

Knots and Links in Spatial Graphs

早大教育 鈴木晋一 (Shin'ichi Suzuki)

0. Introduction

有限グラフ $G = (V(G), E(G)) = (V, E)$ を自然に距離空間と
 考え, G の 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の中への polygonal を
 埋蔵 $f: G \rightarrow \mathbb{R}^3$ を spatial embedding と呼び, 像 $f(G) =$
 G_f を spatial representative または spatial graph と呼ぶ.

このような spatial embeddings や spatial graphs を次の同値
 関係で分類する (目的によって他にも幾つか定義がある).

定義 1 (1) 2 つの spatial embeddings $f, f': G \rightarrow \mathbb{R}^3$ が
 equivalent である, $f \approx f'$ と示す.

$\Leftrightarrow$ 向きを保存する同相写像 $\psi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ が存在し, $\psi f = f'$.

$\Leftrightarrow$ 同相写像 $H: \mathbb{R}^3 \times I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times I$ が存在し, 次を満たす:

(i) $H(x, t) = (h_t(x), t)$, $h_t: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ は同相写像.

(ii) $h_0 = \text{id.}$, $h_1 f = f'$.

(f と f' は ambient isotopic であるといい, H は isotopy という)

(2) 2 つの spatial graphs $f(G), f'(G)$ が equivalent である,

$G_f \approx G_{f'}$ を示す.

$\Leftrightarrow$ 向きを保存する同相写像 $\psi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ が存在し,

$$\psi(G_f) = G_{f'} \text{ となる}$$

$\Leftrightarrow$ 同相写像 $H: \mathbb{R}^3 \times I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times I$ が存在し, 次を満たす:

(i) $H(x, t) = (h_t(x), t)$, $h_t: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ は同相写像.

(ii) $h_0 = \text{id.}$, $h_1(G_f) = G_{f'}$.

⑨ グラフ G と, その spatial embeddings $f, f': G \rightarrow \mathbb{R}^3$ について, $f \approx f' \Leftrightarrow G_f \approx G_{f'}$.

グラフ G について, その spatial representative G_f の同値類と, その 結び目型 (knot type) とは.

有限グラフ G の 3次元空間 $\mathbb{R}^3$ における位置の問題 (knotting problem) を考察する方法としては, 大別して次の2つがある.

(1) 結び目 (knots)・絡み目 (links) の理論で考えられている不変量や概念を spatial graphs にも一般化する.

($[K_1] \sim [K_3], [K_5], [S_1] \sim [S_4], [Y_{da}]$ など).

(2) Spatial graphs の中の subgraphs としての cycles における knots や links を調べることによって, その特徴付けをする. ($[CG], [K_4], [Sh], [Y_{to}]$ など).

この小稿では, spatial graphs の取り扱いに関する基礎的な

事項を整理し(1)のうち, (2)に関する話題を3つ紹介する.

Spatial graphs のスタートは, 次の2つの定理である.

定理1 G が acyclic graph ならば, その任意の spatial embeddings $f, f' : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ について, $f \approx f'$ である.

(すなわち, acyclic graphs の $\mathbb{R}^3$ における位置の問題は自明である.) $\square$

定理2 G を planar graph とし, $f, f' : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ を2つの planar embeddings とする. $\mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^3$ の部分空間と看做し, f と f' を自然に spatial embeddings と看做すると, $f \approx f'$ である.

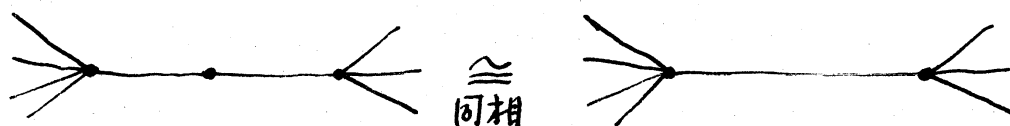
証明 は, Whitney $[W_1][W_2]$ に依るものが最も楽である. $\square$

この定理2から, 次の定義が導かれる.

定義2 G を planar graph とする. spatial embedding $f : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ (および v の spatial representative G_f) が 平凡 (trivial, unknotted) であるとは, planar embedding $f_0 : G \rightarrow \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ について, $f \approx f_0$ ($G_f \approx G_{f_0}$) となることを意味する. またその結び目型を 平凡型 (trivial type) とよぶ.

