

# Milnor fiber の連結性 と Singularity の次元

東大 教養 加 藤 十 吉  
東大 理 松 本 幸 夫

## § 1. 序

$\mathbb{C}^{(n+1)}$  中の Algebraic hypersurface の, 局所的な性質を調べるための有力な道具に, Milnor の導入した fibering の構造がある.  $f: \mathbb{C}^{(n+1)} \rightarrow \mathbb{C}$  を  $f(0)=0, (\text{grad } f)_0 = 0$  をみたす多項式とする. (もっと一般に正則函数としてよい.)  $V^{(n)} = f^{-1}(0)$  と書く.  $S_\varepsilon^{2n+1}$  で原点  $0$  を中心とし半径  $\varepsilon > 0$  の球面を表わし,  $K = S_\varepsilon^{2n+1} \cap V^{(n)}$  とおく.

$\varepsilon > 0$  を充分小にとると

$$\varphi = \frac{f}{\|f\|} : (S_\varepsilon^{2n+1} - K) \longrightarrow S^1$$

は fiber bundle の構造を持つというのが Milnor の主要定理であった. 以後  $F$  で  $\varphi$  の fiber を表わす.

$f$  の critical points set を  $\Sigma(f)$  としよう.

$$\Sigma(f) = \{ \mathfrak{x} \in \mathbb{C}^{(n+1)} \mid (\text{grad } f)_{\mathfrak{x}} = 0 \}.$$

$\Sigma(f)$  の原点  $0$  に於ける germ の複素次元を  $\lambda$  とするとき, 我

この主な定理は次のように述べられる。

定理 1.  $\pi_i(F) = 0$  for  $i \leq n - s - 1$  である。

とくに  $s = 0$  の場合 (i.e. isolated critical point),  $F$  は  $n - 1$ -connected となり、Milnor の結果 [2] に一致する。上の定理の最初の形は K. Saito によって予想された。

系:  $M^{(n+1)}$  を complex manifold,  $T \subset \mathbb{C}^1$  を原点を含む領域,  $p: M^{(n+1)} \rightarrow T$  を proper holomorphic map とする。 $p$  の critical value は原点だけとする。  $F_t = p^{-1}(t)$  と置く。そのときもし  $t \neq 0$  が 0 に充分近ければ,  $(n-s)$ -connected map  $F_t \rightarrow F_0$  が存在する。ただし  $s = \dim_{\mathbb{C}} \{z \in F_0 \mid (\text{grad } p)_0 = 0\}$ 。

Hypersurface の Whitney stratification の構造を利用して,  $n$  に関する induction を行うことが証明の方針である。

## § 2. Whitney stratification. (Cf. Mather [3].)

$N$  次元 Euclid 空間  $\mathbb{R}^N$  (又は  $C^\infty$ -manifold  $M^N$ ) の subset  $W$  が Whitney-stratified set であるとは

1)  $W$  は smooth submanifolds の族  $\mathcal{X} = \{X_i\}$  によって cover される:  $W = \bigcup_i X_i$ , 但し  $X_i \cap X_j = \emptyset$  ( $i \neq j$ ).

各  $X_i$  は connected と仮定する。各々の  $X_i$  は stratum と呼ばれる。

2)  $\mathcal{A}$  は locally finite family である。

3) frontier condition:  $\forall X \in \mathcal{A}$  について,  $\overline{X} - X$  は strata の和集合として表わせる。  $Y \in \mathcal{A}$  が  $\overline{X} - X$  に含まれることを記号で  $Y < X$  と書く。

4) Whitney conditions: (a)  $Y < X$  とする。  $X$  の点列  $\{p_i\}$  が  $Y$  の点  $p$  に収束し,  $p_i$  に於ける  $X$  の tangent space  $T_{p_i}X$  が  $\text{Grass}(N, \dim X)$  の中である plane  $\tau$  に収束したとする。  $X$  のとき  $\tau \supset T_p Y$  でなければならぬ。

