

同変実射影空間上の同変実ベクトル束について

岡山大学大学院自然科学研究科 祁 艶 (QI, Yan)
Graduate School of Natural Science and Technology
Okayama University

1. 序節

この論文では G は有限群とする. (有限次元の) 実 G -加群 V に対して, $S(V)$ は V の G -不変な内積に関する単位球面を表し, $P(V)$ は同変実射影空間 $S(V)/\{\pm 1\}$ を表す. G -空間 M と実 G -加群 V に対して $\varepsilon_M(V)$ は底空間を M , 全空間を $M \times V$ とする直積束と呼ばれる同変ベクトル束を表す. $\mathbb{R}^n$ は自明な G -作用を持つ n -次元ユークリッド空間 (実 G -加群) を表す. M が (可微分) 多様体であるとき $T(M)$ は M の同変接ベクトル束を表す. また $M = P(V)$ のとき, γ_M は M 上の同変標準直線束を表し, $\gamma_M^\perp$ は γ_M の $\varepsilon_M(V)$ における (V の G -不変な内積に関する) 直交補 (ベクトル) 束を表し, 従って γ_M の全空間 $E(\gamma_M)$ は

$$\{(\{\pm x\}, v) \mid x \in S(V), v \in \mathbb{R} \cdot x (\subset V)\}$$

であり, $\gamma_M \oplus \gamma_M^\perp = \varepsilon_M(V)$ である.

以下の定理が成り立つ.

Theorem 1. G -加群 V , $M = P(V)$, $\gamma = \gamma_M$ に対して, 以下の (1)-(5) が成り立つ.

- (1) $\text{Hom}(\gamma, \gamma) = \varepsilon_M(\mathbb{R})$.
- (2) $\text{Hom}(\gamma, \varepsilon_M(\mathbb{R})) = \gamma$.
- (3) $T(M) = \text{Hom}(\gamma, \gamma^\perp)$.
- (4) $T(M) \oplus \varepsilon_M(\mathbb{R}) = \text{Hom}(\gamma, \varepsilon_M(V))$.
- (5) $\text{Hom}(\gamma, \varepsilon_M(V)) = \gamma \otimes V$.

Theorem 2. G は奇数位数の巡回群, V は原点以外で自由な G -作用を持つ 2-次元実 G -加群, γ は同変実射影平面 $M = P(\mathbb{R} \oplus V)$ 上の同変標準直線束とする. このとき $\gamma^{\oplus 4}$ は G -ベクトル束 $\varepsilon_M(\mathbb{R}^4)$ に G -同型である.

注意 任意の自然数 k に対して, $\gamma^{\oplus 2} \oplus \varepsilon_M(\mathbb{R}^k)$ は $\varepsilon_M(\mathbb{R}^{k+2})$ と (G -作用を忘れた) 実ベクトル束として同型ではない. この事実は $\gamma^{\oplus 2}$ の全 Stiefel-Whitney 類が自明でないことからわかる (詳細は [MS74] の第 4 章に記述してある).

Theorem 3. G は奇数位数の巡回群, V は原点以外で自由な G -作用を持つ 2-次元実 G -加群とする. このとき同変実射影平面 $M = P(\mathbb{R} \oplus V)$ の接ベクトル束 $T(M)$ に対し, $T(M)^{\oplus 4} \oplus \varepsilon_M(\mathbb{R}^4)$ は $\varepsilon_M(V^{\oplus 4}) \oplus \varepsilon_M(\mathbb{R}^4)$ に G -同型である. 従って,

$$4[T(M)] = 0 \quad \text{in } \widehat{KO}_G(M).$$

これらの定理はすでに知られているものと思うが, 球面上の G -作用 (特に Smith Problem) の研究において重要であるため, この論文で具体的手法による証明を与える.

2. 同変標準直線束

この節では定理 1 の証明を与える. G は有限群, V は (有限次元) 実 G -加群, $S(V)$ は G -不変な内積 $\langle -, - \rangle$ に関する単位球面, $M = P(V)$ は同変実射影空間 $S(V)/\{\pm 1\}$, γ_M は同変標準直線束とする. 点 $x \in S(V)$ に対し, $L_{[x]}$ は 2 点 $\pm x$ を通る V 内の直線を表す. $L_{[x]}^\perp$ をその直交補空間となるものとする.