問題 G を, genus $\gamma(G) > 0$ のグラフとする. G の平凡な embeddings 及び平凡型の定義が可能か?

(注) 定理1から acyclic graphs の位置の問題は解決済みとしてよい。従って特に孤立点を持たないグラフのみを考える。
また同様にして, degree 1 の頂点の存在も位置の問題には影響を与えないので, これらを除いたグラフを考察すれば十分である。さらに, degree 2 の頂点は, spatial graphs の同値の定義からわかるように, 本質的ではない。



1. 結び目理論からの準備

円周 $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ は, (任意の長さ n (≥ 1)) のサイクル C と同相である。従って次の定義は, 前節の定義1と2の特殊な場合であるが, 改めて別記する。

定義3 S^1 の μ 個の直和 $S^1 \amalg \dots \amalg S^1$ の $\mathbb{R}^3$ の中への polygonal embedding $f: S^1 \amalg \dots \amalg S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ の像

$$L = f(S^1 \amalg \dots \amalg S^1) = f(S^1) \cup \dots \cup f(S^1) = K_1 \cup \dots \cup K_\mu$$

を, μ 成分の 絡み目 (link with μ components) といい。

1成分の絡み目を, 特に 結び目 (knot) といい。

絡み目の "equivalence" の定義は, 定義1(2) による。

μ 成分の絡み目 $L = K_1 \cup \dots \cup K_\mu$ が 平凡 である: との定義は, 定義2による。すなわち, L が平凡であるとは, 平面上

の μ 個の単純閉折線 (多辺形) と同値であるときをいう。これは、 $K_1, \dots, K_\mu$ を境界とする μ 個の R^3 に存在する μ 個の同値でもある。

結び目理論で用いられる正則射影図 (regular diagram) の概念は, spatial graphs を扱う際にも有効である。

$$p: R^3 \rightarrow R^2 \quad ; \quad (x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$$

を射影とする。spatial graph G_f が (p にに関して) 正則な位置 にあるとは, 次の条件を満たすときをいう:

各点 $x \in R^2$ について, $p^{-1}(x) \cap G_f$ は高々 2 点であって, $p^{-1}(x) \cap G_f$ が 2 点のときはこの 2 点は G_f の頂点ではない。

従って, $p(G_f)$ の 2 重点のところで, 局所的に 2 辺が交叉している。そこで G_f の辺の z 座標の高低に従って, 下側を通る辺に切れ目を入れて空間的な感じを出した図を, spatial graph G_f の 正則射影図 (以後簡単に 射影図) という。

また射影図において $p(G_f)$ の 2 重点に対応する点を, 特に 交叉点 と呼ぶことにする。

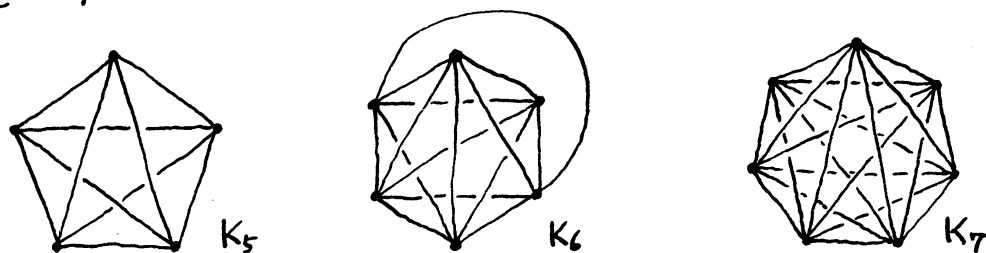


図1: 完全グラフ K_5, K_6, K_7 の射影図の一例

グラフの embeddings はすべて polygonal としたので、任意の spatial graph は $\mathbb{R}^3$ の isotopy によって正則な位置にあるようにできることは、容易にわかる。

射影図のよいところは、平面図形としてはもとより、この図自身を spatial graph と思ってもよいことにあたる。

次の命題は、絡み目を切断して撃ち直すことを許せば、どんな絡み目も平凡型にできるという、経験的に周知の事実を主張している。

命題 1 L を正則な位置にある絡み目とし、射影図 $\tilde{L}$ の交叉点の数を n とする。 n 個の交叉点の中から適当に u 個、 $0 \leq u \leq n$ 、を選んで、それらの点における交叉の上下を交換することにより、平凡な絡み目（の射影図）を得ることができる。