(b)  $Y < X$  とする。  $X$  の点列  $\{p_i\}$  と,  $Y$  の点列  $\{q_i\}$  がともに  $Y$  の点  $q$  に収束したとする。  $T_{p_i}(X)$  が plane  $\tau$  に収束し, 直線  $\overline{p_i q_i}$  が直線  $\ell$  に収束すれば,  $\ell \subset \tau$  でなければならぬ。

Whitney-stratified set を以後 W.S. set とよぶ。

補題 1.  $W \subset \mathbb{R}^N$  を W.S. set とし,  $p \in W$  を  $W$  の 1 点とする。 $p$  を中心とし, 半径  $\varepsilon$  の充分小さい sphere  $S_\varepsilon^{N-1}$  をとると,

$$K = W \cap S_\varepsilon^{N-1}$$

は再び W.S. set の構造を持つ。

証明:  $X$  を  $W$  の任意の stratum とすると,  $X \cap S_\varepsilon^{N-1}$  は

Smooth manifold になることを示す。  $p \in X$  なら明白だから  $p \in Y \subset X$  として示せばよい。もし  $\varepsilon$  をどんなに小さくとっても,  $X$  と  $S_\varepsilon^{N-1}$  とが transverse でない点  $p_\varepsilon$  が存在したとすれば,  $\exists v_\varepsilon \in T_{p_\varepsilon}(\mathbb{R}^N)$  s.t.  $v_\varepsilon \perp T_{p_\varepsilon}(S_\varepsilon^{N-1})$  かつ  $v_\varepsilon \perp T_{p_\varepsilon}(X)$ . 点  $p$  と  $p_\varepsilon$  を結ぶ直線  $\lambda_\varepsilon$  は  $v_\varepsilon$  を含むこと, は明らかである。ゆえに  $\lambda_\varepsilon \perp T_{p_\varepsilon}(X)$ . このような点列  $\{p_\varepsilon\}$  から部分列をえらんで  $\{p_i\}$  と名付け,  $\lambda_{p_i} \xrightarrow{\exists} \lambda$ ,  $T_{p_i}(X) \xrightarrow{\exists} T$  となるようにできる。すると,  $\lambda \perp T$  であるから, Whitney condition (b) に反する。結局  $\varepsilon > 0$  を充分小にとれば,  $S_\varepsilon^{N-1}$  と  $X$  は transverse に交わる。Smooth manifold  $K_X = X \cap S_\varepsilon^{N-1}$  達が  $K$  の strata になるのである。W.S. set の他の条件も同様に示される。

### Tubular neighbourhood System.

W.S. set  $W \subset \mathbb{R}^N$  に対して次の条件を満足する tubular neighbourhood system が構成される。(Mather [3].)

$$1) \mathcal{J} = \{ \{T_X\}, \{\pi_X\}, \{p_X\} \}.$$

$\pi_X: |T_X| \rightarrow X$  は closed disk bundle.

$p_X: |T_X| \rightarrow \mathbb{R}_+$  は Tubulen function.  $\mathbb{R}_+ = \{x | x \geq 0\}$ .

$$2) \pi_X \circ \pi_Y = \pi_X, p_X \circ \pi_Y = p_X \quad (\forall X < Y.)$$

3) Compact sets の family  $\{C_X\}$  を,  $C_X \subset X$  となるように任意に与えると,  $T_X|_{C_X} \rightarrow C_X$  は  $\mathbb{R}^N$  の Riemann metric に関する

る  $X$  の orthogonal bundle にとることができる。 i.e.  $\forall x \in C_X$  に対し  $|T_x| \rightarrow X$  の  $x$  上の fiber disk は, Riemann metric に対して  $T_x(X)$  に直交する。

(性質 3) は Mather には無いが, tubular neighbourhood System を構成するとき, 3) がみたされるように inductive に構成してゆくことができる。)

$$4) |T_x| \cap |T_y| \neq \emptyset \Rightarrow X < Y \text{ or } X = Y \text{ or } X > Y.$$

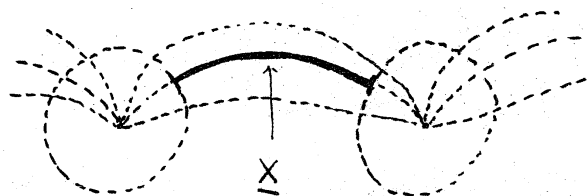
以下の議論に便利のように, いくつかの記号を導入する。

"total space" ;  $T = \bigcup_{x \in \mathcal{J}} |T_x|$ .

