

Constructive infinitely long expressions をもった logic の hierarchy

九 大 理 上 江 洲 忠 弘

§ 1. 序

ω -type の conjunction, quantification をもつ simple type theory で, その formula, variety を Kino-Takeuti [K/T] の意味で 'constructive' なものに限った形式的体系 STCI を考える. $STCI^{\alpha, \beta}$ を formula や variety の ω -type の conjunction の深さ, ω -type の quantification の深さが夫々 ordinal α, β より小さいものに限った STCI の subsystem とし, $STCI^{\alpha, \beta}$ に数論の公理をつけ加えて得られる体系を $NSTCI^{\alpha, \beta}$ とする. α, β を動かすことにより得られる $NSTCI^{\alpha, \beta}$ の hierarchy について述べる.

§ 2. 体系 STCI

2.1. 定義. Type.

- (1) 0 と 1 は type である.
- (2) $t_1, \dots, t_n$ が type ならば $(t_1 \dots t_n)$ は type である.
- (3) 以上により得られるものの $\forall$ が type である.

各 type t に対し、次の様に GN $\ulcorner t \urcorner$ が対応している:

$$\ulcorner 0 \urcorner = 1, \ulcorner 1 \urcorner = 3, \ulcorner (t_1 \dots t_n) \urcorner = \langle \ulcorner t_1 \urcorner, \dots, \ulcorner t_n \urcorner \rangle,$$

但し $\langle m_1, \dots, m_n \rangle$ は数 $2^{m_1} \dots p_{n-1}^{m_n}$ を示す。

以後 type とその GN を同一視することがある。

2.2. 定義. Type 列.

値が type の GN である recursive function を type 列と呼ぶ。

2.3. STCI で用いる記号.

論理記号: $\neg, \wedge, \vee$.

変数記号: free s-variables: $\alpha_0^{\tau}, \alpha_1^{\tau}, \dots$ (τ は type 列).

bound s-variables: $\varphi_0^{\tau}, \varphi_1^{\tau}, \dots$ (").

free variables: $\alpha_0^t, \alpha_1^t, \dots$ (t は type).

bound variables: $\alpha_0^t, \alpha_1^t, \dots$ (").

constant variable: 0 (type は 0).

他の記号: $', \in, \lambda, (,), \rightarrow, ', _$.

これらの記号には各異なる GN が対応しているものとする。

記号 S に対しその GN を $\ulcorner S \urcorner$ で表わす。

2.4. 定義. Qf とその GN, c-nn, q-nn.

(1) δ^{τ} が s-variable ならば, $\delta^{\tau}(j)$ は type $\tau(j)$ の qf τ , その c-nn, q-nn は共に 0 , $\langle \ulcorner \delta^{\tau} \urcorner, j+1 \rangle$ はその GN.

(2) 0 は type 0 の qf τ , その c-nn, q-nn は共に 0 , $\ulcorner 0 \urcorner$ はその GN.

