

完全2組グラフの bipartite 分解について

新居 浜 高 専 潮 和 久

§ 0. はじめに

$n_1 + n_2$ 個の点と $n_1 n_2$ 本の線からなる 完全2組グラフ K_{n_1, n_2} ($n_1 \leq n_2$) を, $k_1 + k_2$ 個の点と $k_1 k_2$ 本の線からなる 完全2組グラフ K_{k_1, k_2} ($k_1 \leq k_2$) の和 (互いに線を共有しない) に分解すること (bipartite 分解) を考える.

bipartite 分解において, 分解された1つ1つの K_{k_1, k_2} を ブロック とよぶ. K_{n_1, n_2} の2組の点集合を V_1, V_2 ($|V_1| = n_1, |V_2| = n_2$) とする. V_1 の点を k_1 個と V_2 の点を k_2 個もつブロックを A型ブロック とよび, V_2 の点を k_1 個と V_1 の点を k_2 個もつブロックを B型ブロック とよぶ.

K_{n_1, n_2} が K_{k_1, k_2} の和に bipartite 分解されることを

$$K_{n_1, n_2} \longrightarrow K_{k_1, k_2}$$

で表わし, bipartite 分解されないことを

$$K_{n_1, n_2} \nrightarrow K_{k_1, k_2}$$

で表わす.

§1. bipartite 分解の必要条件

bipartite 分解の必要条件に関して, 次の定理を得る.

定理 1 $K_{n_1, n_2} \longrightarrow K_{k_1, k_2} \quad (n_1 \leq n_2, k_1 \leq k_2)$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (N1) \quad k_1 \leq n_1, \quad k_2 \leq n_2 \\ (N2) \quad k_1, k_2 \mid n_1, n_2 \\ (N3) \quad n_1 = k_1 x_i + k_2 y_i, \quad n_2 = k_1 x'_j + k_2 y'_j \\ \quad \quad \quad (i=1, 2, \dots, n_2; \quad j=1, 2, \dots, n_1) \\ \text{ただし, } x_i, y_i, x'_j, y'_j, b_1, b_2 \text{ は} \\ (N4) \quad \sum_{i=1}^{n_2} k_1 x_i = \sum_{j=1}^{n_1} k_2 y'_j = b_1 k_1 k_2, \quad \sum_{i=1}^{n_2} k_2 y_i = \sum_{j=1}^{n_1} k_1 x'_j = b_2 k_1 k_2 \\ \text{をみたす非負の整数} \end{array} \right.$$

証明 $K_{n_1, n_2} (n_1 \leq n_2)$ が b_1 個の A 型ブロックと b_2 個の B 型ブロックに分解されたものとする. 各ブロック $K_{k_1, k_2} (k_1 \leq k_2)$ は K_{n_1, n_2} のサブグラフであるから, $k_1 \leq n_1, k_2 \leq n_2 \therefore k_1 \leq n_1$. さらに, $n_2 \geq k_1, n_2 \geq k_2 \therefore n_2 \geq k_2$. 従って, (N1) は必要である. K_{n_1, n_2} は $n_1 n_2$ 本の線をもち, 各ブロックは $k_1 k_2$ 本の線をもつから, $k_1 k_2 \mid n_1 n_2$ が成り立つ. 従って, (N2) は必要である.

V_2 の点 v_i をもつ A 型ブロックの数を x_i , B 型ブロックの数を y_i とすれば, v_i は $k_1 x_i + k_2 y_i$ 個の点と結ばれている. v_i は V_1 の n_1 個の点とすべて結ばれているから, $n_1 = k_1 x_i + k_2 y_i$ が成り立つ. V_1 の点 v'_j をもつ B 型ブロックの数を x'_j , A 型ブロックの

数を y'_i とすれば, v'_i は $k_1 x'_i + k_2 y'_i$ 個の点と結ばれている. v'_i は V_2 の n_2 個の点とすべて結ばれているから, $n_2 = k_1 x'_i + k_2 y'_i$ が成り立つ. 従って, (N3) は必要である.

b_1 個の A 型ブロックの線を, v_i を結ぶ線として, 及び, v'_i を結ぶ線として, 2 通りに数えれば, $\sum_{i=1}^{n_1} k_1 x_i = \sum_{i=1}^{n_1} k_2 y'_i = b_1 k_1 k_2$ が成り立つ. b_2 個の B 型ブロックの線を, v_i を結ぶ線として, 及び, v'_i を結ぶ線として, 2 通りに数えれば, $\sum_{i=1}^{n_1} k_2 y_i = \sum_{i=1}^{n_1} k_1 x'_i = b_2 k_1 k_2$ が成り立つ. 従って, (N4) は必要である.