2.1 G -ベクトル束 $\text{Hom}(\gamma_M, \gamma_M)$. ベクトル束 $\xi = \text{Hom}(\gamma_M, \gamma_M)$ の全空間 $E(\xi)$ は $\bigcup_{[x] \in M} \text{Hom}(F_{[x]}(\gamma_M), F_{[x]}(\gamma_M))$ である. ここで $x \in S(V)$ で, $F_{[x]}(\gamma_M)$ は γ_M の点 $[x]$ 上のファイバーを表す. ベクトル束 ξ の射影 $\pi : E(\xi) \rightarrow M$ は $f \in \text{Hom}(F_{[x]}(\gamma_M), F_{[x]}(\gamma_M))$ に対して $\pi(f) = [x]$ である. $E(\xi)$ 上の G -作用は $g \in G$, $f \in \text{Hom}(F_{[x]}(\gamma_M), F_{[x]}(\gamma_M))$ に対して $gf \in \text{Hom}(F_{[gx]}(\gamma_M), F_{[gx]}(\gamma_M))$ を

$$(gf)([gx], gv) = ([gx], gf(g^{-1}(gv))) = ([gx], gf(v))$$

と定める. これらの定義を用いると ξ が G -ベクトル束であることが確かめられる.

2.2 G -ベクトル束 $\varepsilon_M(\mathbb{R}^n)$. 自然数 n に対し, ベクトル束 $\varepsilon = \varepsilon_M(\mathbb{R}^n)$ の全空間 $E(\varepsilon)$ は $\{([x], b) \mid [x] \in M, b \in \mathbb{R}^n\}$ である. ベクトル束 ε の射影 $\pi : E(\varepsilon) \rightarrow M$ は $\pi([x], b) = [x]$, $[x] \in M, b \in \mathbb{R}^n$ である. $E(\varepsilon)$ 上の G -作用は, $g \in G$, $([x], b) \in E(\varepsilon)$ に対して $g([x], b) = ([gx], b)$ で与えられる. すると, これらを用いて ε が G -ベクトル束であることが確かめられる.

2.3 同型写像 $\text{Hom}(\gamma_M, \gamma_M) \rightarrow \varepsilon_M(\mathbb{R})$. 束写像 $\varphi : \text{Hom}(\gamma_M, \gamma_M) \rightarrow \varepsilon_M(\mathbb{R})$ を以下のよう
に定める. 今 $f \in \text{Hom}(F_{[x]}\gamma_M, F_{[x]}\gamma_M)$, $x \in S(V)$ としよう. このとき, $f(x) = tx$
となる実数 t が定まる. 実際 G -不変な内積 $\langle -, - \rangle$ を用いれば, $t = \langle f(x), x \rangle$ である.
そこで

$$\varphi(f) = ([x], t)$$

と定義する. この $\varphi : \text{Hom}(\gamma_M, \gamma_M) \rightarrow \varepsilon_M(\mathbb{R})$ は G -ベクトル束の間の同変束写像である
ことが確かめられる.

2.4 G -ベクトル束 $\text{Hom}(\gamma_M, \varepsilon_M(\mathbb{R}^n))$. 自然数 n に対して, ベクトル束 $\eta = \text{Hom}(\gamma_M, \varepsilon_M(\mathbb{R}^n))$
の全空間 $E(\eta)$ は

$$\bigcup_{[x] \in M} \text{Hom}(F_{[x]}(\gamma_M), F_{[x]}(\varepsilon_M(\mathbb{R}^n)))$$

である. ベクトル束 η の射影 $\pi : E(\eta) \rightarrow M$ は $\pi(f) = [x]$ である. 全空間 $E(\eta)$ 上の G -
作用は, $g \in G$, $f \in \text{Hom}(F_{[x]}(\gamma_M), F_{[x]}(\varepsilon_M(\mathbb{R}^n)))$ に対して, $gf \in \text{Hom}(F_{[gx]}(\gamma_M), F_{[gx]}(\varepsilon_M(\mathbb{R}^n)))$
を $(gf)([gx], gv) = ([gx], f(g^{-1}(gv))) = ([gx], f(v))$, $v \in F_{[x]}(\gamma_M)$ と与える. これらの定
義を用いて η が G -ベクトル束であることが確かめられる.