証明の概略 射影図 $\tilde{L} = \tilde{K}_1 \cup \dots \cup \tilde{K}_\mu$ の各成分に一つの向きを指定し、1点 $x_i \in \tilde{K}_i$ を交叉点以外から選ぶ。まず x_1 から指定した向きに従って $\tilde{K}_1$ を一周する。その際、通過したところに色を付けながら進むこととし、交叉点では次の規則に従うものとする。

- (イ) 交叉点で上交叉点を通過するときはそのまゝ進む。
- (ロ) 交叉点で下交叉点を通過するとき、その上交叉点を含む辺が既に色付きならばそのまゝ進む、まだ色が付いていない

いならばその交叉の上下を交換して進む。

このようにして出発点 x_1 に戻ったら、次に x_2 から指定した向きに従って $\tilde{K}_2$ 上を、上の規則 (i), (ii) に従って一周する。順次 $x_3, \dots, x_p$ から出発して、 $\tilde{K}_3, \dots, \tilde{K}_p$ の交叉点の上下を定めていく。このようにして得られた新しい射影図が平凡な絡み目のものであることは、点 $x_1, x_2, \dots, x_p$ を順次つまんで持ち上げてみるゝわかる。□

この命題と同じ考え方で、次の証明できる。

命題 2 グラフ G の任意の spatial embeddings f と g について、 G_f の射影図 $\tilde{G}_f$ と G_g の射影図 $\tilde{G}_g$ が存在して、次の性質を満たす： $\tilde{G}_g$ は、 $\tilde{G}_f$ のいくつかの交叉点の交叉の上下を交換することによって得られる (up to isotopy)。□

A と B は $\mathbb{R}^3$ の中の互いに共有点を持たない paths または cycles とする。また A と B には向きが指定してあり、 $A \cup B$ は正則な位置にあるとする。射影図 $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ の各交叉点 c において、次の図 2 に示すように、writhe $\varepsilon(c)$ を定める。

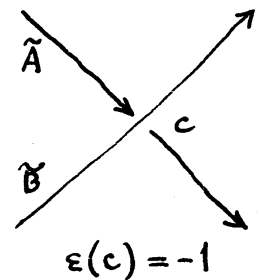
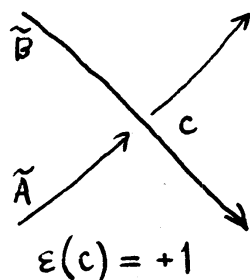


図 2

$$\varepsilon(c), \quad \sum(A, B) = \sum_c \varepsilon(c)$$

と定める. $\sum_c$ は $\tilde{A}$ と $\tilde{B}$ の下を通るすべての交叉点に関する summation をとるものとする. A と B が共に cycles のときは $\sum(A, B)$ はいわゆる (代数的) 絡み数 (linking number) であり $lk(A, B)$ で示す.

$$lk_2(A, B) \equiv |lk(A, B)| \pmod{2}$$

とすると, $lk_2(A, B)$ は向きや指定に依らない 2 成分の絡み目 $A \cup B$ の不変数であり, 次の成り立つ.

命題 3. $L = K_1 \cup K_2$ を 2 成分の絡み目とする.

$lk_2(K_1, K_2) \neq 0 \Rightarrow L$ は非平凡型である. $\square$

2. Self-linked Graphs

定義 4 グラフ G が self-linked であるとは, G の任意の spatial representative G_f について, G_f 上の disjoint なサイクルの対 C_1, C_2 が存在し, $C_1 \cup C_2$ は非平凡型の 2 成分の絡み目となる.

Sachs [Sa] は 1981 年に次を示した.

定理 3 (Sachs [Sa]) 次のページの図 3 に示す 8 個のグラフ $K_6, K_{4,4}, K_{4,4}-e, K_{3,3,1}, G_7, G_8, G_9, P-G$ はいずれも self-linked である. $\square$