必要条件 (N1) - (N4) はまた十分条件でもあるように思われる. 事実, このあとの章に述べるように, (N1) - (N4) をみたすパラメータ $k_1, k_2, n_1, n_2, x_i, y_i, x'_i, y'_i, b_1, b_2$ に関して, 多くの場合, 十分条件でもあることが証明される.

§ 2. 隣接行列

bipartite 分解に役立つ隣接行列を考える. V_1 の n_1 個の点を列方向に並び, V_2 の n_2 個の点を行方向に並べる. V_2 の点 v_i と V_1 の点 v'_j を結ぶ線を (i, j) 要素と対応させる. V_2 の点 v_i と V_1 の点 v'_j を線で結ぶとき, (i, j) 要素の値を 1 とし, 結ばないとき 0 とすれば, 各ブロックに対して, $n_2 \times n_1$ の 0-1 行列 (隣接行列) が対応する.

今, A 型ブロックの 1 つを

$$B = \{B_1; B_2\} \quad (|B_1| = k_1, |B_2| = k_2, B_1 \subset V_1, B_2 \subset V_2)$$

とすれば,

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & (v_i \in B_2 \text{ かつ } v'_j \in B_1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{n_1} m_{ij} = \begin{cases} k_1 & (v_i \in B_2) \\ 0 & (v_i \notin B_2) \end{cases} \quad \sum_{i=1}^{n_2} m_{ij} = \begin{cases} k_2 & (v'_j \in B_1) \\ 0 & (v'_j \notin B_1) \end{cases} \quad \sum_{i=1}^{n_2} \sum_{j=1}^{n_1} m_{ij} = k_1 k_2$$

をみたす隣接行列 $M = \|m_{ij}\|$ が対応する.

B型ブロックの1つを

$$B = \{B_1, B_2\} \quad (|B_1| = k_1, |B_2| = k_2, B_1 \subset V_2, B_2 \subset V_1)$$

とすれば,

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & (v_i \in B_1 \text{ かつ } v'_j \in B_2) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{n_1} m_{ij} = \begin{cases} k_2 & (v_i \in B_1) \\ 0 & (v_i \notin B_1) \end{cases} \quad \sum_{i=1}^{n_2} m_{ij} = \begin{cases} k_1 & (v'_j \in B_2) \\ 0 & (v'_j \notin B_2) \end{cases} \quad \sum_{i=1}^{n_2} \sum_{j=1}^{n_1} m_{ij} = k_1 k_2$$

をみたす隣接行列 $M = \|m_{ij}\|$ が対応する.

A型ブロックに対応する隣接行列を A-行列, B型ブロックに対応する隣接行列を B-行列 とよぶ. どの要素の値も 1 となる $n_2 \times n_1$ の行列を M_G とすれば, K_{n_1, n_2} には M_G が対応する.

従って, K_{n_1, n_2} の bipartite 分解の問題は, 行列 M_G を何個かの A-行列と B-行列の和に分解する問題であるといえるので, 次の定理が成り立つ.

