

Introduction to the chiral anomaly in superfluid $^3\text{He-A}$ and boojums* on the Fermi surface.

新習大・教養 田島 慎一

(Shinichi Tajima)

私たちの世界にはさまざまな物質があり、その性質も実に多彩である。これらの物質のうちには、私たちの日常的な常識をはるかに越えた不思議な振舞いをするものが多いという。特に、巨視的量子効果に由来する特異な物性を示すもののうちには数学の対象としてたいへん興味深いものがある。ここでは、Volovik 達による超流動 $^3\text{He-A}$ に関する一連の仕事のうちから、その一部を紹介したい。

§1 では超流動 $^3\text{He-A}$ 相について大雑把な説明を与える。§2 において、 $^3\text{He-A}$ における mass current の異常項と秩序パラメーターの phase の関係を述べる。§3 では $^3\text{He-A}$ における mass current の異常項と chiral anomaly の関係を示す。

*) Lewis Carroll's poem "The Hunting of the Snark"
— / —

§. 1. 超流動 $^3\text{He-A}$ と Cooper 対

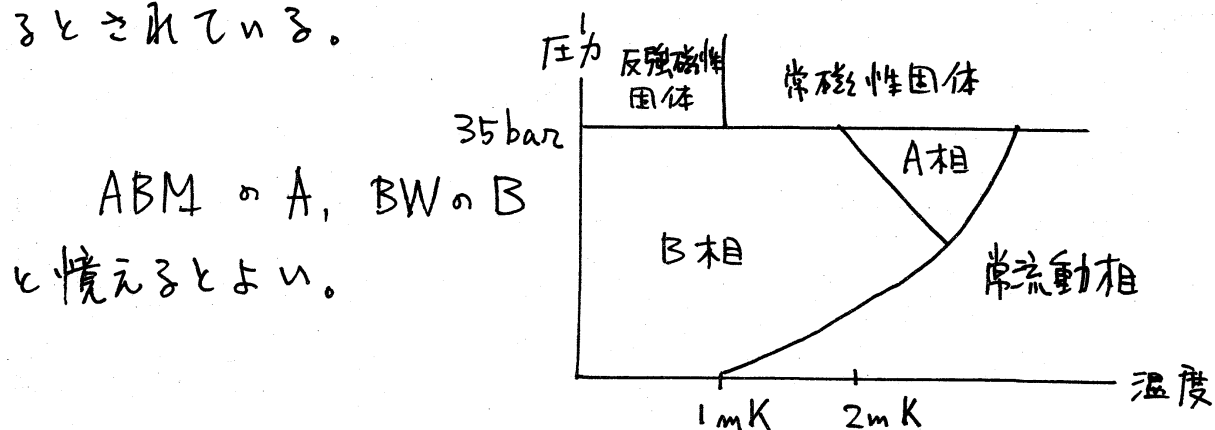
ヘリウムは閉殻電子をもつ最も単純な元素であり、室温では理想気体に近「振舞」をする。しかし極低温物理の観点からみると、ヘリウムは最も特異で興味ある元素の一つといえる。ヘリウムは質量が小さく原子間引力が弱いため、量子力学的零点振動により、常圧を含む広「圧力範囲」にあたって絶対零度まで液体状態にとどまる。ヘリウムの2つの同位元素 ^4He , ^3He のうち ^3He は自然界には極めて少なく、トリチウム(三重水素)の β 崩壊を利用して人工的に生産される。その為、 ^3He の研究が実際に可能になったのは第二次世界大戦以後のことであるといわれている。たとえば最初の液化は1948年に Sydoniak, Grilly および Hammel によって行われた。

さて、 ^4He の原子核は2個の陽子と2個の中性子から成り Bose 粒子であるのに対し、 ^3He 原子核は2個の陽子と1個の中性子から成る Fermi 粒子である。この核スピンの差からくる統計性の違いが、両者の低温における振舞いに全く異なるものにする。実際、1972年に Osheroff, Lee, Richardson により ^3He が $T_c = 2.7 \text{ mK}$ で超流動状態に転移することが観測されたが、この超流動の