- (3) d^t が variable ならば, d^t は type t の qf τ , τ の c-nm, g-nm は共に 0, $\ulcorner d^t \urcorner$ は τ の GN.
- (4) T が type 0 の qf τ a が T の GN ならば, T' は type 0 の qf τ , τ の c-nm, g-nm は共に 0, $\langle \ulcorner \neg \urcorner, a \rangle$ が τ の GN.
- (5) $V_1, \dots, V_k$ 及 $W \in V$ が夫々 type $t_1, \dots, t_k, (t_1, \dots, t_k)$ の qf τ , $a_1, \dots, a_k, a$ が夫々 $V_1, \dots, V_k, V$ の GN ならば, $V_1 \dots V_k \in V$ は type 1 の qf τ , c-nm, g-nm は各 $\max\{N_{t_c}(V_1), \dots, N_{t_c}(V_k), N_{t_c}(V)\}$, $\max\{N_{t_g}(V_1), \dots, N_{t_g}(V_k), N_{t_g}(V)\}$, $\langle \ulcorner \epsilon \urcorner, \langle a_1, \dots, a_k \rangle, a \rangle$ が GN τ である, 但し, $N_{t_c}(E)$, $N_{t_g}(E)$ は夫々 E の c-nm, g-nm を示す.
- (6) A が type 1 の qf, a が A の GN ならば, $\neg A$ は type 1 の qf τ , c-nm, g-nm は夫々 A の c-nm, g-nm に等しく, $\langle \ulcorner \neg \urcorner, a \rangle$ は A の GN τ である.
- (7) A, B が type 1 の qf, a, b が各 A, B の GN ならば, $(A \wedge B)$ は type 1 の qf τ , c-nm, g-nm は夫々 $\max\{N_{t_c}(A), N_{t_c}(B)\}$, $\max\{N_{t_g}(A), N_{t_g}(B)\}$ τ , $\langle \ulcorner \wedge \urcorner, a, b \rangle$ は τ の GN.
- (8) $A_0, A_1, \dots$ が type 1 の qf τ , f が recursive function の Gödel number τ , 各 i に対し $f(i)$ が A_i の GN ならば, $\wedge(A_0, A_1, \dots)$ は type 1 の qf τ , c-nm, g-nm は夫々 $\sup(N_{t_c}(A_0)+1, N_{t_c}(A_1)+1, \dots)$, $\sup(N_{t_g}(A_0)+1, N_{t_g}(A_1)+1, \dots)$,

$\langle \ulcorner \lambda \urcorner, f \rangle$ がその GN.

(9) x^t が bound variable, A が type 1 の gf , a が A の GN ならば, $\forall x^t A$ は type 1 の gf で, G_{nm} , q_{-nm} は共に A のそれと等しく, $\langle \ulcorner \forall \urcorner, \ulcorner x^t \urcorner, a \rangle$ が GN.

(10) φ^t が bound variable, A が type 1 の gf で, a が A の GN ならば, $\forall \varphi^t A$ は type 1 の gf で, G_{nm} は A の G_{nm} に等しく, q_{-nm} は $N_{t_0}(A)+1$, $\langle \ulcorner \forall \urcorner, \ulcorner \varphi^t \urcorner, a \rangle$ はその GN である.

(11) $y_1^{t_1}, \dots, y_k^{t_k}$ が夫々 type $t_1, \dots, t_k$ の bound variable, A が type 1 の gf , a が A の GN ならば, $\lambda y_1^{t_1} \dots y_k^{t_k} A$ は type $(t_1, \dots, t_k)$ の gf で, G_{nm} , q_{-nm} は共に A のそれと等しく, $\langle \ulcorner \lambda \urcorner, \langle \ulcorner y_1^{t_1} \urcorner, \dots, \ulcorner y_k^{t_k} \urcorner \rangle, a \rangle$ はその GN.

(12) (1) ~ (11) によって得られるもののみが gf である.

2.5. 定義. Variety, formula, variety 列.

free variable, free s-variable も高々有限個しか含まず, bound variable, bound s-variable を free に含むもの type t の gf を type t の variety といい, 特に type 1 の variety を formula という. τ が type 列で, $V_0, V_1, \dots$ が type $\tau(0), \tau(1), \dots$ の variety で, 各 n に対し $\Phi(n)$ が V_n の GN となるような recursive function Φ が存在するとき, $(V_0, V_1, \dots)$ を variety 列と呼ぶ, 但し, $(V_0, V_1, \dots)$ は free variable, free s-variable も高々有

限個しか含まないものとする。

2.6. 定義. *Sequent*.

$A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n$ が formula として, $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n$ が夫々の GN のとき, $A_1, \dots, A_m \rightarrow B_1, \dots, B_n$ を *Sequent* と呼ぶ. $\langle \rightarrow, \langle a_1, \dots, a_m, 1 \rangle, \langle b_1, \dots, b_n, 1 \rangle \rangle$ はその GN である.

証明に関する概念は, Gentzen 流に定義する, 但し, 推論に *Extensionality* を含むものとする.

