

臨界現象とフラクタル

神戸大理 高安秀樹

1 はじめに

物理学はこれまで宇宙サイズの大きな極限や、素粒子のように小さいサイズの極限を調べる方向に進んできた。最近、人間のスケール程度の自然界が複雑さに満ちている事が注目されている。これら複雑な現象を数学的に記述するためにマンデルブローはフラクタルという新しい概念、つまりスケール不変性という新しい対称性に注目した。スケール不変性を持つという事は、相関関数や分布関数などの統計量 $f(X)$ が次の式を満足する事である。

$$f(\lambda x) \sim f(x) \quad (1)$$

このとき $f(x)$ はべき関数である事が示される。

$$f(x) \sim x^D \quad (2)$$

指数 D はフラクタル次元と呼ばれる。自然界の多くがフラクタルになっているという事が最近になってわかってきている。

2 フラクタル生成のメカニズム

ではなぜフラクタルになるのであろうか？統計力学の立場からは、無数の粒子の集合体であるマクロな現象を、単純化されたモデルを用いて調べる事により、フラクタルの成因が調べられつつある。フラクタルの現れるところに以下の3つがある。

1) 非線形フィードバック

簡単な微分方程式に非線形項をつけるとフラクタル構造が見えてくる事が多い。物理的な系の時間発展を記述する方程式はほとんどがこのような構造を持っている。

2) 相転移臨界点

2次相転移(パーコレーションなど)の臨界点でフラクタル構造が見える。

3) 非可逆系

放電、粒子の凝集などの非可逆系において、(臨界点など特別な点でなく)常に自動的に安定にフラクタルが存在する。

3 自己組織臨界現象

コントロールパラメータなしで、自動的にフラクタル状態を維持する自己組織臨界現象のモデルが最近多くの研究者の関心を集めている。例として、Bakの砂山モデルや浸食のシュミレーションによる川の形などを説明して頂いた。

4 不可逆系の定常状態

注入のある凝集系において定常解(べき分布)が安定に存在する。このような系は散逸が存在するような詳細釣り合いの成り立っている系と異なり、注入のみが存在する非平衡系であるから平均値や分散は発散するが、定常的なべき分布が存在し、しかも非常に強い安定性を持っている。あらっぽい言い方をすれば、自然界にフラクタルが多いのは、この世界のほとんどが非平衡状態であり、そこでフラクタルが安定に存在しているのである。

(文責 桃井 勉)