定理 2.1 K_{n_1, n_2} が b_1 個の A型ブロック $B_A^{(p)}$ と b_2 個の B型ブ

ランク $B_B^{(p)}$ に分解されるための必要十分条件は,

$$M_G = \sum_{p=1}^{b_1} M_A^{(p)} + \sum_{q=1}^{b_2} M_B^{(q)}$$

が成り立つことである。ここで, $M_A^{(p)}$ は $B_A^{(p)}$ に対応する A-行列, $M_B^{(q)}$ は $B_B^{(q)}$ に対応する B-行列である。

必要条件 (N1) - (N4) の十分性に関して, 次の定理を得る。

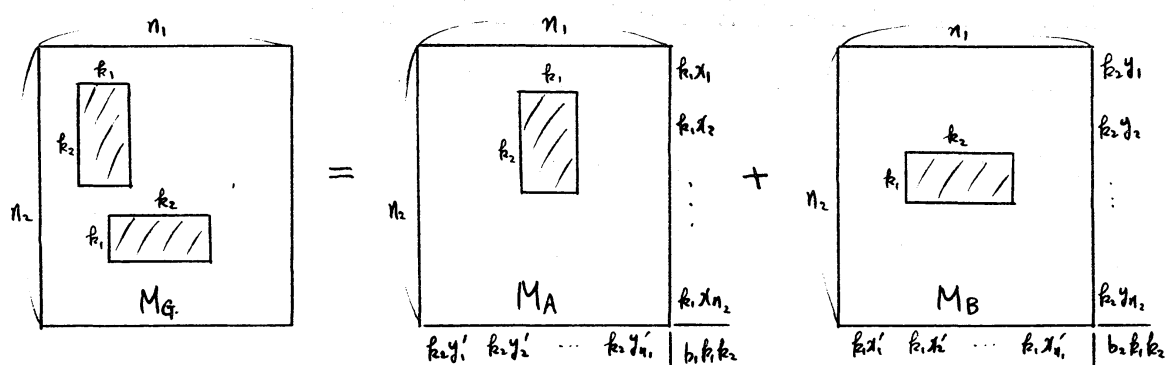
定理 2.2 (N1) - (N4) をみたす λ -マトに関して,

(I) 行和ベクトル $(k_1x_1, k_1x_2, \dots, k_1x_{n_1})$ と列和ベクトル $(k_2y_1', k_2y_2', \dots, k_2y_{n_1}')^T$ をもつ隣接行列 M_A と, 行和ベクトル $(k_2y_1, k_2y_2, \dots, k_2y_{n_1})$ と列和ベクトル $(k_1x_1', k_1x_2', \dots, k_1x_{n_1}')^T$ をもつ隣接行列 M_B が存在する。

(II) $M_A + M_B = M_G$ が成り立つ。

(III) M_A が b_1 個の A-行列に, M_B が b_2 個の B-行列に分解される。

ただし $K_{n_1, n_2} \longrightarrow K_{k_1, k_2}$ 。



必要条件 (N1) - (N4) の十分性を

$$(i) \quad n_1 \leq n_2, \quad k_1 = k_2$$

$$(ii) \quad n_1 \leq n_2, \quad 1 = k_1 < k_2$$

$$(iii) \quad n_1 = n_2, \quad 1 < k_1 < k_2$$

$$(iv) \quad n_1 < n_2, \quad 1 < k_1 < k_2$$

の4つの場合において考える.

§ 3. bipartite 分解 ($n_1 \leq n_2, k_1 = k_2$ の場合)

$n_1 \leq n_2, k_1 = k_2 = p$ の場合, 次の定理が成り立つ.

$$\text{定理 3} \quad K_{n_1, n_2} \longrightarrow K_{p, p} \iff p | n_1, p | n_2$$

§ 4. bipartite 分解 ($n_1 \leq n_2, 1 = k_1 < k_2$ の場合)

$k_1 = 1$ の時, $K_{1, k_2} (k_2 \geq 2)$ は次数 k_2 の claw または star とよばれる.

$n_1 \leq n_2$ の場合, 完全二組グラフの claw 分解に関して, 次の定理が得られる.

$$\text{定理 4 [1; Theorem 2.2]} \quad K_{n_1, n_2} \longrightarrow K_{1, k_2} \iff \begin{cases} k_2 | n_2 & (n_1 < k_2 \text{ のとき}) \\ k_2 | n_1, n_2 & (n_1 \geq k_2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

§ 5. bipartite 分解 ($n_1 = n_2, 1 < k_1 < k_2$ の場合)

$n_1 = n_2 = n, 1 < k_1 < k_2$ の場合, 必要条件 (N1) より $k_2 \leq n$ である.