$X$  の frontier ;  $\partial X = \{Y \in \mathcal{J} \mid Y < X\}$ ,  $|\partial X| = \bigcup_{Y \in \partial X} Y$   
 $= \overline{X} - X$ .

$X$  の "co-frontier" ;  $\delta X = \{Z \in \mathcal{J} \mid X < Z\}$ ,  $|\delta X| = \bigcup_{Y \in \delta X} Y$ .

$X$  の "compact part" ;  $\underline{X} = X - \bigcup_{Y \in \partial X} \text{Int } |T_Y|$



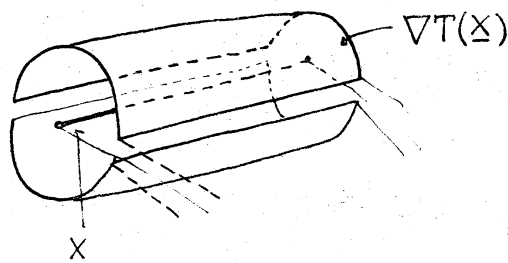
$T_x$  の  $\underline{X}$  の制限 :  $T(\underline{X}) = T_x|_{\underline{X}}$ .

$T(\underline{X})$  の sphere bundle ;  $\partial T(\underline{X})$

最後に  $\nabla T(\underline{X})$  を

$$\nabla T(\underline{X}) = \text{closure} \left( \partial T(\underline{X}) - \bigcup_{\substack{Y \in \partial X \\ (\text{i.e. } X < Y)}} |T_Y| \right)$$

と定義する。



Total space  $T$  は角をもった smooth manifold であり、 $\partial T$  での boundary を表わす。次の補題は明らかである。

補題 2.  $\partial T = \bigcup_{X \in \mathcal{A}} \nabla T(\underline{X})$ .

次に

補題 3. (1)  $\pi_X : \partial T(\underline{X}) - |\partial X| \rightarrow \underline{X}$  は fiber bundle.

(2) inclusion  $\nabla T(\underline{X}) \rightarrow \partial T(\underline{X}) - |\partial X|$  は deformation retract であり、その deformation は  $\underline{X}$  上の fiber を保つ。

証明 (1).  $\partial T(\underline{X})$  は  $\{\partial T(\underline{X}) \cap Z\}_{X < Z}$  を strata の system とする W.S. set である。各 stratum  $\partial T(\underline{X}) \cap Z$  から  $X$  への "写像  $\pi_X$  の制限" が full-rank を言えは (1) は Thom の isotopy lemma から従う。  $p \in \partial T(\underline{X}) \cap Z$  を任意にとる。  $\partial T(\underline{X}) \rightarrow X$  は fiber bundle やえ、  $\lambda : U_{\pi_X(p)} \rightarrow \partial T(\underline{X})$  なる local cross section で  $\lambda(\pi_X(p)) = p$  なるものがある。 Tubular nbd system の § 4(2) により、  $q = \pi_X \lambda(q) = \pi_X \pi_Z \lambda(q)$  となり、  $\pi_Z \lambda : U_{\pi_X(p)} \rightarrow \partial T(\underline{X}) \cap Z$  は  $\partial T(\underline{X}) \cap Z \rightarrow X$  の cross-section となる。

従って  $\partial T(X) \cap Z \rightarrow X$  は full rank となり (1) が言えた。

(2) の証明:  $\# \delta X < \infty$  と仮定して証明する。あとで必要なものこの時だけ。  $\delta X$  の strata に番号をつけ  $Z_1, Z_2, \dots, Z_r$  とする。但し,  $Z_i < Z_j \Rightarrow i < j$  としておく。