2.5 同型写像 $\text{Hom}(\gamma_M, \varepsilon_M(\mathbb{R})) \rightarrow \gamma_M$. 束写像 $\varphi : \text{Hom}(\gamma_M, \varepsilon_M(\mathbb{R})) \rightarrow \gamma_M$ を, 要素
 $f \in \text{Hom}(F_{[x]}\gamma_M, F_{[x]}\varepsilon_M(\mathbb{R}))$, $x \in S(V)$ に対して,

$$\varphi(f) = ([x], (f(x))x)$$

と定義する. この定義を用いて $\varphi : \text{Hom}(\gamma_M, \varepsilon_M(\mathbb{R})) \rightarrow \gamma_M$ が G -ベクトル束の間の同
変束写像であることが確かめられる.

2.6 G -ベクトル束 $T(M)$. M は実 G -加群 W に G -同変に埋め込まれているとしよ
う. 点 $[x] \in M$ の接ベクトル空間 $T_{[x]}(M)$ は W の部分空間とみなすことができる.
 M の接ベクトル束 $\tau = T(M)$ の全空間 $E(\tau)$ は $\{([x], v) \mid [x] \in M, v \in T_{[x]}(M)\}$ で
ある. ここで $T_{[x]}(M)$ は点 $[x] \in M$ の接ベクトル空間である. 接ベクトル束 τ の射
影 $\pi : E(\tau) \rightarrow M$ は $\pi([x], v) = [x]$ である. 全空間 $E(\tau)$ 上の G -作用は, $g \in G$,
 $v \in T_{[x]}(M)$ に対して $g([x], v) = ([gx], gv)$ と与えられる. ここで $v \in W$ とみなしてい
るので $gv \in W$ である. この定義を用いて $T(M)$ が G -ベクトル束であることを確かめ
られる.

2.7 G -ベクトル束 $\text{Hom}(\gamma_M, \gamma_M^\perp)$. ベクトル束 $\gamma' = \gamma_M^\perp$ の全空間 $E(\gamma')$ は $\{([x], v) \in M \times V \mid \langle x, v \rangle = 0\}$ であり, ベクトル束 γ' の射影は $([x], v) \mapsto [x]$ である. ベクトル束 $\xi = \text{Hom}(\gamma_M, \gamma_M^\perp)$ の全空間 $E(\xi)$ は $\bigcup_{[x] \in M} \text{Hom}(F_{[x]}(\gamma_M), F_{[x]}(\gamma_M^\perp))$ である. ベクトル束 ξ の射影 $\pi : E(\xi) \rightarrow M$ は $\pi(f) = [x]$ である. 全空間 $E(\xi)$ 上の G -作用は, $g \in G, f \in \text{Hom}(F_{[x]}(\gamma_M), F_{[x]}(\gamma_M^\perp))$ に対して, $gf \in \text{Hom}(F_{[gx]}(\gamma_M), F_{[gx]}(\gamma_M^\perp))$ を $(gf)([gx], gv) = ([gx], gf(g^{-1}(gv))) = ([gx], gf(v)), v \in F_{[x]}(\gamma_M)$ とする. これらの定義を用いて ξ が G -ベクトル束であることが確かめられる.

2.8 同型写像 $T(M) \rightarrow \text{Hom}(\gamma_M, \gamma_M^\perp)$. ベクトル束 $\tau = T(M)$ と $\tau' = T(S(V))$ の全空間 $E(\tau), E(\tau')$ について考える. 2点 $(x, v), (y, w) \in E(\tau'), (x, y \in S(V), v \in T_x(S(V)), w \in T_y(S(V))$ に対して,

$$(x, v) \sim (y, w) \Leftrightarrow \{x = y \text{ かつ } v = w\} \text{ また } \{x = -y \text{ かつ } v = -w\}$$

と定義すると, 自然な同一視 $E(\tau) = E(\tau') / \sim$ が得られる. つまり, $E(\tau) = \{\pm\{(x, v)\} \mid x \in S(V), v \in T_x S(V)\}$ とみなせる. 束写像 $\varphi : T(M) \rightarrow \text{Hom}(\gamma_M, \gamma_M^\perp)$ を

$$\varphi(\{\pm(x, v)\})(\alpha x) = \alpha v \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

と定義する. この定義を用いて $\varphi : T(M) \rightarrow \text{Hom}(\gamma_M, \gamma_M^\perp)$ が G -ベクトル束の間の同変束写像であることが確かめられる.