(i) $k_2 = n$, (ii) $k_2 < n$ の2通りを考える.

5.1 bipartite 分解 ($1 < k_1 < k_2 = n$ の場合)

$1 < k_1 < k_2 = n$ の場合, 次の定理が成り立つ.

$$\text{定理 5.1} \quad K_{n, n} \longrightarrow K_{k_1, k_2} \iff k_1 | n$$

5.2 bipartite 分解 ($1 < k_1 < k_2 < n$ の場合)

$(k_1, k_2) = d$ とおく. (i) $d = k_1$, (ii) $1 \leq d < k_1$ の 2通り が考へ
さへる.

5.2.1 bipartite 分解 ($1 < k_1 < k_2 < n, d = k_1$ の場合)

$1 < k_1 < k_2 < n, d = k_1$ の場合, 次の定理が成り立つ.

定理 5.2 $K_{n,n} \longrightarrow K_{k_1, k_2} \Leftrightarrow$ (i) $k_1 k_2 | n^2$, (ii) $n = k_1 x + k_2 y$ ($x, y \geq 0$)

5.2.2 bipartite 分解 ($1 < k_1 < k_2 < n, 1 \leq d < k_1$ の場合)

$k_1 = d k'_1, k_2 = d k'_2, (k'_1, k'_2) = 1$ とおく. 必要条件 (N3) より, $n = k_1 x + k_2 y = d(k'_1 x + k'_2 y)$. $\therefore d | n$. $n = d n'$ とおく. 必要条件 (N2) より, $k_1 k_2 | n^2 \therefore k'_1 k'_2 | n'^2$. k'_1, k'_2, n' は必要条件 (N1)-(N4) をみたす.
 k'_1, k'_2, n' に関する 2, 次の lemma が成り立つ.

Lemma 5.3 $K_{n', n'} \longrightarrow K_{k'_1, k'_2} \Rightarrow K_{d n', d n'} \longrightarrow K_{d k'_1, d k'_2}$

Lemma 5.3 より, $(k_1, k_2) = 1, 1 < k_1 < k_2 < n$ をみたす x, y, k_1, k_2, n を用いて, 必要条件 (N1)-(N4) の十分性を証明する.

必要条件 (N3) に関する 2, 次の定理が成り立つ.

定理 5.4 $(k_1, k_2) = 1$ のとき, $n = k_1 x + k_2 y$ ($x, y \geq 0$) をみたす (x, y)

が 1 個だけ存在する $\Rightarrow K_{n,n} \longrightarrow K_{k_1, k_2}$

$n = k_1 x + k_2 y$ ($x, y \geq 0$) をみたす (x, y) が α 個 ($\alpha \geq 2$) とする. $n = k_1 x_i + k_2 y_i$ ($i = 1, 2, \dots, \alpha$) ($x_1 < x_2 < \dots < x_\alpha$) とおく. $(k_1, k_2) = 1$ より, $x_i = x_1 + (i-1)k_2$, $y_i = y_\alpha + (\alpha-i)k_1$ ($0 \leq x_1 < k_2, 0 \leq y_\alpha < k_1$), $n = k_1 x_i + k_2 y_i = (\alpha-1)k_1 k_2 + k_1 x_1 + k_2 y_\alpha$ とある. $n_0 = n - (\alpha-2)k_1 k_2$ とおく. $n_0 = k_1 k_2 + k_1 x_1 + k_2 y_\alpha = k_1 x_1 + k_2 (y_\alpha + k_1)$

$= k_1(x_1 + k_2) + k_2 y_2$ とおき, $n_0 = k_1 x + k_2 y$ ($x, y \geq 0$) を満たす (x, y) が 2 個存在する. k_1, k_2, n_0 に関して, 次の lemma が成り立つ.

Lemma 5.5 $K_{n_0, n_0} \longrightarrow K_{k_1, k_2} \Rightarrow K_{n_0 + (d-2)k_1 k_2, n_0 + (d-2)k_1 k_2} \longrightarrow K_{k_1, k_2}$

Lemma 5.5 より, 非負の解を 2 個もつ n に対して, 必要条件 (N1) - (N4) の十分性を証明する.

