

Holonomic Quantum Fields 概説

京大数研 三輪 哲二

以下は、佐藤幹夫・神保道夫両氏との最近の研究の紹介であり、研究集会以後の進展が中心である。

§ 1 回転の理論

W を内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を持つ N 次元直交空間,
 $\Lambda(W)$, $A(W)$, $O(W)$, $G(W)$ をそれぞれ
外積代数, クリフォード代数, 直交群, クリフォード群とする。
 $\langle ww' \rangle + \langle w'w \rangle = \langle w, w' \rangle$ を満たす双一次形式
 $\langle \cdot \rangle$ が与えられると, 同型 $N_r : A(W) \rightarrow \Lambda(W)$
が定義される。 $a \in A(W)$ に対して $N_r(a)$ の定数部
分を $\langle a \rangle$ と書き, a の期待値と呼ぶ。完全列

$$(1) \quad 1 \rightarrow GL(1, \mathbb{C}) \rightarrow G(W) \rightarrow O(W) \rightarrow 1$$

により, $G(W)$ の元 g は, その引き起こす W の回
転 T により定数倍を除き特徴づけられる。すなわち

$v_1, \dots, v_N$ を W の基底 $J = (\langle v_j, v_k \rangle)_{j,k=1, \dots, N}$
 $K = (\langle v_j, v_k \rangle)_{j,k=1, \dots, N}$ を内積と期待値の表とし,
 $E_+ = J^{-1}K$, $E_- = J^{-1}K$ とおく。 $E_{\pm}$ が射影にな

っている時, $N_r(g)$ は次の公式で与えられる。

$$(2) \quad N_r(g) = \langle g \rangle \exp(\rho/2)$$

$$\langle g \rangle^2 = n_2(g) \det(E_+ + E_- T)$$

$$\rho = \sum_{j,k=1}^N R_{jk} v_j v_k, \quad RJ = (Y_+^{-1} - Y_-^{-1})(E_+ Y_- + E_- Y_+)$$

ここで $Y_{\pm}$ は次の条件を満たす行列とする。

$$(3) \quad T = Y_+^{-1} Y_-, \quad E_- Y_+^{\pm 1} E_+ = 0, \quad E_+ Y_-^{\pm 1} E_- = 0$$

$n_2(g)$ は定数倍の不定さを調節する因子で, ここで²⁾は説明を省く。

$g \otimes g^{-1} \in G(W \oplus W)$ は, $T \in O(W)$

から定数倍の不定さなしに決まる。 W が無限次元の時,

$$\det(E_+ + E_- T) \text{ が発散しても, } \langle g \otimes g^{-1} \rangle =$$

$$\langle g \rangle \cdot \langle g^{-1} \rangle = \det(E_+ + E_- T) \cdot \det(E_+ + E_- T^{-1})$$

は有限の値を与える事が多い。

§2. 自由場

ここでは, 無限次元の W としてどんなものを取るかを説明

する。 S 次元ミンコフスキー空間 $X^{M,n}$ におけるディラック

方程式を考える。

$$(4) \quad (i\partial - m) w(x) = 0, \quad \bar{w}(x) (i\overleftarrow{\partial} + m) = 0$$

ここで $\partial = \sum_{\mu=0}^{S-1} \gamma^{\mu} \partial_{\mu}$, $\partial_{\mu} = \partial / \partial x^{\mu}$, γ^{μ} は

$r \times r$ のディラック行列とする。 $w = {}^t(w_1, \dots, w_r)$

$\bar{w} = (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_r)$ は たて あるいは よこに並べた

スピノルだが、 $\bar{\psi}$ は複素共役を意味しない。(4)を満たす w の全体を W , $\bar{w}$ の全体を $\bar{W}$ とし直和 $\tilde{W} = \bar{W} \oplus W$ に次の内積を入れる。

$$(5) \quad \langle \tilde{w}, \tilde{w}' \rangle = \int_{\text{spacelike}} (\bar{w}(x) d^S x w'(x) + \bar{w}'(x) d^S x w(x))$$

ここで $d^S x = \sum_{\mu=0}^{S-1} \gamma^\mu dx_\mu$, $dx_\mu = (-)^{\mu} dx_0 \wedge \cdots \wedge dx_{S-1}$