記号:  $Q_i = \text{closure}(\partial T(X) - \bigcup_{\nu=1}^i |T_{Z_\nu}|)$  とおく。

$Q_i \cap |T_{Z_{i+1}}|$  は  $Q_i \cap Z_{i+1}$  の disk bundle であるから,  $Q_{i+1} = \text{closure}(Q_i - Q_i \cap |T_{Z_{i+1}}|)$  は  $Q_i - Z_{i+1}$  の deformation retr. であり,  $X$  に関する fiber を保つ。(Tub. nbd の条件 (2).) 従って induction (w.r.t.  $i$ ) により  $Q_r = \nabla T(X)$  は  $Q_0 - \bigcup_{\nu=1}^r Z_\nu = \partial T(X) - |\delta X|$  の deformation retract である。 Q.E.D.

### §3. 定理1の証明.

3.1. 特別な場合の証明:  $\delta = \dim_{\mathbb{C}} \Sigma(f) = 0$  のときは O.K. (Milnor).  $\delta = n$  のときは証明すべきことなし。  $\delta = n-1$  のとき,

Milnor fiber が connected を示そう。  $\delta < n$  中え,  $K = S_{\varepsilon}^{2n+1} \cap V^{(n)}$  の点  $p$  で  $p \notin \Sigma(f)$  なるものをとる。  $p$  において,

$V^{(n)}$  の topdim. stratum (i.e. non-singular stratum) と直交する complex line  $L$  をとると,  $f|_L: L \rightarrow \mathbb{C}$  は non-singular であり,

これを利用して,  $\varphi: S_{\varepsilon}^{2n+1} - K \rightarrow S^1$  の cross section

$\lambda: S^1 \rightarrow S_{\varepsilon}^{2n+1} - K$  をとることができる。従って次の homotopy exact seq に於て  $\varphi_*$  は onto である:

$$\pi_1(S_\varepsilon^{2n+1} - K) \xrightarrow{q_*} \pi_1(S^1) \longrightarrow \pi_0(F) \longrightarrow \pi_1(S_\varepsilon^{2n+1} - K) \cong 0.$$

従って、 $\pi_0(F) = 0$  を示すことができた。

3.2. 前節により、 $\lambda = 0, n-1, n$  の場合は示せたから、以後  $1 \leq \lambda \leq n-2$  の場合について証明する。

Whitney の定理[4]によれば  $V^{(n)}$  は W.S. set の構造をもつ。よって補題1により、 $K = S_\varepsilon^{2n+1} \cap V^{(n)}$  も W.S. set となる。但し、 $\varepsilon > 0$  は充分小： $K = \bigcup_{x \in \delta} X$ 。我々は、 $K$  の、 $S_\varepsilon^{2n+1}$  の sub set としての tubular nbd system  $\{T_x, \pi_x, p_x\}$  を考えることにする。§2 の記号は  $x$  のまま用いる。更に次の記号を追加する： $f: \partial T \rightarrow S^1$  による  $\partial T$  の  $\mathbb{Z}$ -covering を  $\tilde{\partial T}$  とする。また  $f: \nabla T(X) \rightarrow S^1$  による  $\nabla T(X)$  の  $\mathbb{Z}$ -covering を  $\tilde{\nabla T}(X)$  とする。勿論  $\tilde{\partial T} = \bigcup_{x \in \delta} \tilde{\partial T}(X)$ 。(Cf. 補題2.)

$p: \tilde{\nabla T}(X) \rightarrow \nabla T(X)$  を  $\mathbb{Z}$ -covering の projection.  $j: \nabla T(X) \rightarrow T(X)$  を inclusion とする。 $p: \tilde{\partial T} \rightarrow \partial T, j: \partial T \rightarrow T$  も同様。

補題4. 我々は  $n$  に関する帰納法で定理1を示すのだが、帰納法の仮定を正しとすれば、§2 補題3(1)の fiber bundle の fiber の  $\mathbb{Z}$ -covering は  $n-\lambda-1$  connected である。

この補題4は次の§で示す。この§では補題4を仮定した上で定理を示す。

補題5.  $j \cdot p: \tilde{\partial T} \rightarrow T$  は map として  $n-\lambda$ -connected. すなわち、 $\pi_i(j \cdot p) = 0, i \leq n-\lambda$ . ( $1 \leq \lambda \leq n-2, n \geq 3$ .)