2.7. 定理. 全ての g^+ の全ての GN の集合は Π_1 -set であり, Π_1 -set に関し complete である.

2.8. 定理. 各 g^+ の α -nn, g -nn は ω_1 (the least ordinal not constructive) より小さい.

2.9. 定義. *c-subformula*, *g-subformula*.

Variety B が variety A の *c-subformula* である ($B \leq_c A$) ということは,

(1) B は A である,

(2) A が $V_1 \dots V_n \in V$ の形として, $B \leq_c V_1, \dots, B \leq_c V_n$ 又は $B \leq_c V$ である,

(3) A が $\neg A_0$ として, $B \leq_c A_0$ である,

(4) A が $(A_0 \wedge A_1)$ として, $B \leq_c A_0$ 又は $B \leq_c A_1$ である,

(5) A が $\forall x^t A_0(x^t)$ として, $B \leq_c A_0(a^t)$ なる A に含まれる a^t

が存在する,

(6) A が $\lambda y_1^{t_1} \dots y_n^{t_n} A_0(y_1^{t_1}, \dots, y_n^{t_n})$ で, $B \leq_c A_0(b_1^{t_1}, \dots, b_n^{t_n})$

なる A に含まれない互に異なる $b_1^{t_1}, \dots, b_n^{t_n}$ が存在する, 又は

(7) A が $\forall \varphi^r A_0(\varphi^r)$ で $B \leq_c A_0(\alpha^r)$ なる A に含まれない α^r が

存在する,

ということである.

g -subformula は上の $\leq_c$ を $\leq_g$ にあてかえ, (7) を次のものにかえて定義される.

(7') A が $\bigwedge (A_0, A_1, \dots)$ で, ある n に対し $B \leq_g A_n$.

2.10. 定義. STCI の subsystem $STCI^{\alpha, \beta}$.

$0 < \alpha, \beta \leq \omega_1$ なる ordinal number α, β に対し, cm , g -nn を夫々 α, β より小さい variety のみに限った STCI の subsystem を $STCI^{\alpha, \beta}$ とする.

2.11. 定理. $0 < \alpha, \beta \leq \omega_1$ ならば, $STCI^{\omega \times \alpha, \omega \times \beta}$ で cut-elimination theorem が成り立つ.

§ 3. $STCI^{\alpha, \beta}$ 上の number theory $NSTCI^{\alpha, \beta}$

3.1. 定義. $NSTCI^{\alpha, \beta}$.

(1) $\alpha > 1$ のとき, $STCI^{\alpha, \beta}$ に公理として $\overline{N}$ を加えたものが $NSTCI^{\alpha, \beta}$ である, 但し, $\overline{N}$ は次の三つの公理である:

$N_1: \forall x_0 \neg x_0' = 0,$

$N_2: \forall x_0 \forall x_1 (x_0' = x_1' \vdash x_0 = x_1),$

$N_3: \forall x_0^{(0)} (0 \in x_0^{(0)} \wedge \forall x_1^{(0)} (x_1^{(0)} \in x_0^{(0)} \vdash x_1^{(0)} \in x_0^{(0)}) \vdash \forall x_0^{(0)} x_0^{(0)} \in x_0^{(0)})$,
 但し, $a^0 = b^0$ は $\forall x^{(0)} (a^0 \in x^{(0)} \vdash b^0 \in x^{(0)})$ の略であり,
 $A \vdash B$ は $\neg(A \wedge \neg B)$ の略である.

(2) $\alpha = 1$ のとき, $STCI^{\alpha, \beta}$ に公理として Γ_N を加え, 更に ω -rule を加えたものが $NSTCI^{\alpha, \beta}$ である.

注意. $\alpha > 1$ のとき, $NSTCI^{\alpha, \beta}$ で ω -rule が導かれる. 即ち, $\forall x^{(0)} (\wedge (0 \in x^{(0)}, 1 \in x^{(0)}, 2 \in x^{(0)}, \dots) \vdash \forall x^{(0)} x^{(0)} \in x^{(0)})$ が $NSTCI^{\alpha, \beta}$ で証明可能である, 但し, $1, 2, \dots$ は $0', 0'', \dots$ を示す.