出現機構は ^4He の超流動の場合とは全く異なることが明らかにされている。

^3He と同じく Fermi 粒子である金属中の伝導電子は、低温において フォノン との相互作用をなかだちにして Cooper 対を形成し、それがあたかも Bose 粒子のように振舞う。その Cooper 対たちが巨視的にもコヒーレントに振舞い超伝導状態が起こる。この 1957 年の Bardeen, Cooper, Schrieffer による超伝導理論 (BCS 理論) の建設直後から ^3He の超流動性が予言され、1961 年には Anderson と Morel、1963 年に Balian と Werthamer により ^3He の超流動の基礎理論が作られた。彼らのモデルはそれぞれ ABM モデル、BW モデルと呼ばれている。

外部磁場のない場合には、図に示すように、 ^3He は 2 つの超流動相 $^3\text{He-A}$ と $^3\text{He-B}$ を持つことが確かめられている。A 相は ABM モデル、B 相は BW モデルが対応するとされている。



BCS超伝導理論においては Cooper 対をなす2つの電子の間に働く引力は、電子-フォノン相互作用をなかだちにしたものであるが、 $^3\text{He-A}$ の場合は ^3He 原子-paramagnon^{*} 相互作用をなかだちにして Fermi 面近くの ^3He 原子が Cooper 対をなすと考えられている。✓

*もともと ^3He における paramagnon の理論は、液体 ^3He の場合、その正常相の比熱が当初 Landau の量子液体の理論から期待されるものと異なる振舞い^{振舞い}があることを説明する上で、Doniach と Engelsberg (1966) らによって導入されたものである。低温においては正常相の ^3He の核スピン帯磁率が大きな値を持ち、長波長のスピンのゆらぎが起こっており、液体 ^3He はいわば強磁性相への転移に近い状態にあると見做すことができる。これらのゆらぎが比較的長い寿命を持つことから、これをある種の磁気的素励起とみなして、paramagnon と呼んだ。Doniach と Engelsberg は、この paramagnon の仮想放出過程を考慮することにより 100 mK 以下において正常相の比熱に $\ln T$ 項があることを説明した。

↑ Layzer と Fary (1971) は ^3He -原子-paramagnon 相互作用をもとにして ^3He 原子間に働く力が、singlet 対に対しては斥力を、triplet 対に対しては引力となることを示

した。更に Anderson-Brinkman (1972) は Bardeen-Schrieffer や Doniach-Engelsberg らの理論を使って ABM モデルの安定性を論じた。

このように超流動 $^3\text{He-A}$ 相の出現機構はかなり複雑であるが、 $^3\text{He-A}$ 相の Cooper 対は スピン 1, 軌道角運動量 1 なる p 波 スピン三重項対であると考えられている。その結果、秩序パラメーターはスカラー量ではなく、大きな内部自由度を持つことになる (Volovik-Mineev (1977))。

§2. 秩序パラメーターの phase と boojums.

この節では、まず最初に超流動 $^3\text{He-A}$ 相の秩序パラメーターの phase と boojum について説明する。次に $\vec{l}$ -texture と mass current の異常項について説明する。最後に、mass current の異常項と boojums の関係、を明らかにした Volovik-Mineev (1982) の論をを紹介する。

超流動 $^3\text{He-A}$ 相の秩序パラメーターのうち軌道角運動量部分には、互いに直交する 2 つの単位ベクトル Δ_1, Δ_2 を使って、 $\text{const} \cdot (\Delta_1 + i\Delta_2)$ と表わせる。但し外積 $\Delta_1 \times \Delta_2 = \vec{l}$ は Cooper 対の軌道角運動量の量子化軸の方向を与える単位ベクトルである。

Fermi 波数を k_F で表わすに, Fermi 準粒子のエネルギー
スペクトル $E(k)$ は

$$E^2(k) = \varepsilon^2(k) + |\Delta(k)|^2$$

で与えられ, 波数 k に依存した形になる。但し

$$\varepsilon(k) = \hbar^2 (k^2/2m - k_F^2/2m)$$

$$\Delta(k) = (\Delta_0/k_F) k \cdot (\Delta_1 + i\Delta_2)$$

であり, m は質量, Δ_0 はエネルギーギャップの最大値を表
わす。特に Fermi 面上の 2 点, $k = \pm k_F \hat{x}$ (boojum
と呼ばれる) においては エネルギーギャップが消えてしま
うという性質を持つ。このことが $^3\text{He-A}$ 相を特異な
超流動相にすることをこれから説明したい。その為に
phase について説明する。

$$\arctg \left(\frac{k \cdot \Delta_2}{k \cdot \Delta_1} \right) = \Phi(k)$$

とおくと

$$\Delta(k) = |\Delta(k)| e^{i\Phi(k)}$$

となるが, 秩序パラメーターの各成分に phase factor $e^{i\alpha}$
を乗ずることは $\Phi \rightarrow \Phi + \alpha$ とおきかえることと同じにな
ることから上の $\Phi(k)$ は phase of the order parameter と