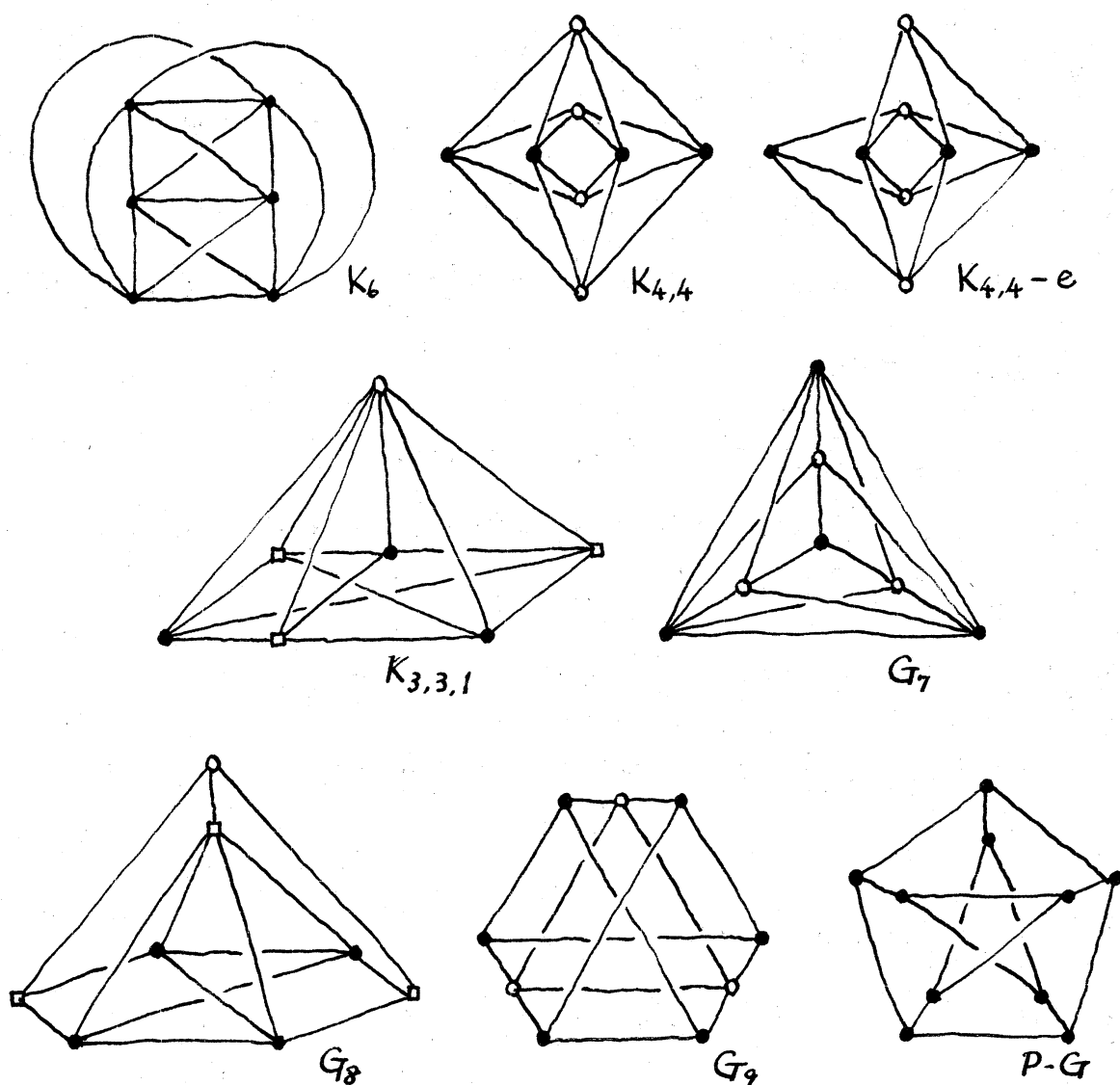


図 3

Sachs は各辺が線分になるような embeddings を扱ひ、
 不変数 の 定義 も 必 ず し も 明 確 な も の と は 言 っ 難 い が、 と 一 考
 く 上 の 例 は、 $K_{4,4}$ を 除 いて、図 4 に
 示す Hopf link を 唯一 つ 含 む よう な
 spatial representatives を 持 つ こ と が
 確 か め ら れ る。 ま た 後 に Conway-

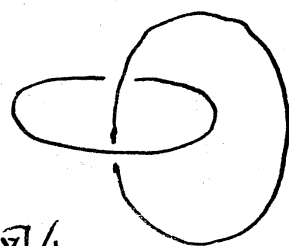


図 4

Gordon [CG] が K_6 について別証明を与えた。ここに用いられた手法を整理すると、次のようになる。

Λ をグラフ G の中の disjoint cycles の対の集合とする。 G の spatial embedding f に対して、

$$\lambda_f(G, \Lambda) \equiv \sum_{\{c, d\} \in \Lambda} lk_2(f(c), f(d)) \in \mathbb{Z}_2$$