証明.  $K$  の strata  $\mathcal{J}$  を  $\tau$  なら  $X_1, X_2, \dots, X_r$  とする。但し各  $X_i$  は connected かつ  $X_i < X_j \Rightarrow i < j$  と仮定する。

$\tilde{\partial T}_i = \bigcup_{\nu \leq i} \tilde{\partial T}(X_\nu)$ ,  $T_i = \bigcup_{\nu \leq i} T(X_\nu)$  とおく。自然数  $l$  に関する induction を 1)  $\pi_1(\tilde{\partial T}_l) \simeq \pi_1(T_l)$ , 2)  $H_i(\tilde{\partial T}_l) \rightarrow H_i(T_l)$  は iso ( $i \leq n-s-1$ ), onto ( $i \leq n-s$ ) を示そう。

1).  $\tilde{\partial T}_l = \tilde{\partial T}_{l-1} \cup \tilde{\partial T}(X_l)$ ,  $T_l = T_{l-1} \cup T(X_l)$ .  $Z$  がある。

Van Kampen の定理によつて

$$\begin{array}{ccccc}
 \pi_1(\tilde{\partial T}_l) & \xrightarrow{h} & \pi_1(T_l) & & \\
 \uparrow & \searrow a & \uparrow & \swarrow & \\
 \pi_1(\tilde{\partial T}_{l-1}) & \xrightarrow{a} & \pi_1(T_{l-1}) & \xrightarrow{b} & \pi_1(T(X_l)) \\
 \uparrow & \searrow \pi_1(\tilde{\partial T}(X_l)) & \uparrow & \swarrow & \\
 \pi_1(\tilde{\partial T}_l \cap \tilde{\partial T}(X_l)) & \xrightarrow{c} & \pi_1(T_{l-1} \cap T(X_l)) & & 
 \end{array}$$

$a$  が同型なことは  $l$  に関する induction から。  $b$  と  $c$  の同型は、それらが  $n-s-1$  connected な fiber を持つ bundle と同じ homotopy type を持つ maps  $\tilde{\partial T}(X_l) \rightarrow T(X_l) \simeq X_l$ , と  $\tilde{\partial T}_l \cap \tilde{\partial T}(X_l) \rightarrow T_{l-1} \cap T(X_l) \simeq \partial X_l$  とから導かれる。補題 5 の仮定から  $n-s-1 \geq 1$  と仮定するからである。こうして  $a, b, c$  は同型となり  $h$  も同型となる。

2).  $n-s-1$  - connected な fiber を持つ bundle に関する Serre の exact sequence 及び  $l$  に関する帰納法の仮定を次の diagram に応用する:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \rightarrow H_i(\tilde{\partial T}_{l-1} \cap \tilde{\partial T}(X_l)) & \rightarrow & H_i(\tilde{\partial T}_{l-1}) \oplus H_i(\tilde{\partial T}(X_l)) & \rightarrow & H_i(\tilde{\partial T}_l) & \rightarrow & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \rightarrow H_i(T_{l-1} \cap T(X_l)) & \rightarrow & H_i(T_{l-1}) \oplus H_i(T(X_l)) & \rightarrow & H_i(T_l) & \rightarrow & 
 \end{array}$$

(Mayer-Vietoris)

five lemma を使って (2) が示せる。  $l = \mathbb{Z}$  とおけば結局,  $\pi_1(\tilde{\partial T}) \cong \pi_1(T)$ ,  $H_i(\tilde{\partial T}) \rightarrow H_i(T)$  は iso ( $i \leq n-1$ ), onto ( $i \leq n$ ).  
 ここで次の Milnor の定理 [2] を思い出す.