呼ばれている。しかしこの phase $\Phi(k)$ は Fermi 面上の 2 点、 $k = \pm k_F \vec{l}$ において定義される。多価函数となる。 k が boojum のまわりを一周すると 2π ほど値が変わることになる。

さて、秩序パラメーターの local symmetry axis $\vec{l}$ が空間的に一様である場合には supercurrent velocity v_s は phase Φ を使って $v_s = \frac{\hbar}{2m} \nabla \Phi$ で表わせる。従ってこの場合には phase Φ は He II 等の通常の Bose 凝縮相における phase と同じ役割を果たしているといってもよい。しかしながら、 $\vec{l}$ が空間的に一様でなく、位置 $\mathbf{r}$ に依存している場合、すなわち $\vec{l}$ -texture (織目構造) が存在する場合には Mermin-Ho (1976) が示したように一般には $\text{rot } v_s \neq 0$ であり、phase Φ の gradient として v_s を表示することはできない。実際、 v_s と $\vec{l}$ との間には

$$\nabla_i v_{sj} - \nabla_j v_{si} = \frac{\hbar}{2m} \vec{l} \cdot (\nabla_i \vec{l} \times \nabla_j \vec{l})$$

なる関係があるという。このことからわかるように、 $\vec{l}$ -texture の存在は、超流動 $^3\text{He-A}$ の基本的性質に係る。

次に、 $\vec{l}$ -texture のもとでの mass current の異常項について説明する。

通常の hydrodynamics の範囲では ${}^3\text{He-A}$ の mass current は ρ を密度とおくと

$$\rho v_s + \frac{1}{2} \text{rot} \left(\rho \frac{\hbar}{2m} \vec{l} \right)$$

で与えられる。この形ならば Galilean invariance が成立する (たとえば Wölfle (1979))。しかしながら Cross (1975), Mermin-Ho (1976), Mermin-Muzikar (1980) によると、実際の ${}^3\text{He-A}$ における巨視的 mass current は

$$\vec{j} = \rho v_s + \frac{1}{2} \text{rot} \left(\rho \frac{\hbar}{2m} \vec{l} \right) - \frac{\hbar}{2m} c_0 \vec{l} (\vec{l} \cdot \text{rot} \vec{l})$$

により与えられるという (係数 c_0 については Mermin-Muzikar を参照)。この式の第三項は Galilean invariance を破るもので異常項と呼ばれている。

Volovik-Mineev (1982) はこの異常項

$$j_{\text{anom}} = - \frac{\hbar}{2m} c_0 \vec{l} (\vec{l} \cdot \text{rot} \vec{l})$$

と boojums との関係をミクロな議論を使って明らかにした。1982年の彼らの論文の内容をこれから紹介する。

まず彼らは Green 関数に対する Gor'kov 方程式を考へ、それを gradient expansion 近似することにより、mass current について次のミクロな関係を得た。

$$\dot{j} = \frac{1}{2} \sum_k k \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial k} \frac{\partial n_k}{\partial r} - \frac{\partial n_k}{\partial k} \frac{\partial \Phi_k}{\partial r} \right)$$

ここに n_k は準粒子の分布関数を表す。次に部分積分をすることにより

$$\begin{aligned} (\#) \quad j &= \frac{1}{2} \sum_k m_k \nabla \Phi_k + \frac{1}{2} \nabla_i \left(\sum_k k n_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial k_i} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_k k n_k \left(\nabla \frac{\partial}{\partial k} - \frac{\partial}{\partial k} \nabla \right) \Phi_k \end{aligned}$$

と変形する（彼らの記号は注意しないと誤解しやすいと思うが、原論文のままの記号を用う）。上の式に

$$\Phi_k = \arctg \left(\frac{\Delta_2 \cdot k}{\Delta_1 \cdot k} \right)$$

を代入して計算を実行する。

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial k} = \frac{\vec{l} \times k}{|\vec{l} \times k|^2}$$

$$\frac{\hbar}{2m} \nabla \Phi_k = v_s + \frac{\hbar}{2m} (k \cdot \vec{l}) \frac{(k \times \vec{l}) \cdot \nabla \vec{l}}{|k \times \vec{l}|^2}$$