2.9 G -ベクトル束 $\text{Hom}(\gamma_M, \varepsilon_M(V))$. ベクトル束 $\xi' = \text{Hom}(\gamma_M, \varepsilon_M(V))$ の全空間 $E(\xi')$ は

$$\bigcup_{[x] \in M} \text{Hom}(F_{[x]}(\gamma_M), F_{[x]}(\varepsilon_M(V)))$$

である. ベクトル束 ξ' の射影 $\pi : E \rightarrow M$ は $f \in \text{Hom}(F_{[x]}(\gamma_M), F_{[x]}(\varepsilon_M(V)))$ に対して, $\pi(f) = [x]$ である. 全空間 $E(\xi')$ 上の G -作用は, $g \in G, f \in \text{Hom}(F_{[x]}(\gamma_M), F_{[x]}(\varepsilon_M(V)))$ に対して, $gf \in \text{Hom}(F_{[gx]}(\gamma_M), F_{[gx]}(\varepsilon_M(V)))$ を

$$(gf)([gx], gv) = ([gx], gf(g^{-1}(gv))) = ([gx], gf(v)) \quad (v \in L_{[x]})$$

と与える. これらの定義を用いて ξ' が G -ベクトル束であることが確かめられる.

2.10 同型写像 $T(M) \rightarrow \text{Hom}(\gamma_M, \varepsilon_M(V))$. 部分節 2.3, 2.8 より,

$$\begin{aligned} T(M) \oplus \varepsilon_M(\mathbb{R}) &\cong \text{Hom}(\gamma_M, \gamma_M^\perp) \oplus \text{Hom}(\gamma_M, \gamma_M) \\ &\cong \text{Hom}(\gamma_M, \gamma_M^\perp \oplus \gamma_M) \\ &\cong \text{Hom}(\gamma_M, \varepsilon_M(V)). \end{aligned}$$

2.11 同型写像 $\text{Hom}(\gamma_M, \varepsilon_M(V)) \rightarrow \gamma_M \otimes \varepsilon_M(V)$. 束写像 $\varphi : \text{Hom}(\gamma_M, \varepsilon_M(V)) \rightarrow \gamma_M \otimes \varepsilon_M(V)$ を, 要素 $f \in \text{Hom}(F_{[x]}\gamma_M, F_{[x]}\varepsilon_M(V))$ に対して,

$$\varphi(f) = ([x], v \otimes f(v))$$

と定義する. この定義を用いて $\varphi : \text{Hom}(\gamma_M, \varepsilon_M(V)) \rightarrow \gamma_M \otimes \varepsilon_M(V)$ が G -ベクトル束の間の同変束写像であることが確かめられる.

3. 同変実射影平面上の同変標準直線束

この節では定理 2 の証明を行うので, その準備から始める.

G は有限群, X は G -空間とする. さらに X は閉 G -部分集合 Y と Z の和集合で, Y における $Y \cap Z$ の G -閉近傍 N が G -同相写像 $\phi : N \rightarrow (Y \cap Z) \times [0, 1]$;

$$\phi(y) = (\phi_1(y), \phi_2(y)) \quad (y \in N, \phi_1(y) \in Y \cap Z, \phi_2(y) \in [0, 1]),$$

で $\phi^{-1}((Y \cap Z) \times [0, 1])$ は Y の開部分集合で, また, $\phi(y) = (y, 0)$ ($y \in Y \cap Z$) を満たすものを持つと仮定する. ここで, G は 閉空間 $[0, 1]$ に自明に作用するものとする.