と定義する。

一方、グラフ G の non-adjacent な辺の対 A_1, A_2 に対し、 $\nu(\Lambda; A_1, A_2)$ によって、 Λ における対 $\{c_1, c_2\}$ で $c_1 \supset A_1$, $c_2 \supset A_2$ となるものの総数を表すものとする。

命題 4 G の spatial embedding f の不変数 $\lambda_f(G, \Lambda)$ が、 f は independent であるための必要十分条件は、 $E(G)$ の non-adjacent な任意の辺の対 A_1, A_2 に関して $\nu(\Lambda; A_1, A_2)$ が偶数となることである。

証明 は、命題 2 に依る。□

図 3 に示すグラフについては、いずれも命題 4 が成り立つことが確かめられ、 $\lambda_f(G, \Lambda)$ が spatial embeddings に依らないことがわかる。図 3 に示す具体的な spatial graph について、 $K_{4,4}$ を除いては、 $\lambda_f(G, \Lambda) = 1$ が成立し、命題 3 から、self-linked であることが確認される。

特に、 $K_{4,4}$ を除いては、Hopf Link 一つだけを含む spatial

representative の存在が知られている。この cycle 上の辺を 1 本除いたグラフは self-linked ではない。

定義 5 グラフ G の self-linkedness に関して critical であるとは、 G が self-linked であって、 G の (任意の辺 e について $G - e$ が self-linked ではない場合をいう。

命題 5 図 3 に示したグラフの中で、 $K_{4,4}$ を除く 7 個のグラフは self-linkedness に関して critical である。□

問題 頂点数が 10 以下のグラフの中で、self-linkedness に関して critical なものを全て挙げよ。□

3. Self-knotted Graphs

定義 6 グラフ G が self-knotted であるとは、 G の (任意の spatial representative G_f について、 G_f 上のサイクル C が存在し、 C は非平凡型の結び目となる。

Conway-Gordon [CG] は 1983 年に次を示した。

定理 4 (Conway-Gordon) K_7 は self-knotted である。□

この定理の証明には、Conway 多項式と呼ばれる有向絡み目の不変量が用いられる。

有向絡み目 K の Conway 多項式 $\nabla_K(z)$ とは、 $\mathbb{Z}[z]$ の元であって、次の漸化式によって定義される。

(i) 平凡な結び目 O について, $\nabla_O(z) = 1$.

(ii) 1つの交叉点の近傍が図5に示すような形で与えられ、この近傍以外の部分は全く一致するような射影図をもつ3つの有向結び目 K_+ , K_- , L について

$$\nabla_{K_+}(z) - \nabla_{K_-}(z) = z \nabla_L(z)$$

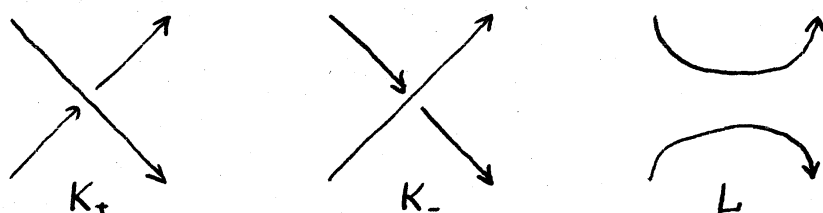


図5

命題1に依り, 上の(i)と(ii)から $\nabla_K(z)$ が定まる.

$\nabla_K(z)$ の z^n の係数を $a_n(K)$ で示すことにすると, 次の成り立つことが示されている.

命題6 (Kauffman) (1) 有向結び目 K に対し, 向きを逆にした結び目を $\bar{K}$ で表せば, 次の成り立つ:

$$\nabla_{\bar{K}}(z) = \nabla_K(z), \quad \text{特に } a_2(\bar{K}) = a_2(K).$$

(2) 図5において, K_+ と K_- が有向結び目ならば, L は2成分の結び目である. この成分を L_1, L_2 とすると, 次の成り立つ:

$$a_2(K_+) = a_2(K_-) + \text{lk}(L_1, L_2). \quad \square$$

この命題6を背景にして, spatial graph G_f に対して新しい不変数を導入する.