より (#) の右辺の第一項と第二項の和は

$$\rho v_s + \frac{1}{2} \text{rot} \left(\rho \cdot \frac{\hbar}{2m} \vec{l} \right)$$

となることが確かめられる。次に (H) の右辺の第三項を考える。 Φ_k が boojums において特異性を持つためにそこで

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial k} - \frac{\partial}{\partial k} \frac{\partial}{\partial r} \right) \Phi_k(r) = 2\pi (\vec{l} \cdot \text{rot} \vec{l}) (k \cdot \vec{l}) \delta(k_\perp)$$

但し $k_\perp = k - \vec{l}(k \cdot \vec{l})$ となり δ -関数が表われる。
この為には (H) の第三項が消える。 j_{anom} を与える

§3 Bogolyubov 方程式と chiral anomaly

前節で紹介した Volovikらの結果により, $^3\text{He-A}$ の anomalous current は Fermi 面上にエネルギーギャップの消えてしまう点 (boojums) があることに由来することが明らかにされた。1985年に発表された論文で Volovikは, $\text{rot} \vec{l} \parallel \vec{l}$ の場合を例にとり, $^3\text{He-A}$ における anomalous current が chiral anomaly と類似した仕組みによるものであることを示し, anomalous current が生じる機構をミクロな立場から明らかにした。この結果は Volovik-

Mineev (1981) らが、現象論的立場から主張していた仮説が正しいことを立証する。

この節では Volovik (1985) の論文を紹介する。記号等は原論文に従うことにしたので、前節のものとは若干異なる。

まず triplet 対に対する BCS Hamiltonian を BCS factorization 近似した effective Hamiltonian を考える。次に、それに Bogolyubov 変換を施し、次の Bogolyubov 方程式を導く。

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \frac{\hat{p}^2}{2m} - \mu & \frac{1}{2k_F} (\vec{\Delta} \hat{p} + \hat{p} \vec{\Delta}) \\ \frac{1}{2k_F} (\vec{\Delta}^* \hat{p} + \hat{p} \vec{\Delta}^*) & \mu - \frac{\hat{p}^2}{2m} \end{pmatrix}$$

但し

$$\hat{p} = \frac{1}{2} \nabla, \quad \mu \text{ は 化学ポテンシャル.}$$

wave function $\psi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ は Bogolyubov quasiparticle,

$$\vec{\Delta} = \Delta_0 (e_1(x) + i e_2(x)) \text{ において } e_1, e_2 \text{ は}$$

$$|e_1| = |e_2| = 1, \quad e_1 \perp e_2, \quad e_1 \times e_2 = \vec{z}$$

をみたすものである。

$\text{rot } \vec{\ell} \parallel \vec{\ell}$ なる場合を考えているので、秩序ブラケットを原点の近くで（一次の項まで）展開したとき

$$e_1(x) + i e_2(x) = \hat{x} + i \hat{y} - i \epsilon B x$$

の形をしていると仮定する。但し $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ はそれぞれ x 軸, y 軸, z 軸方向の単位ベクトルを表わす。このとき $\text{rot } \vec{\ell}$ は z 軸方向を向いており、 $\vec{\ell} \cdot \text{rot } \vec{\ell} = B$ となっていることに注意する。

Pauli 行列 $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ を使うと

$$\hat{H} = \sigma_3 \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} - \mu \right) + \frac{\Delta_0}{k_F} \left(\sigma_1 \hat{p}_x - \sigma_2 (\hat{p}_y - \hat{p}_z B x) \right)$$

と表わせるので

$$\psi = e^{i k_z z + i k_y y} \Phi(x)$$

とかくと Φ に対する方程式

$$\left\{ \sigma_3 \epsilon + \frac{\Delta_0}{k_F} \left(\sigma_1 \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} - \sigma_2 (k_y - k_z B x) \right) \right\} \Phi = E \Phi$$