補題 6.  $K = S_\varepsilon^{2n+1} \cap V^{(m)}$  は  $n-2$ -connected である。

いま, 補題 5 では  $n \geq 3$  を仮定しているから,  $\pi_1(K) = 0$ .  
 ゆえ  $\pi_1(T) \cong \pi_1(K) \cong 0$  となり, 上に示したことから  $\pi_1(\tilde{\partial T}) = 0$ .  
 故に J.H.C. Whitehead の定理により  $\tilde{\partial T} \rightarrow T$  は  $n-1$ -connected.

補題 5 の証明終.

補題 5 の系 (i).  $\pi_i(\tilde{\partial T}) = 0$   $i \leq n-1$ . である.

さて  $\mathbb{C}$  の原点を中心とする充分小さな円周  $S_\delta^1$  をとる。  $\delta$  が充分小さく  $f: S_\varepsilon^{2n+1} - K \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$  は  $S_\delta^1$  に関して  $t$ -regular となり, そのひきもと  $M_\delta \subset S_\varepsilon^{2n+1} - K$  を考えることができる。  $M_\delta$  は  $2n$ -manifold である。  $M_\delta \subset \text{Int } T$  としてよい。  
 $K$  の  $S_\varepsilon^{2n+1}$  における tubular nbd system の各 disk bundle を充分細くすることにより, total space  $T'$  をつくと,

$$M_\delta \subset \text{Int}(T - T')$$

とすることができる。 また更に  $\delta'$  を充分小にとると,  $\partial T'$  を,  $M_\delta$  と  $M_{\delta'}$  の間の,  $S_\varepsilon^{2n+1}$  内の cobordism  $W$  に含まれるようにすることができる。  $W$  は明らかに product であり,  $T - \text{Int } T'$  も product のことが示せる。(Cf. 加藤 [1]) 従って,  $S_\varepsilon^{2n+1}$  の

中の、 $M_\delta$  と  $\partial T$  との間の cobordism は "invertible cobordism" であり、従って  $h$ -cobordism である。故に  $M_\delta \simeq \partial T$  とくに

補題 5 の系 (ii)  $\pi_i(\tilde{M}_\delta) = 0 \quad i \leq n-1-1.$

$\delta$  を充分小さく とれば " $S_\varepsilon^{2n+1} \cap f^{-1}(\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \delta\}) = F_\delta$  が Milnor-fiber  $F$  と同じ homotopy type をもつことが知られてゐる。(cf. Milnor [2]). 更に Milnor [2] によれば"

補題 7 :  $\pi_i(F_\delta, \partial F_\delta) = 0 \quad i \leq n-1.$

我々の定理 1 は次のように示される :

$\tilde{M}_\delta = \partial F_\delta \times \mathbb{R}$  に注意する。補題 5 の系 (ii) より  $\pi_i(\partial F_\delta) = 0$   $i \leq n-1-1$ , よって補題 7 より  $\pi_i(F) \cong \pi_i(F_\delta) = 0, i \leq n-1-1.$

定理 1 の証明終.

#### §4. 補題 4 の証明.

$C_X$  を Tubular neighbourhood System の性質 (3) (cf. §2) によって compact set とする。  $p \in C_X$  をとると、  $p$  の近傍で  $T_X \rightarrow X$  は real analytic としてよい。  $T_{X,p}$  なる fiber は、  $S_\varepsilon^{2n+1}$  の natural metric に関して  $X$  と直交してゐる。  $X$  を含む、  $V^{(n)}$  の stratum を  $\mathcal{X}$  とする。  $\mathcal{X}$  は  $\mathbb{C}^{(n+1)}$  の complex submanifold である。  $\mathbb{C}^{(n+1)}$  の Hermitian metric に関して、  $p \in \mathcal{X}$  に対して  $T_p \mathcal{X}$  に直交する  $\mathbb{C}$ -linear subspace  $L_p$  をとる。  $\dim_{\mathbb{C}} L_p = (n+1 - \dim \mathcal{X})$  である。

補題 8.  $p$  の近傍において,  $\Sigma(f|L_p) = \Sigma(f) \cap L_p$  である.