(5) の被積分項は $S-1$ 閉形式で、積分は空間的超曲面上で行なう。 $r \times r$ 行列

$$(6) \quad iS(x) = \int \frac{d^S p}{(2\pi)^S} e^{-ip \cdot x} \mathcal{E}(p_0) 2\pi \delta(p^2 - m^2) (\not{p} + m)$$

は $(i\not{\partial}_x - m) iS(x-x') = 0$, $iS(x-x') (i\not{\partial}_{x'} + m) = 0$ を満たす。固定した x につき $iS(x-x')$ の α 行を考え、 x' の函数として $\bar{W}$ に属するのでこれを $\psi_\alpha(x)$ と書く。同様に、固定した x' につき $\alpha\beta$ 列を x の函数と考えたものを $\bar{\psi}_\beta(x')$ と書く。これらは、相互作用のないフェルミ粒子を表わし、自由場と呼ばれる。内積は

$$(7) \quad \langle \psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x') \rangle = iS(x-x')_{\alpha\beta}$$

で与えられる。次の期待値を採用する。

$$(8) \quad \langle \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x') \rangle = iS^{(+)}(x-x')_{\alpha\beta}$$

$iS^{(+)}(x) = \int \frac{d^S p}{(2\pi)^S} e^{-ip \cdot x} \theta(p_0) 2\pi \delta(p^2 - m^2) (\not{p} + m)$
 この時、 $E_\pm$ は、(4) の解を $\text{Im } x^0 \leq 0$ で正則な解の境界値に分解する作用素になる。

§3. 外場による散乱

ここでは $\tilde{W}$ における回転をどのように与えるかを述べる。 $A(x) = (A_\mu(x))_{\mu=0, \dots, s-1}$ を $x^0 \rightarrow \pm\infty$ で消える $r \times r$ 行列の s 個の組とし, この $A(x)$ を外場とするディラック方程式を考える。

$$(9) \quad (i\partial - A(x) - m)w(x) = 0, \quad \bar{w}(x)(i\partial + A(x) + m) = 0$$

(9) の解 $w(x), \bar{w}(x)$ から次のようにして2通りの(3)の解が作られる。

$$(10) \quad \begin{aligned} w_{in}^{out}(x) &= w(x) - \int d^s x' S_{adv}^{ret}(x-x') A(x') w(x') \\ \bar{w}_{in}^{out}(x) &= \bar{w}(x) - \int d^s x' \bar{w}(x') A(x') S_{ret}^{adv}(x'-x) \end{aligned}$$

ここで $S_{adv}^{ret}(x) = \pm \theta(x^0) S(x)$ であり $x^0 \rightarrow \pm\infty$ で $w(x) \longrightarrow w_{in}^{out}(x), \bar{w}(x) \longrightarrow \bar{w}_{in}^{out}(x)$ となる。 $(\bar{w}_{in}, w_{in})$ を $(\bar{w}_{out}, w_{out})$ に移す変換は $\tilde{W}$ の回転になる。これを $T[A]$, 対応するクリフォード群の元を $\varphi[A]$ と書く。 $\tau[A] = \langle \varphi[A] \rangle, \tau^*[A] = \langle \varphi[A]^{-1} \rangle$ に対して次の変分公式が成り立つ。

$$(11) \quad \delta \log \tau[A] + \delta \log \tau^*[A]$$

$$= - \int d^s x \delta A(x) \Psi(x, x; A),$$

$$\Psi(x, x'; A) = S_c^A(x, x') + S_c^{*A}(x, x') - S_{ret}^A(x, x') - S_{adv}^A(x, x')$$

ここで S_c^A, S_c^{*A} etc. は外場 $A(x)$ のもとでの適当な境界条件を満たすグリーン函数であるが、定義は省略する。

ただ、 $S_c^A(x, x')|_{x=x'}, S_c^{*A}(x, x')|_{x=x'}$ etc. は発散するが、 $\Psi(x, x'; A)|_{x=x'}$ は有限の値を取る事を注意しておく。