Γ を formal expression のある集合とする. このとき, Γ の全ての元の GN の集合を $N \models \Gamma$ で表わすことにする. $X^{\alpha, \beta}$ を $NSTCI^{\alpha, \beta}$ の全ての証明可能な formula の集合とすると, $N \models X^{\alpha, \beta}$ は Π_1 -set であり, $A_\omega \subset X^{\alpha, \beta}$ である, 但し, A_ω は $[G/M/R]$ のオ2階述語論理の上の number theory の全ての証明可能な formula の集合である. 従って Π_1 -set は $X^{\alpha, \beta}$ で representable であるから, 次の定理を得る.

3.2. 定理. $P_n(a^0)$ を “ a^0 は $NSTCI^{\alpha, \beta}$ で証明可能である” ということを表わす formula とすると, $n \in N \models X^{\alpha, \beta}$ ならば, $P_n(n)$ は $NSTCI^{\alpha, \beta}$ で証明可能である.

3.3. 定理. $NSTCI^{\alpha, \beta}$ が無矛盾ならば, $NSTCI^{\alpha, \beta}$ の無矛盾性は $NSTCI^{\alpha, \beta}$ では証明出来ない.

§4. NSTCI $^{\alpha, \beta}$ の hierarchy

4.1. NSTCI $^{\alpha, \beta}$ の subsystem NSTCI $^{\alpha, \beta}_{\#}$.

NSTCI $^{\alpha, \beta}_{\#}$ は NSTCI $^{\alpha, \beta}$ を次の様にして制限して得られる体系である.

(1) type は 0, (0), ((0)), ... のみに制限する.

(() が n 個 0 についた type を $\bar{n}$ で表わす.)

(2) type α は τ_0 のみ, 但し, $\tau_0(i) = \lceil \bar{i} \rceil$.

4.2. 定理. NSTCI $^{\alpha, \beta}$ と NSTCI $^{\alpha, \beta}_{\#}$ は同等である.

4.3. 定理. $0 < \beta < \alpha \leq \omega_1$ のとき, NSTCI $^{\alpha, 1}$ は本質的に NSTCI $^{\beta, 1}$ より強い体系である.

証明. NSTCI $^{\beta, 1}_{\#}$ の truth definition を NSTCI $^{\alpha, 1}$ の中で行なう.

まず, 次の様な gfs を考える. 以下に現われる論理記号

$\exists, \exists!, \forall, \vdash, \vdash!$ は $\vee, \wedge, \neg$ を用いて通常の様子に組合わせて得られたものの省略記号である.

$$\left\{ \begin{array}{l} a^0 \doteq b^0 \equiv a^0 = b^0. \\ a^0 \doteq b^{\bar{n}+1} \equiv \forall x^0 (x^0 < a^0 \vdash \exists y^{\bar{n}} (x^0 \doteq y^{\bar{n}} \wedge y^{\bar{n}} \in b^{\bar{n}+1})) \\ \quad \wedge \forall y^{\bar{n}} (y^{\bar{n}} \in b^{\bar{n}+1} \vdash \exists x^0 (y^{\bar{n}} \doteq x^0 \wedge x^0 < a^0)). \\ a^{\bar{m}+1} \doteq b^0 \equiv b^0 \doteq a^{\bar{m}+1}. \\ a^{\bar{m}+1} \doteq b^{\bar{n}+1} \equiv \forall x^{\bar{m}} (x^{\bar{m}} \in a^{\bar{m}+1} \vdash \exists y^{\bar{n}} (x^{\bar{m}} \doteq y^{\bar{n}} \wedge y^{\bar{n}} \in b^{\bar{n}+1})) \\ \quad \wedge \forall y^{\bar{n}} (y^{\bar{n}} \in b^{\bar{n}+1} \vdash \exists x^{\bar{m}} (y^{\bar{n}} \doteq x^{\bar{m}} \wedge x^{\bar{m}} \in a^{\bar{m}+1})). \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} a^\circ \in b^\circ \equiv a^\circ < b^\circ. \\ a^\circ \in b^{\circ\circ} \equiv \exists x^\circ (a^\circ = x^\circ \wedge x^\circ \in b^{\circ\circ}). \end{cases}$$