Γ をグラフ G 上の cycle の集合とする. G の spatial embedding f と自然数 n について,

$$\mu_f(G; \Gamma; n) \equiv \sum_{\gamma \in \Gamma} a_2(f(\gamma)) \pmod{n}$$

と定める. これは cycles の向きに依存しない f の不変数である: これは命題 6 (1) に依る. $\mu_f(G; \Gamma; n)$ が embedding f に依存しないようなグラフ G をみつけることは, 容易ではない.

Conway-Gordon [CG] は, K_7 について, Γ をその上の Hamilton cycles としたとき, $\mu_f(K_7; \Gamma; 2)$ が embeddings に依存しないことを,

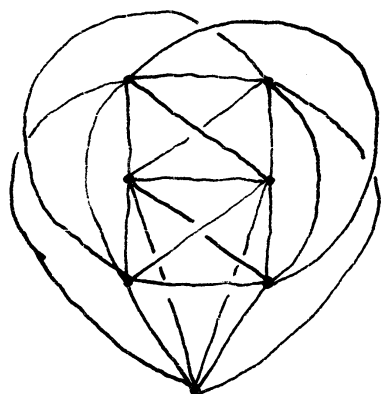


図 6 に示した K_7 の spatial representative

図 6

について, $\mu_f(K_7; \Gamma; 2) = 1$ を示した. 実際, 図 6 には, 三葉型の結び目が唯一含まれることが確かめられる.

Shimabara [Sh] は次を示した.

定理 5 (Shimabara) $K_{5,5}$, $K_{5,5} - e$ は self-knotted である.

これは $\mu_f(K_{5,5}; \Gamma; 4) = 2$ を示すことによって示され, $K_{4,4,1}$, $K_{m,m}$ ($m \geq 5$) など, いくつかの例について, 不変数 $\mu_f(G; \Gamma; 2)$ などを計算している.

定義6 グラフ G が self-knottedness に関して critical であるとは, G が self-knotted であって, G の任意の辺 e について $G - e$ が self-knotted でない場合をいう.

命題7 K_7 は self-knottedness に関して critical である. $\square$

問題 (1) $K_{5,5} - e$ の subgraphs G が self-knottedness に関して critical なものを探せ.

(2) 頂点数が 10 以下のグラフの中で, self-knottedness に関して critical なものを全て挙げよ.

(3) G を self-linked なグラフとするとき, G と 1 点だけから成るグラフ K_1 との join $G * K_1$ は self-knotted か? $\square$

4. Flexible Graphs

定義7 グラフ G が flexible であるとは, G の cycles の任意の集合 $\{C_1, C_2, \dots, C_\alpha\}$ と, 結び目の任意の集合 $\{K_1, K_2, \dots, K_\alpha\}$ に対して, G の spatial embedding $f: G \rightarrow \mathbb{R}^3$ が存在し, $f(C_i) \approx K_i$ ($i=1, 2, \dots, \alpha$) となる場合をいう.

この "flexible" という用語はまだ定着してはいない. 自明でない flexible graphs の例は Kinoshita [K4] によって発見された.

定理6 (Kinoshita) 2 頂点 u, v を結ぶ n 本 ($n \geq 2$) の辺から成るグラフ Θ_n (図7参照) は flexible である. $\square$

実際, Θ_n 上には $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$ ($=\alpha$) 個の cycles $C_{ij} = e_i \cup e_j$

$(i \neq j)$ が存在する。又 $\{0$ の与えら
れた結び目の集合

$$\{K_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$$

に対して, C_{ij} の K_{ij} と同値な結
び目となるように Θ_n を $\mathbb{R}^3$ に実

現する α であるが, それは本質的に命題 1 を利用する。

Yamamoto [Yto] は, 命題 1 を更に精密に研究する: α によ
って, 次を証明した。

定理 7 (Yamamoto) グラフ G の任意の cycle c に対して, G の連続
する 3 辺によって決まるならば, G は flexible である。□

定理 7 の仮定を満たすグラフの例としては,

図 8 に示す完全グラフ K_4 がある。 K_4 の
7 つの cycles (4 つの 3-cycles と 3 つの 4-cycles)
は, いずれも連続する 3 辺を指定すると
一意に決まる α を確かめて下さい。