を得る。ここで $\epsilon \equiv \frac{k_z^2}{2m} - \mu$ と考えてよい。

この方程式は "石磁場" のもとでの Dirac 型の方程式と

同等である。さてこの方程式のスペクトルは "Landau level" n を使って

$$E_{n, k_z} = \left\{ \varepsilon^2 + 2n |B k_z| \left(\frac{\Delta_0}{k_F} \right)^2 \right\}^{1/2} \text{sign } \varepsilon$$

で与えられる。対応する波動関数 Φ_n は, $B > 0$ とすると,

$k_z < 0$ のとき

$$\Phi_n = \begin{pmatrix} u_n f_n(\tilde{x}) \\ i v_n f_{n-1}(\tilde{x}) \end{pmatrix}$$

$k_z > 0$ のとき

$$\Phi_n = \begin{pmatrix} u_n f_{n-1}(\tilde{x}) \\ i v_n f_n(\tilde{x}) \end{pmatrix} \quad \text{で与えられる.}$$

但し

$$\tilde{x} = x - k_y / B k_z, \quad f_{-1} \equiv 0.$$

f_n は 調和振動の eigenfunction.

$$2u_n^2 = 1 + \frac{\varepsilon}{E_n}, \quad 2v_n^2 = 1 - \frac{\varepsilon}{E_n} \quad \text{である.}$$

こゝで $n=0$ とおくと $E_0 = \varepsilon$ となり, $v_n=0$ を得る。

従って $k_z > 0$ に対しては $n=0$ の状態が存在しないことがわかる。 $n \neq 0$ は superfluid 成分, $n=0$ は normal 成分に対応する。

"磁場" の方向である z 軸方向の current を考えると non zero Landau levels からの寄与はない。 zero Landau level の状態密度 $\nu(\epsilon)$ は ϵ に依らず $|B|/2\pi^2$ であるとする。 "磁場" 方向の current j は

$$j = \hat{z} \int_{k_z < 0} k_z \nu(\epsilon) d\epsilon = -\hat{z} \frac{k_F^3}{6\pi^2} B$$

$$= -\frac{\hbar}{2m} \cdot \text{const.} \cdot \vec{l} (\vec{l} \cdot \text{rot} \vec{l}) \quad \text{となる。}$$

従って j_{anom} は、場の理論における chiral anomaly と類似した機構によって生じることが示された。結局 $\vec{l}$ -texture が存在するときは $\text{rot} \vec{l}$ が "磁場" の役割をなし、chiral current が生じるといえる。

$^3\text{He-A}$ における anomalous current についてもっと詳しく議論や、その後の進展については Balatskii-Volovik-Konyshov (1986), Volovik (1987), Balatskii-Konyshov (1987) の論文がある。また Garg-Nair-Stone (1987), Stone-Gautan (1987) らの興味深い研究がある。

文献

- A. Abouelsaood (1985): Relation between the chiral anomaly and the quantized Hall effect. Phys Rev. Lett 54, 1973-1975
- D. Bailin & A. Love (1986): Introduction to Gauge Field Theory. Adam Hilger.
- A. V. Balatskii, G. E. Volovik & V. A. Konyshov (1986): On the chiral anomaly in superfluid $^3\text{He-A}$. Sov Phys JETP 63, 1194-1204.
- A. B. Balatskii & V. A. Konyshov (1987): The anomalous superfluid current in $^3\text{He-A}$ and the index theorem. Sov. Phys. JETP 65, 474-483.
- R. Combescot & T. Dombre (1983): Superfluid current in $^3\text{He-A}$ at $T=0$. Phys Rev. B 28, 5140-5149. (1986) Twisting in superfluid $^3\text{He-A}$ and consequences of hydrodynamics at $T=0$. Phys Rev. B 33, 78-90.
- T. Dombre & R. Combescot (1984): Excitation spectrum and superfluid density of $^3\text{He-A}$ at $T=0$: Phys Rev B 30, 3765-3769.
- A. Garg & V. P. Nair & M. Stone (1987): Non-Abelian Bosonization and topological aspects of BCS systems: Anal of Phys. 173, 149-162.

真木和美 (1986): 超流動ヘリウム3 — 最近の話題, 超低温の物性物理, 6章, 阿部・斯波共編, 培風館.

N. D. Mermin & Tu-Lun Ho (1976): Circulation and angular momentum in the A phase of superfluid Helium 3. Phys Rev. Lett 36 594-597.

N. D. Mermin & P. Muzikar (1980): Cooper pairs versus Bose condensed molecules; The ground-state current in superfluid $^3\text{He-A}$. Phys Rev B 21, 480-489.