証明: Curve selection lemma [2] によって,  $f|L_p$  の critical value は  $p$  の近傍では 0 しかないことがわかり,  $p$  の近傍で  $\Sigma(f|L_p) \subset V^{(n)} \cap L_p$  を知る.  $\Sigma(f|L_p) \supset \Sigma(f) \cap L_p$  は明らかゆえ,  $p$  の近傍では  $\Sigma(f|L_p) \cap R = \emptyset$  を示せばよい. ただし  $R$  は  $R = V^{(n)} - \Sigma(f)$  である. もし  $\Sigma(f|L_p) \cap R$  が  $p$  に収束する点列  $\{p_i\}$  を含むとすれば,  $(\text{grad } f)_{p_i} \neq 0$ ,  $(\text{grad } f)_{p_i} \perp L_p$  となる. 但  $\text{grad } f = (\frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_{n+1}})$ .  $\{p_i\}$  の部分列を適当に選んで,  $(\text{grad } f)_{p_i} \rightarrow \ell$ ,  $T_{p_i}(R) \rightarrow \tau$  とできる.  $p_i \in R$  ゆえ  $(\text{grad } f)_{p_i} \perp T_{p_i}(R)$  より  $\ell \perp \tau$ . 一方  $\ell \perp L_p$  ゆえ  $\ell \in T_p(X)$ . これは  $T_p(X) \not\subset \tau$  を意味し, Whitney condition (a) に矛盾. ゆえ  $p$  の近傍で  $\Sigma(f|L_p) \cap R = \emptyset$  が示せた. Q.E.D.

補題 8 により,  $\dim_{\mathbb{C}} \Sigma(f|L_p) = s + (n+1 - \dim X) - (n+1) = s - \dim X$  となる. 故に §3 の  $n$  に関する帰納法の仮定が正しければ,  $f|L_p: L_p \rightarrow \mathbb{C}$  の Milnor fiber の connectivity は,  $(\dim L_p - 1) - \dim_{\mathbb{C}} \Sigma(f|L_p) - 1 = (n - \dim X) - (s - \dim X) - 1 = n - s - 1$  - connected となる.

補題 4 を示すには,  $f|L_p: L_p \rightarrow \mathbb{C}$  の Milnor fiber と, §2 の 補題 3(1) の fiber の  $\mathbb{Z}$ -covering が homotopy equivalence を言えればよい.

"Local bundle" at  $p$ .

点  $p \in C_X \subset X \subset K$  を上述のようにとる。  $p$  を通る  $\text{real dim.}$   
 $2(n+1 - \dim_{\mathbb{C}} X)$  の  $\mathbb{R}$ -linear subspace  $M$  と  $\tau_p(X)$  とのなす  
 角をはかる目やすとして次の量  $\theta$  を導入する。

$$(1 \geq) \theta(M, \tau_p(X)) = 1 - \max_{\substack{(v, w) \\ \in (M, \tau_p(X))}} \{ | \langle v, w \rangle | / |v| \cdot |w| \} \geq 0$$

$\theta(M, \tau_p(X)) = 0 \iff M$  と  $\tau_p(X)$  は transverse ではない。 また

$\theta(M, \tau_p(X)) = 1 \iff M \perp \tau_p(X)$  である。

$M$  の中の  $p$  を中心とし半径  $\varepsilon'$  の球  $S_{p, \varepsilon', M}$  をとる。

$\delta > 0$  に対し  $U_\delta = \{ M \in \text{Grass}(2(n+1), 2(n+1 - \dim_{\mathbb{C}} X)) \mid \theta(M, \tau_p(X)) > \delta \}$

とおく。  $E = \{ (v, M) \mid M \in U_\delta, v \in S_{p, \varepsilon', M} - \{ \delta X \} \}$ ,  $\pi: E \rightarrow U_\delta$   
 を  $\pi(v, M) = M$  と定義する。  $U_\delta$  は Grass. の open set である。