$$V(x^\circ, y^\circ) \equiv "x^\circ \text{ is type } y^\circ \text{ of variable } \tau \text{ at } \tau."$$

$$F_m(x^\circ, y^\circ) \equiv \begin{cases} x^\circ = 0 \vdash \exists y_1^\circ (y_1^\circ = y^\circ). \\ x^\circ = a^\circ \vdash \forall y_1^\circ (y_1^\circ \in y^\circ \vdash F_m(a^\circ, y_1^\circ)). \end{cases}$$

$$A_m(a^{(\circ)}) \equiv \forall x^\circ \forall y^\circ (V(x^\circ, y^\circ) \vdash \exists! y_1^\circ (y_1^\circ x^\circ \in a^{(\circ)} \wedge F_m(y^\circ, y_1^\circ))).$$

$$\begin{aligned} E_{m,n}(f^{(\circ)}, g^{(\circ)}, x^\circ) \equiv & \forall y^\circ \forall z^\circ (V(y^\circ, z^\circ) \wedge \neg y^\circ = z^\circ \vdash \\ & \exists y_1^\circ \exists z_1^\circ (y_1^\circ y^\circ \in f^{(\circ)} \wedge z_1^\circ y^\circ \in g^{(\circ)} \wedge y_1^\circ = z_1^\circ)) \\ & \wedge A_m(f^{(\circ)}) \wedge A_n(g^{(\circ)}). \end{aligned}$$

$$\text{Form}(x^\circ, y^\circ, z^\circ) \equiv "x^\circ \text{ is c-m or constructive ordinal } y^\circ \text{ at } \tau \text{ and } \tau \text{ is q-m or constructive ordinal } z^\circ \text{ at } \tau \text{ formula}."$$

$$\text{SF}_c(w^\circ, x^\circ, y^\circ, z^\circ) \equiv \text{Form}(w^\circ, y^\circ, z^\circ) \wedge "x^\circ \text{ is } w^\circ \text{ of c-subformula}."$$

$$\text{SF}_q(w^\circ, x^\circ, y^\circ, z^\circ) \equiv \text{Form}(w^\circ, y^\circ, z^\circ) \wedge "x^\circ \text{ is } w^\circ \text{ of q-subformula}."$$

$$B_{m,n}(i^\circ, f^{(\circ)}, u^{(0 \cap (\circ))}) \equiv$$

$$\{i^\circ = 0^\circ \vdash i^\circ 0^\circ f^{(\circ)} \in u^{(0 \cap (\circ))}\}$$

$$\wedge \{i^\circ = a^\circ \vdash \forall x^\circ (i^\circ x^\circ f^{(\circ)} \in u^{(0 \cap (\circ))} \vdash x^\circ a^\circ f^{(\circ)} \in u^{(0 \cap (\circ))})\}$$

$$\wedge \{i^\circ = \neg^\circ \vdash \forall x^\circ (i^\circ x^\circ f^{(\circ)} \in u^{(0 \cap (\circ))} \vdash \exists y^\circ (\neg^\circ y^\circ f^{(\circ)} \in u^{(0 \cap (\circ))} \wedge x^\circ = y^\circ))\}$$

$$\wedge \{i^\circ = \vee^\circ \vdash (i^\circ 0^\circ f^{(\circ)} \in u^{(0 \cap (\circ))} \vdash \exists x^\circ \exists y^\circ (\vee^\circ x^\circ f^{(\circ)} \in u^{(0 \cap (\circ))} \wedge \vee^\circ y^\circ f^{(\circ)} \in u^{(0 \cap (\circ))} \wedge x^\circ = y^\circ))\}$$