今, ξ は X 上の n -次元実 G -ベクトル束で, $\xi|_Y, \xi|_Z$ はそれぞれ G -ベクトル束 $\varepsilon_Y(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon_Z(\mathbb{R}^n)$ と同型で, $(e_1, \dots, e_n)$ と $(f_1, \dots, f_n)$ は $\xi|_Y$ と $\xi|_Z$ のそれぞれの標準直交 framing とする. このとき, $(e_1, \dots, e_n)$ と $(f_1, \dots, f_n)$ は G -同変である. すなわち, 任意の $g \in G$ に対して $e_j(gy) = ge_j(y)$, $y \in Y$, $f_j(gz) = gf_j(z)$, $z \in Z$ が成り立つ. このとき, $Y \cap Z$ から直交群 $O(n)$ への G -不変な行列関数 $A = [a_{ij}]$ が次のようにして定められる.

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ji}(x) e_j(x) \quad (x \in Y \cap Z, i = 1, \dots, n).$$

Lemma 4. もし $A : Y \cap Z \rightarrow O(n)$ が単位行列への定値写像と G -ホモトピックであれば, ξ は自明 G -ベクトル束 $\varepsilon_X(\mathbb{R}^n)$ と同型である.

Proof. $B : Y \cap Z \rightarrow O(n)$ を単位行列を値とする定値写像とする. A と B が G -ホモトピックであることを用いて, $(f_1, \dots, f_n)$ は X 上の G -同変な framing に拡張できることを示そう.

A と B が G -ホモトピックであるから, 次の条件を満たす連続写像 $H : Y \cap Z \times [0, 1] \rightarrow O(n)$; $H(x, t) = (h_{ij}(x, t))$, $x \in Y \cap Z$, $t \in [0, 1]$ が存在する:

$$\begin{cases} H(x, 0) = A(x) & (x \in Y \cap Z) \\ H(x, 1) = B(x) & (x \in Y \cap Z) \\ H(gx, t) = H(x, t) & (x \in Y \cap Z, t \in [0, 1]). \end{cases}$$

そこで N 上の framing $(k_1, \dots, k_n)$ を

$$(k_1(x), \dots, k_n(x)) = (e_1(x), \dots, e_n(x))H(\phi_1(x), \phi_2(x))$$

とする. つまり

$$k_i(x) = \sum_{j=1}^n h_{ji}(\phi_1(x), \phi_2(x))e_j(x)$$

と定めると以下の (1)–(3) が確かめられる.

(1) $(k_1, \dots, k_n)$ の G -同変性:

$$\begin{aligned} (k_1(gx), \dots, k_n(gx)) &= (e_1(gx), \dots, e_n(gx))H(\phi_1(gx), \phi_2(gx)) \\ &= (ge_1(x), \dots, ge_n(x))H(g\phi_1(x), g\phi_2(x)) \\ &= (ge_1(x), \dots, ge_n(x))H(\phi_1(x), \phi_2(x)) \\ &= (gk_1(x), \dots, gk_n(x)). \end{aligned}$$

(2) $\phi_2(x) = 0$ のとき:

$$\begin{aligned} (k_1(x), \dots, k_n(x)) &= (e_1(x), \dots, e_n(x))H(x, 0) \\ &= (e_1(x), \dots, e_n(x))A(x) \\ &= (f_1(x), \dots, f_n(x)). \end{aligned}$$

(3) $\phi_2(x) = 1$ のとき:

$$\begin{aligned} (k_1(x), \dots, k_n(x)) &= (e_1(x), \dots, e_n(x))H(\phi_1(x), 1) \\ &= (e_1(x), \dots, e_n(x))B(\phi_1(x)) \\ &= (e_1(x), \dots, e_n(x)). \end{aligned}$$

これより $(f_1, \dots, f_n)$ は X 上の G -同変 framing に拡張できることが分かる. よって G -ベクトル束 ξ と自明 G -ベクトル束 $\varepsilon_X(\mathbb{R}^n)$ は同型である. $\square$

この節の残りでは, G は奇数位数 p の巡回群で, V は原点以外で G の作用が自由である 2 次元の実 G -加群, $W = \mathbb{R} \oplus V$, γ は実射影平面 $M = P(W)$ 上の標準直線束, $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とする. G の生成元 g_0 と V の基底 $\{v_1, v_2\}$ は

$$g_0(v_1, v_2) = (v_1, v_2) \begin{pmatrix} \cos 2\pi/p & -\sin 2\pi/p \\ \sin 2\pi/p & \cos 2\pi/p \end{pmatrix}$$

を満たすものを選ぶ. 従って, V を複素ベクトル空間 $\mathbb{C}$ とみなすとき

$$g_0 z = \exp(2\pi\sqrt{-1}/p)z \quad (z \in \mathbb{C})$$

である.

