

氏 名	山 内 正 敏 やま うち まさ とし
学 位 の 種 類	理 学 博 士
学 位 記 番 号	論 理 博 第 443 号
学位授与の日付	昭 和 48 年 11 月 24 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 5 条 第 2 項 該 当
学 位 論 文 題 目	On the fields generated by certain points of finite order on Shimura's elliptic curves (志村の楕円曲線のある等分点の生成する代数体について)
	(主 査)
論文調査委員	教 授 永 田 雅 宜 教 授 中 野 茂 男 教 授 佐 藤 幹 夫

論 文 内 容 の 要 旨

有理体数 Q 上の Abel 拡大体は、1 の n 乗根を使って生成されるという事実の一般化として、虚の二次体の Abel 拡大体についての、いわゆる虚数乗法論というものがある。しかしながら、実二次体の上の Abel 拡大体については、まだよく解明されたとは云えない状態であり、もっと一般的な、Galois 拡大については、ほとんど何もわかっていなかったと云える状態であった。

最近志村五郎氏が、実二次体 $k=Q(\sqrt{q})$ (q は正の整数) の上の場合について、まずモデューラー群 $\Gamma_0(q)$ 群を考え、Hecke の意味の、weight 2 の Neben 型 cusp-form の空間 $S_2(\Gamma_0(q), \chi)$ をつくり、その上のすべての Hecke 作用素の固有函数 $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi n i z} (\epsilon S_2(\Gamma_0(q), \chi))$ を利用して、 k 上に定義された、或る Abel 多様体 B を構成し、 B の特殊な等分点が k 上の Abel 拡大体を生成することを示した。これは、上記のゆきづまりを開く、一つの進展であると考えられる。すなわち、上記 $f(z)$ の Fourier 係数 a_n が k の基本単数 ϵ の trace $tr_{k/Q}(\epsilon)$ の素因子と算術的な合同式の関係をもつことが示されている。更に、土井公二氏は、この Fourier 係数 a_n が、一般化された Bernoulli 数 $B_{2n, \chi}$ の分子の素因子 l に関連をもつことを示した。

申請者は、上記二次体 k と Abel 多様体 B について、 B の l 等分点によって生成される体 k_l を、数論的に記述することをめざしている。実際に研究したのは、 $\dim B=1$ の時に限られ、また q の値としても $q=29, 37$ の場合であるが、その結果として得られたものは Abel 拡大でない Galois 拡大の場合を含んでおり、一般の Galois 拡大の場合の理論についての、重要な手がかりを与えている。また、申請論文は、関連理論の発展が得られれば、 B の次元が高い時にも拡張できる可能性をもち、または、Neben-type の代りに Haupt-type のときにも拡張される可能性をもっている点で、この方面の研究の将来に対して、貢献するところが大きい。

論文審査の結果の要旨

申請論文は総括的に云えば保型函数の整数論への応用という分野に属する。保型函数論と整数論との関連についての研究はガウス以来整数論における重要課題を常に与え続けている。すなわち、最も典型的かつ古典的事実はクロネッカー-ウェーバー (Kronecker-Weber) の定理: 「有理数体 Q 上の任意のアーベル拡大体は適当に 1 の n 乗根を有理数体に添加することによって構成される」に端を発する。このことから自然に、次に起る問題はヒルベルトが云う通り, 「与えられた代数体上のアーベル拡大をある種の (多変数函数もこめた意味での) 解析函数の特殊値を添加することによってすべて構成し得るか」である。与えられた代数体として, 有理数体の次に当然二次体が考えられ, 特に虚二次体上の任意のアーベル拡大は, 或る種の楕円曲線の等分点の座標 (これはとりもなおさず一変数保型函数の特殊値及びワイヤストラス (Weierstrass) の p -函数の特殊値に他ならない) を添加することによって得られることを Kronecker が予想し, 高木類体論によって今世紀初頭に解決された。この方向の理論は, 現在までに拡張され続けて, いわゆるアーベル多様体の虚数乗法論につながっている。さて, 与えられた代数体が, 実二次体である場合はその上のアーベル拡大体を構成するのにどのような方法があるか, 数多くの整数論の分野の人達の疑問にもかかわらず, ごく最近 (1970年) 志村五郎氏 (Princeton 大学) によって, その糸口が見出されるまで本質的な発見がなされなかった。その糸口は再び保型函数に関連するものであり, 山内氏の研究はこの新しい発見に基づく分野で, さらにその内容を深めるいくつかの事実を与えることで注目に値するものである。

山内氏の仕事を次に概略する。その主題は保型函数から得られる代数曲線のヤコビ (Jacobi) 多様体, 或いはその部分アーベル多様体の等分点の座標を定義体に添加して得られるガロア (Galois) 拡大体の体の構造を具体的に決定することである。等分点の選び方によっては, それは上述の通りのアーベル拡大体を生ずる場合があるが, 一般にはガロア拡大となるわけで, その構造を一般的に決定することは現在整数論において一つの困難な, しかしながら非常に魅力ある問題である。ここで取り扱われるアーベル多様体は, 特に, 複素上半平面に作用する楕円モデューラー群 $\Gamma_0(N)$ (N は一つの固定した自然数) に関する保型函数から得られるものである。くわしくは, ヘッケ (Hecke) の定義した二次指標 $\chi_N = (\frac{\cdot}{N})$ に関する重さ 2 の保型形式に対し, 実二次体上 $Q(\sqrt{N})$ 上に定義されたアーベル多様体が自然に構成される (志村五郎氏による) が, 特にそのアーベル多様体の次元が 1 である場合, 主論文において特別な等分点に対し, 実二次体にその座標を添加した拡大体を決定している。ここで注意すべき点は, 上述の実二次体上のアーベル拡大を構成する問題は, やはりこの主論文で取り扱われている場合のアーベル多様体の或る種の等分点と関連している (上述, 志村五郎氏の理論がこれである)。主論文では実二次体上のアーベル拡大でない場合のガロア拡大体を始めて明確に決定しているわけである。一方, 実二次体上のアーベル拡大が, この種のアーベル多様体の等分点の添加によってどの程度多く得られるかという問題が生ずる。それに関して参考論文 “On the Hecke operators for $\Gamma_0(N)$ and class fields over quadratic number fields,” (土井公二との共著) において, 固定した自然数 N に他の自然数の平方数 M を乗じて $\Gamma_0(NM)$ をとり, これに関する指標 χ_N の保型形式を考えることにより, 上と同様の意味でのアーベル多様体の特

殊な等分点で再び $Q(\sqrt{N})$ 上の (くわしくは, M が更に分岐する) アーベル体が得られることを示している。この方法で (M を変ずることによって) 与えられた実二次体 $Q(\sqrt{N})$ 上のアーベル体が十分多く得られることが明確になった。以上は得られた結果の概略であるが、一般にこの種のアーベル多様体の等分点から生ずる拡大体の構造を決定するには、保型形式の空間に作用するヘッケ作用素の固有値をしらべることが不可欠である。そのそのために、特別な部分空間での作用素の跡 (trace) を求めることが有効である。それに関して、参考論文 “On the traces of Hecke operators for normalizer of $\Gamma_0(N)$ ” で求められた結果は有用である。

以上より、申請者の研究は、更に今後一般論の確立さるべき整数論の一分野における第一歩をふみ出したものとして注目さるべきものである。

よって、本論文は理学博士の学位論文として価値あるものと認める。

なお、審査の一部を土井公二が分担した。