§4. Wick 回転と Riemann-Hilbert の問題

X^{Min} における空間的な超曲面を Γ とし、 $A(x)$ の白が Γ 上に退化した極限を考える。すなわち、回転 T が

$w_{out}(\xi) = M(\xi) w_{in}(\xi), \bar{w}_{out}(\xi) = \bar{w}_{in}(\xi) M(\xi)^T$
 $(\xi \in \Gamma)$ で与えられるとしよう。ここで、 $w_{out}(x)$ は、ディラック方程式の解をたてに N 個、 $\bar{w}_{in}(x)$ はよこに N 個並べたものとし、 $M(\xi)$ は Γ 上で実解析的な $N \times N$ 行列とする。この時 (2) 式に出てくる

$$F_{++} = Y_+^{-1}(-E_-)Y_+, \quad F_{+-} = Y_+^{-1}E_+Y_-$$

$$F_{-+} = Y_-^{-1}(-E_-)Y_+, \quad F_{--} = Y_-^{-1}E_+Y_-$$

の核函数を $F_{\varepsilon\varepsilon'}(x, x')$ ($\varepsilon, \varepsilon' = \pm$) とすると、これらは、 $\varepsilon \text{Im } x^0 < 0, \varepsilon' \text{Im } x'^0 < 0$ なる領域に解析接続される。そこで、 $X^{Min} \leftrightarrow \text{Im } x^0 = 0$ から $X^{Euc} \leftrightarrow \text{Re } x^0 = 0$ ($\text{Im } x^0 = -x^3$ とおく) に移って(これを Wick 回転という)、そこで $F_{\varepsilon\varepsilon'}(x, x')$ を特徴づける事にする。

X^{Euc} 内の有界領域を D^+ , その境界を Γ とする。 Γ 上で定義された $N \times N$ 行列を $M(\xi)$ とする。次の性質を満たす $(x, x') \in X^{\text{Euc}} - \Gamma$ で定義された $nN \times nN$ 行列 $w(x, x')$ を (Γ, M) に対するグリーン函数という。(高次元の Riemann-Hilbert の問題)

- (i) $(-\partial_x + m)w(x, x') = \delta^s(x - x')$
 - (ii) $|w(x, x')| = O(e^{-m|x|}) \quad |x| \rightarrow \infty$
 - (iii) $w(\xi^+, x') = M(\xi)w(\xi^-, x') \quad (\xi \in \Gamma)$
- 但し $w(\xi^\pm, x') = \lim_{D^\pm \ni x \rightarrow \xi} w(x, x'), D^- = X^{\text{Euc}} - D^+ - \Gamma$

M が 1 に近いという仮定のもとに, グリーン函数は, たゞひとつ存在し, 以下の性質でも特徴づけられる。

- (i)' $w(x, x')(\partial_{x'} + m) = \delta^s(x - x')$
- (ii)' $|w(x, x')| = O(e^{-m|x'|}) \quad |x'| \rightarrow \infty$
- (iii)' $w(x, \xi'^+) = w(x, \xi'^-)M(\xi')^{-1} \quad (\xi' \in \Gamma)$

X^{Min} における Γ として $x^0 = 0$ を取ると, D^+ が有界ではないが, Γ は X^{Euc} における $x^s = 0$ とみなせる。この時 $F_{\varepsilon\varepsilon'}(x, x')$ の解析接続したものが, ちょうど $w(x, x')$ になる。

次に Γ を $\Gamma^{\delta P} = \{ \xi^{\delta P} = \xi + \delta P(\xi) \mid \xi \in \Gamma \}$ に微小変形する事を考える。 $\Gamma^{\delta P}$ 上での $M^{\delta P}$ は $M^{\delta P}(\xi^{\delta P}) = M(\xi)$ と、不変な形で与える。この時 $(\Gamma^{\delta P}, M^{\delta P})$ に対するグリーン函数を $w^{\delta P}(x, x')$ とすると、微小変分 $\delta w(x, x') = w^{\delta P}(x, x') - w(x, x')$ は次の式で与えられる。

$$\delta w(x, x') = \int_{\Gamma} d\zeta(\xi) w(x, \xi) \sum_{\mu=1}^S \delta P^{\mu}(\xi) (\eta_{\mu} \partial - \pi \partial_{\mu}) M(\xi) \cdot w(\xi, x')$$

特に重要なのは、 Γ 上の超曲面 (X^{Euc} の中では余次元 2) B が与えられ、 B の外で $M(\xi) = 1$ 、 B の中で $M(\xi) = M$ となる場合である。この時 $w(x, x')$ は、 $X^{\text{Euc}} - B$ で多価のディラックの解となり、 B のまわりで与えられたモノドロミー M を持つ。 M を変えずに B を変形した時の変分公式も、上と同様に得られる。