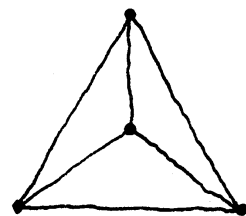


図 8: K_4

Yamamoto [Yto] の議論によって, 次も容易に証明される。

定理 8 グラフ G の cycle space C の (ベクトル空間としての)
次元を α とする。 G の cycles の集合 $\{C_1, \dots, C_\alpha\}$ が C の基
底となるならば, 任意の結び目の集合 $\{K_1, \dots, K_\alpha\}$ に対して,
spatial embedding $f: G \rightarrow \mathbb{R}^3$ が存在し, $f(C_i) \approx K_i$ ($i=1, \dots,$
 α) となる。□

与えられたグラフが flexible でないことを示すことは予想外にむずかしい問題で、これ迄に K_7 および $K_{5,5}$ など self-knotted graphs 以外の例は知られていない。

問題 図9に示すグラフは flexible か？

完全グラフ K_5 は flexible か？

いずれも flexible でなさそうである。

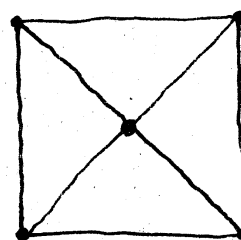


図9

REFERENCES

- [CG] J.H.Conway and C.McA.Gordon : Knots and links in spatial graphs, J.Graph theory, 7(1983), 445-453.
- [J] W.Jaco : Nonretractible cube-with-holes, Michigan Math.J., 18(1971), 193-201.
- [JM] W.Jaco and D.R.McMillan, Jr. : Retracting three-manifolds onto finite graphs, Illinois J.Math., 14(1970), 150-158.
- [K1] S.Kinoshita : On elementary ideals of polyhedra in the 3-sphere, Pacific J.Math., 42(1972), 89-98.
- [K2] ----- : On elementary ideals of θ -curves in the 3-sphere and 2-links in the 4-sphere, Pacific J.Math., 49(1973), 127-134.
- [K3] ----- : On elementary ideals of projective planes in the 4-sphere and oriented θ -curves in the 3-sphere, Pacific J.Math., 57(1975), 217-221.
- [K4] ----- : On θ_n -curves in R^3 and their constituent knots, in Topology and Computer Science (ed.S.Suzuki), Kinokuniya Company Ltd. 1987, Tokyo, 21-27.
- [K5] ----- : Elementary ideals in knot theory, Kwansei Gakuin Univ. Annual Studies, 25(1986), 183-208.
- [L] H.H.Lambert : Mapping cubes with holes onto cubes with handles, Illinois J.Math., 13(1969), 606-615.
- [M] D.R.McMillan, Jr. : Boundary-preserving mappings of 3-manifolds, in Topology of Manifolds, Markham Pub.Comp., 1970, Chicago, 161-175.
- [N] S.Negami : Ramsey theorem for knots, links and spatial graphs, to appear.

- [Sa] H.Sachs : On a spatial analogue of Kuratowski's theorem on planar graphs
---an open problem, in Graph Theory, Lagow 1981, Proceedings, Lecture
Notes in Math. #1018, Springer-Verlag, 1983, Berlin-Heidelberg,
230-241.
- [Sh] M.Shimabara : Knots in certain spatial graphs, Tokyo J.Math., to appear.
- [S1] S.Suzuki : On linear graphs in 3-sphere, Osaka J.Math., 7(1970), 375-396.
- [S2] ----- : Alexander ideals of graphs in the 3-sphere, Tokyo J.Math., 7
(1984), 233-247.
- [S3] ----- : Almost unknotted θ_n -curves in the 3-sphere, Kobe J.Math., 1
(1984), 19-22.
- [S4] ----- : A prime decomposition theorem for a graph in the 3-sphere, in
Topology and Computer Science(ed.S.Suzuki), Kinokuniya Comp.Ltd.
1987,Tokyo, 259-276.
- [W] K.Wolcott : The knotting of theta curves and other graphs in S^3 , in
Geometry and Topology, Marcel Dekker, 1987, 325-346.
- [Yda] S.Yamada : An invariant of graphs embedded in S^3 , to appear.
- [Yto] M.Yamamoto : Knots in spatial embeddings of the complete graph on four
vertices, to appear.
- [W1] H.Whitney : Congruent graphs and the connectivity of graphs,
Amer.J.Math., 54(1932), 150-168.
- [W2] ----- : 2-isomorphic graphs, Amer.J.Math., 55(1933), 245-254.