory of semi-algebraic spaces*, Math. Z. 178 (1981), 175–213.
- [2] L. van den Dries, *Tame topology and o-minimal structures*, Lecture notes series 248, London Math. Soc. Cambridge Univ. Press (1998).

- [3] L. van den Dries and C. Miller, *Geometric categories and o-minimal structures*, Duke Math. J. **84** (1996), 497-540.
- [4] M.J. Edmundo *O-minimal Čech cohomology*, Quart. J. Math. **59** (2008), 213-220.
- [5] T. Kawakami, *Definable fiber bundles in an o-minimal expansion of a real closed field*, preprint.
- [6] T. Kawakami, *Definable  $G$  CW complex structures of definable  $G$  sets and their applications*, Bull. Fac. Ed. Wakayama Univ. Natur. Sci. **55**, (2004), 1-15.
- [7] T. Kawakami, *Equivariant differential topology in an o-minimal expansion of the field of real numbers*, Topology Appl. **123** (2002), 323-349.
- [8] T. Kawakami, *Homotopy property for definable fiber bundles*, Bull. Fac. Ed. Wakayama Univ. Natur. Sci. **53** (2003), 1-6.
- [9] R. K. Lashof, *Equivariant Bundles*, Illinois J. Math. **26**(2) (1982), 257-271.
- [10] J.P. Rolin, P. Speissegger and A.J. Wilkie, *Quasianalytic Denjoy-Carleman classes and o-minimality*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 751-777.
- [11] M. Shiota, *Geometry of subanalytic and semialgebraic sets*, Progress in Math. **150** (1997), Birkhäuser.