補題 9  $\delta > 0$  に対し  $\varepsilon' > 0$  を充分小に選べば、  $\pi: E \rightarrow U_\delta$

は  $U_\delta$  上の fiber bundle の構造をもつ。

証明は Whitney conditions (a), (b), と Thom の isotopy lemma  
 を使って、なされる。詳細は省略する。

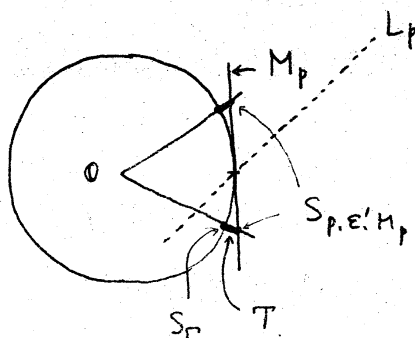
$p$  に於て球面  $S_{\varepsilon}^{2n+1}$  (原点中心, 半径  $\varepsilon > 0$ , Milnor fiber の定義に  
 現われたもの) に接し,  $\tau_p(X)$  に直交する  $\mathbb{R}$ -linear space を  
 $M_p$  とする。  $\dim_{\mathbb{R}} M_p = 2(n+1 - \dim_{\mathbb{C}} X) = \dim_{\mathbb{R}} L_p$ .

$\delta > 0$  を充分小にとれば  $L_p, M_p \in U_\delta$  となることに注意する。  
すると補題9により次を得る。

補題 10.  $S_{p, \varepsilon', L_p} - |\delta \varepsilon| \cong S_{p, \varepsilon', M_p} - |\delta \varepsilon|$  (diffeo.)

$\mathbb{C}^{(n+1)}$  の原点<sup>0</sup>を頂点とする  $S_{p, \varepsilon', M_p}$  上の cone  $\Gamma$  を考え、これと  $S_\varepsilon^{2n+1}$  の交わりを  $S_\Gamma$  とする。  $\Gamma$  と  $S_\Gamma$  と  $S_{p, \varepsilon', M_p}$  の間の部分を  $T$  とする。  $r$  を原点0からの距離関数とし、  $r(S_{p, \varepsilon', M_p}) = r_0$ ,  $r(S_\Gamma) = r_1$  とすれば、  $r: T \rightarrow [r_1, r_0]$  は線分上の fiber bundle である。更に

補題 11.  $r: T - |\delta \varepsilon| \rightarrow [r_1, r_0]$  は fiber bundle である。



補題11により  $S_{p, \varepsilon', M_p} - |\delta \varepsilon| \cong S_\Gamma - |\delta \varepsilon|$  (diffeo.)

§2 補題(3)の(1)の bundle の fiber は  $S_\Gamma - |\delta \varepsilon|$  と一致するとしてよい。(Tubular nbd system の性質3)。よってこの  $\mathbb{Z}$ -covering は  $S_{p, \varepsilon', L_p} - |\delta \varepsilon|$  の  $\mathbb{Z}$ -covering に diffeo である。(補題10を使った)。  $S_{p, \varepsilon', L_p} - |\delta \varepsilon|$  の  $\mathbb{Z}$ -covering は  $f|L_p: L_p \rightarrow \mathbb{C}$

の Milnor fiber  $\times \mathbb{R}$  に diffeo ゆえ、補題 8 の次に述べた注意に  
よって  $n-1-1$ -connected である。こうして補題 4 は完全に  
示されたことになる。 Q.E.D.

### References

- [1] 加藤十吉 : 解析的集合の初等位相幾何学 (to appear in 数学)
- [2] J. Milnor : Singular points of complex hypersurfaces  
annals of Math. studies N° 61. (Princeton)
- [3] J. Mather : Notes on topological stability. (Lecture note.  
Harvard Univ. 1970.)
- [4] H. Whitney : Local properties of analytic varieties  
Differential and Combinatorial Topology