実射影平面 $M = P(W)$ の点 $[x]$ は

$$[x] = [\cos t, (\sin t)z]$$

と表される. ここで $z \in S^1$, $t \in \mathbb{R}$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ である. そこで,

$$Y = \{[\cos t, (\sin t)z] \mid z \in S^1, 0 \leq t \leq \pi/4\},$$

$$Z = \{[\cos t, (\sin t)z] \mid z \in S^1, \pi/4 \leq t \leq \pi/2\}$$

とおく. Y は円板 D^2 と G -同相で, Z はメビウスの帯と G -同相である. G の S^1 への作用は $g_0 z = \exp(2\pi\sqrt{-1}/p)z$ とする. このとき

$$Y \cap Z = \left\{ \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}z \right] \mid z \in S^1 \right\}$$

であるから,

$$\psi : Y \cap Z \rightarrow S^1$$

を

$$\psi \left(\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}z \right] \right) = z$$

と定めると, ψ は G -同相写像であることが確かめられる. ここで G -束写像 $\varphi_Y : \varepsilon_Y(\mathbb{R}^2) \rightarrow (\gamma \oplus \gamma)|_Y$ を

$$(b, r_1, r_2) \rightarrow (b, r_1 a, r_2 a)$$

で与える. ただし, $a = (\cos t, (\sin t)z)$, $0 \leq t \leq \pi/4$, $z \in S^1$, $b = [a] \in M$ である. また, G -束写像 $\varphi_Z : \varepsilon_Z(\mathbb{R}^2) \rightarrow (\gamma \oplus \gamma)|_Z$ を

$$(b, r_1, r_2) \rightarrow (b, (r_1 \cos(p\theta) - r_2 \sin(p\theta))a, (r_1 \sin(p\theta) + r_2 \cos(p\theta))a)$$

で与える. ただし, $a = (\cos t, (\sin t)z)$, $\pi/4 \leq t \leq \pi/2$, $z \in S^1$, $b = [a] \in M$ である. このとき, 標準 framing は

$$\begin{cases} e_1(b) = \varphi_Y(b, 1, 0) \\ e_2(b) = \varphi_Y(b, 0, 1) \end{cases} \quad \text{と} \quad \begin{cases} f_1(b) = \varphi_Z(b, 1, 0) \\ f_2(b) = \varphi_Z(b, 0, 1) \end{cases}$$

である. 明らかに $\{e_1, e_2\}$, $\{f_1, f_2\}$ は共に G -同変である. このとき, 点 $b = [a] = [\cos t, (\sin t)z] \in Y \cap Z$, $t = \pi/4$, $z = \cos \theta + i \sin \theta$ に対して,

$$(f_1(b), f_2(b)) = (e_1(b), e_2(b))A_{\gamma \oplus 2}(b)$$

をみたす 2 行 2 列の行列値関数 $A_{\gamma \oplus 2} = [a_{ij}] : Y \cap Z \rightarrow O(2)$ を求めてみよう. すなわち,

$$\begin{pmatrix} \cos(p\theta)a & -\sin(p\theta)a \\ \sin(p\theta)a & \cos(p\theta)a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}(b) & a_{12}(b) \\ a_{21}(b) & a_{22}(b) \end{pmatrix}$$

をみたす $[a_{ij}(b)]$ を求める. このとき,

$$\begin{cases} a \cdot a_{11}(b) = \cos(p\theta)a \\ a \cdot a_{12}(b) = -\sin(p\theta)a \\ a \cdot a_{21}(b) = \sin(p\theta)a \\ a \cdot a_{22}(b) = \cos(p\theta)a \end{cases}$$