$$\wedge \{i^\circ = \neg^\circ A^\circ \vdash (i^\circ 0^\circ f^{(\circ)} \in u^{(0 \cap (\circ))} \vdash \neg^\circ A^\circ f^{(\circ)} \in u^{(0 \cap (\circ))})\}$$

$$\wedge \{i^\circ = (A^\circ \wedge B^\circ)^\circ \vdash (i^\circ 0^\circ f^{(\circ)} \in u^{(0 \cap (\circ))} \vdash A^\circ f^{(\circ)} \in u^{(0 \cap (\circ))} \wedge B^\circ f^{(\circ)} \in u^{(0 \cap (\circ))})\}$$

$$\wedge \{i^0 = \ulcorner \forall x^k \sigma(x^k) \urcorner \wedge k \leq n \vdash (i^0 \circ f^{(\bar{n}^0)} \in u^{(0, \bar{n}^0(\bar{n}^0))}) \vdash \forall g^{(\bar{n}^0)} (E_{n,n}(f^{(\bar{n}^0)}, g^{(\bar{n}^0)}, a^{\bar{k}}) \vdash$$

$$\ulcorner \sigma(a^{\bar{k}}) \urcorner \circ g^{(\bar{n}^0)} \in u^{(0, \bar{n}^0(\bar{n}^0))}) \}$$

$$\wedge \{i^0 = \ulcorner \forall x^k \sigma(x^k) \urcorner \wedge k > n \vdash \forall j^0 \forall h^{(\bar{n}^0)} \forall x^{\bar{n}} \neg j^0 x^{\bar{n}} h^{(\bar{n}^0)} \in u^{(0, \bar{n}^0(\bar{n}^0))} \}$$

$$\wedge \{i^0 = \ulcorner \lambda x^k \sigma(x^k) \urcorner \wedge k \leq n \vdash \forall x^{\bar{n}} (i^0 x^{\bar{n}} f^{(\bar{n}^0)} \in u^{(0, \bar{n}^0(\bar{n}^0))}) \vdash \forall z^{\bar{n}} (z^{\bar{n}} \in x^{\bar{n}} \vdash$$

$$\exists g^{(\bar{n}^0)} (E_{n,n}(f^{(\bar{n}^0)}, g^{(\bar{n}^0)}, a^{\bar{k}}) \wedge z^{\bar{n}} \ulcorner a^{\bar{k}} \urcorner \in g^{(\bar{n}^0)} \wedge \ulcorner \sigma(a^{\bar{k}}) \urcorner \circ g^{(\bar{n}^0)} \in u^{(0, \bar{n}^0(\bar{n}^0))}) \}) \}$$

$$\wedge \{i^0 = \ulcorner \lambda x^k \sigma(x^k) \urcorner \wedge k > n \vdash \forall j^0 \forall x^{\bar{n}} \forall h^{(\bar{n}^0)} \neg j^0 x^{\bar{n}} h^{(\bar{n}^0)} \in u^{(0, \bar{n}^0(\bar{n}^0))} \}$$

$$S_{m,n}^1(h^0, u^{(0, \bar{n}^0(\bar{n}^0))}) \equiv \forall i^0 \forall x^0 \forall f^{(\bar{n}^0)} (Form(i^0, z, z) \wedge i^0 x^0 f^{(\bar{n}^0)} \in u^{(0, \bar{n}^0(\bar{n}^0))} \vdash$$

$$x^0 = 0 \vee x^0 = 1) \wedge \forall i^0 \forall f^{(\bar{n}^0)} (SF_c(h^0, i^0, z, z) \wedge A_n(f^{(\bar{n}^0)}) \vdash B_{n,n}(i^0, f^{(\bar{n}^0)}, u^{(0, \bar{n}^0(\bar{n}^0))})).$$