M. M. Salomaa & G. E. Volovik (1987): Quantized vortices in superfluid ^3He . Rev. Mod. Phys 59, 533-613.

M. Stone (1985): Elementary derivation of one-dimensional fermion-number fractionalization. Phys Rev B 31, 6112-6115.

M. Stone, A. Garg & P. Muzikar (1985): Possible resolution of the angular momentum paradox: fractional charge, twist, and topology in $^3\text{He-A}$, Phys. Rev. Lett 55, 2328-2331.

M. Stone & F. Gai tan (1987): Topological charge and chiral anomalies in Fermi superfluids. Anals of Phys. 178, 89-109.

G. E. Volovik, V. P. Mineev (1981): Orbital angular momentum and orbital dynamics: $^3\text{He-A}$ and the Bose liquid. Sov Phys JETP 54, 524-530. (1982): Current in superfluid Fermi liquids and the structure of vortex cores. Sov. Phys

JETP 56. 579-586.

G. E. Volovik (1984): Superfluid properties of $^3\text{He-A}$. Sov. Phys.

Usp 27, 363-384. (1985): Normal Fermi liquid in a superfluid $^3\text{He-A}$ at $T=0$ and the anomalous current.

JETP. Lett 42, 363-367. (1987): Peculiarities in the dynamics of superfluid $^3\text{He-A}$: analog of chiral anomaly and of zero-charge. Sov. Phys. JETP. 65, 1193-1201.

G. E. Volovik & A. V. Balatskii (1985): Boojums on the Fermi surface in $^3\text{He-A}$ and Hamiltonian dynamics of the orbital momentum. J. Low Temp. Phys. 58. 1-10.

アブ"リコ"フ. エ"リコ"フ. ミ"ャロシ"スキー. 場の量子論の序法. 東京図書.

P. W. Anderson & G. Toulouse (1977): Phase slippage without vortex cores: vortex textures in superfluid ^3He . Phys. Rev. Lett 38, 508-511

P. W. Anderson. W. F. Brinkman (1978) Theory of anisotropic superfluidity in ^3He . The Physics of Liquid and Solid Helium. Part II. (ed. K. H. Benneman. J. B. Kettner) Wiley.

R. Balian & N. R. Werthamer (1963). Superconductivity with pairs in a relative p wave. Phys. Rev 131, 1553-1564

- J. Bardeen, L. N. Cooper & J. R. Schrieffer (1957): Theory of superconductivity. Phys Rev. 108, 1175-1204.
- A. L. Fetter & J. D. Walecka (1971): Quantum theory of many particle systems. McGraw-Hill.
- R. P. Feynman & A. R. Hibbs (1965): Quantum Mechanics and Path Integrals. McGraw-Hill.
- M. Göckeler & T. Schücker (1987): Differential Geometry, gauge theories, and gravity. Cambridge Univ Press.
- L. P. Gor'kov (1958): On the energy spectrum of superconductors. Sov Phys JETP 34, 505-508.
- 11-42: 固体の端へ量子論上下 吉岡書店.
- A. J. Leggett (1975): A theoretical description of the new phases of liquid ^3He : Phys Rev. Mod. Phys 47, 331-414.
- N. D. Mermin (1977): Games to play with ^3He -A. Physica 80B 1-10, (1979): The topological theory of defects in ordered media. Rev. Mod. Phys 51, 591-648. (1981): E. Pluribus boojum: the physicist as neologist. Phys Today, April 46-53.
- D. R. Tilley & J. Tilley (1986) Superfluidity and superconductivity (second ed) Adam Hilger.

- G. E. Volovik & V. P. Mineev (1977) : Investigation of singularities in superfluid ^3He in liquid crystals by the homotopy topology methods, *Sov Phys. JETP* 45, 1186-1196.
- P. Wölfle (1979) : Low-temperature properties of liquid ^3He *Rep. Prog. Phys* 42, 269-346.
- M. C. Cross (1975) : A generalized Ginzburg-Landau approach to the superfluidity of Helium 3. *J. Low. Temp. Phys* 21, 525-534.
- V. Ambegaokar, P. G. de Gennes & D. Reiner (1974) : Landau-Ginzburg equations for an anisotropic superfluid. *Phys Rev A* 9, 2676-2695