であるから,

$$A_{\gamma \oplus 2}(b) = \begin{pmatrix} \cos(p\theta) & -\sin(p\theta) \\ \sin(p\theta) & \cos(p\theta) \end{pmatrix} \quad (b = [a], a = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \theta + i \sin \theta))).$$

この形から, 任意の $b \in Y \cap Z$ に対して, $A_{\gamma \oplus 2}(b) \in SO(2)$ であるとわかる. 従って, $A_{\gamma \oplus 4} : Y \cap Z \rightarrow SO(4)$ は

$$A_{\gamma \oplus 4}(b) = \begin{pmatrix} A_{\gamma \oplus 2}(b) & 0 \\ 0 & A_{\gamma \oplus 2}(b) \end{pmatrix} \quad (b \in Y \cap Z)$$

である.

以下において, $A_{\gamma \oplus 4}$ は定値写像と G -ホモトピックであることを示す. 可換図式

$$\begin{array}{ccc} Y \cap Z & \xrightarrow{A_{\gamma \oplus 4}} & SO(4) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (Y \cap Z)/G & \xrightarrow{A_{\gamma \oplus 4}/G} & SO(4)/G = SO(4) \end{array}$$

より, ホモトピー類 $[A_{\gamma \oplus 4}/G] \in [(Y \cap Z)/G, SO(4)]$ を調べることによって, G -ホモトピー類 $[A_{\gamma \oplus 4}] \in [Y \cap Z, SO(4)]^G$ を調べることができる. また $Y \cap Z$ と S^1 を写像 ψ で

同一視する：

$$\begin{array}{ccc} Y \cap Z & \xrightarrow{\psi} & S^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ (Y \cap Z)/G & \xrightarrow{\psi/G} & S^1/G. \end{array}$$

$(Y \cap Z)/G$ は S^1 と同相であるから, $[Y \cap Z, SO(4)]^G \cong [(Y \cap Z)/G, SO(4)] \cong \pi_1(SO(4)) \cong \mathbb{Z}/2$ である.

$$\begin{aligned} [A_{\gamma^{\oplus 4}}/G] &= \left[\begin{pmatrix} A/G & 0 \\ 0 & A/G \end{pmatrix} \right] \\ &= \left[\begin{pmatrix} A/G & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A/G \end{pmatrix} \right] \\ &= 2 \left[\begin{pmatrix} A/G & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \right] \in [(Y \cap Z)/G, SO(4)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって, $[A_{\gamma^{\oplus 4}}] = 0$ in $[Y \cap Z, SO(4)]^G$ である. つまり, $A_{\gamma^{\oplus 4}}$ と定値写像は G -ホモトピックである. 命題 4 より, G -ベクトル束 $\gamma^{\oplus 4}$ は自明 G -ベクトル束 $\varepsilon_M(\mathbb{R}^4)$ と同型であることが従う.

次に定理 3 を証明する. 定理 1 の (4) より,

$$T(M) \oplus \varepsilon_M(\mathbb{R}) = \text{Hom}(\gamma, \varepsilon_M(V \oplus \mathbb{R})).$$

であるから,

$$\begin{aligned} (T(M) \oplus \varepsilon_M(\mathbb{R}))^{\oplus 4} &= \text{Hom}(\gamma^{\oplus 4}, \varepsilon_M(V \oplus \mathbb{R})) \\ &= \gamma^{\oplus 4} \otimes \varepsilon_M(V \oplus \mathbb{R}) \\ &= \varepsilon_M(\mathbb{R}^4) \otimes \varepsilon_M(V \oplus \mathbb{R}) \\ &= (\varepsilon_M(\mathbb{R}^4) \otimes \varepsilon_M(V)) \oplus (\varepsilon_M(\mathbb{R}^4) \otimes \varepsilon_M(\mathbb{R})) \\ &= \varepsilon_M(V^{\oplus 4}) \oplus (\varepsilon_M(\mathbb{R}^4)). \end{aligned}$$

よって, 定理 3 が示された.

REFERENCES

- [MS74] John W. Milnor and James D. Stasheff. Characteristic Classes, Annals of Mathematics Studies, No. 76. Princeton University Press, Princeton, N. J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1974.

E-mail address: qiyan@math.okayama-u.ac.jp