$$Sat_m^k(h^0, f^{(\bar{n}^0)}) \equiv V(\exists u^{(0, \bar{n}^0(\bar{n}^0))} (S_{0,n}^k(h^0, u^{(0, \bar{n}^0(\bar{n}^0))}) \wedge h^0 \circ f^{(\bar{n}^0)} \in u^{(0, \bar{n}^0(\bar{n}^0))}),$$

$$\exists u^{(0, \bar{n}^0(\bar{n}^0))} (S_{m,n}^k(h^0, u^{(0, \bar{n}^0(\bar{n}^0))}) \wedge h^0 \circ f^{(\bar{n}^0)} \in u^{(0, \bar{n}^0(\bar{n}^0))}), \dots) \wedge A_n(f^{(\bar{n}^0)}),$$

$$\text{但し, } k = 1 \text{ 又は } k = 2^k.$$

$$Sat_m^{3^k} (h^0, f^{(\bar{n}^0)}) \equiv V(Sat_m^{i_{k+1}(0)} (h^0, f^{(\bar{n}^0)}), Sat_m^{i_{k+1}(1)} (h^0, f^{(\bar{n}^0)}), \dots).$$

$$S_{m,n}^{2^k} (h^0, u^{(0, \bar{n}^0(\bar{n}^0))}) \equiv \forall i^0 \forall x^0 \forall f^{(\bar{n}^0)} (Form(i^0, 2^{2^k}, 2) \wedge i^0 x^0 f^{(\bar{n}^0)} \in u^{(0, \bar{n}^0(\bar{n}^0))}$$

$$\vdash x^0 = 0 \vee x^0 = 1) \wedge \forall i^0 \forall f^{(\bar{n}^0)} (SF_c(h^0, i^0, 2^{2^k}, 2) \wedge A_n(f^{(\bar{n}^0)}) \vdash B_{n,n}(i^0, f^{(\bar{n}^0)},$$

$$u^{(0, \bar{n}^0(\bar{n}^0))}) \wedge \{i^0 = \ulcorner \wedge (A_0, A_1, \dots) \urcorner \vdash (i^0 \circ f^{(\bar{n}^0)} \in u^{(0, \bar{n}^0(\bar{n}^0))}) \vdash \forall j Sat_m^k(A_j, f^{(\bar{n}^0)}) \}) \}.$$

$$St_m^k(i^0, f^{(\bar{n}^0)}) \equiv i^0 = \ulcorner A_1, \dots, A_r \rightarrow B_1, \dots, B_s \urcorner \vdash \exists l \neg Sat_m^k(A_l, f^{(\bar{n}^0)}) \vee$$

$$\exists l Sat_m^k(A_l, f^{(\bar{n}^0)}).$$

$Prov(i^0, j^0, k^0) \equiv$ “ j^0, k^0 の order type α, β の constructive ordinal ならば, i^0 は $NSTCI_{\#}^{\alpha, \beta}$ で証明可能な formula である”.

すると, 次の事が成り立つ.

$$A_n(f^{(\bar{n}^0)}), Prov(i^0, n, 2) \rightarrow St_m^n(i^0, f^{(\bar{n}^0)})$$

は, $\text{NSTCI}^{\alpha,1}$ で証明可能である. 但し, $n \in \mathbb{O}$ で $|n| < \alpha$.

従って, $\beta < \alpha$ に対し, $\text{NSTCI}_{\#}^{\beta,1}$ の無矛盾性が $\text{NSTCI}^{\alpha,1}$ でいえた.

同様に, 次の定理が成り立つ.

4.4. 定理. $0 < \beta < \alpha \leq \omega$ のとき $\text{NSTCI}^{\omega,\alpha}$ は本質的に $\text{NSTCI}^{\omega,\beta}$ より強い体系である.

参考文献

- [G/M/R] A. Grzegorzczk, A. Mostowski and C. Ryll-Nardzewski, The classical and the ω -complete arithmetic, J. S. L., 23 (1958), 188-206.
- [K/T] A. Kino and G. Takeuti, On predicates with constructive infinitely long expressions, J. Math. Soc. Japan, 15 (1963), 176-190.