$n = k_1 x_1 + k_2 y_1 = k_1 x_2 + k_2 y_2$ ($0 \leq x_1 < k_2, 0 \leq y_2 < k_1, x_2 = x_1 + k_2, y_1 = y_2 + k_1$) とおく. このとき, $n = k_1 k_2 + k_1 x_1 + k_2 y_2$ である. k_1, k_2, n に関して, (i) $k_1 k_2 | n$, (ii) $k_1 k_2 \nmid n$ の 2 通りが考えられる.

(I) $k_1 k_2 | n$ の場合 一般に, $k_1 k_2 | n$ の時, 次の定理が成り立つ.

定理 5.6 $k_1 k_2 | n \Rightarrow K_{n, n} \longrightarrow K_{k_1, k_2}$

(II) $k_1 k_2 \nmid n$ の場合 k_1, k_2 を素因数分解する:

$$k_1 = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r} = p_1^2 Q_1, k_2 = q_1^{d_1} q_2^{d_2} \cdots q_t^{d_t} = p_2^2 Q_2$$

とおく. このとき, $P_1 = p_1^{\frac{e_1-2}{2}} p_2^{\frac{e_2-2}{2}} \cdots p_r^{\frac{e_r-2}{2}}, Q_1 = k_1 / P_1^2, P_2 = q_1^{\frac{d_1-2}{2}} q_2^{\frac{d_2-2}{2}} \cdots q_t^{\frac{d_t-2}{2}}, Q_2 = k_2 / P_2^2$ である.

このとき, 次の lemma が成り立つ.

Lemma 5.7 $(k_1, k_2) = 1, k_1 k_2 | n^2 \Rightarrow P_1 Q_1 P_2 Q_2 | n$

$n = P_1 Q_1 P_2 Q_2 R$ とおく. $k_1 = P_1^2 Q_1, k_2 = P_2^2 Q_2, n = P_1 Q_1 P_2 Q_2 R$ を $n = k_1 x_1 + k_2 y_1$ に代入すれば, $(k_1, k_2) = 1, 0 \leq x_1 < k_2, k_1 \leq y_1 < 2k_1$ より

$$x_1 = \alpha P_2 Q_2, y_1 = \beta P_1 Q_1, R = \alpha P_1 + \beta P_2 \quad (0 \leq \alpha < P_2, P_1 \leq \beta < 2P_1)$$

を得る. さらに, $x_2 = x_1 + k_2, y_2 = y_1 - k_1$ より

$$x_2 = (\alpha + P_2) P_2 Q_2, y_2 = (\beta - P_1) P_1 Q_1$$

を得る.

行和ベクトル $(\overbrace{k_1 x_1, \dots, k_1 x_1}^{m_1}, \overbrace{k_1 x_2, \dots, k_1 x_2}^{m_2})$ と列和ベクトル $(\overbrace{k_2 y_1, \dots, k_2 y_1}^{m_3}, \overbrace{k_2 y_2, \dots, k_2 y_2}^{m_4})$ をもつ隣接行列 M_A と, 行和ベクトル $(\overbrace{k_2 y_1, \dots, k_2 y_1}^{m_1}, \overbrace{k_2 y_2, \dots, k_2 y_2}^{m_2})$ と列和ベクトル $(\overbrace{k_1 x_1, \dots, k_1 x_1}^{m_3}, \overbrace{k_1 x_2, \dots, k_1 x_2}^{m_4})$ をもつ隣接行列 M_B の存在を証明する ($m_1 + m_2 = m_3 + m_4 = n$).

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{c} k_1 \\ \hline \text{ } \\ \hline k_2 \end{array} & \begin{array}{c} k_2 \\ \hline \text{ } \\ \hline k_1 \end{array} \\ \hline \end{array} \quad M_A = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{c} k_1 \\ \hline \text{ } \\ \hline k_2 \end{array} & \begin{array}{c} k_2 y_1 \\ \vdots \\ k_2 y_1 \end{array} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{c} k_2 \\ \hline \text{ } \\ \hline k_1 \end{array} & \begin{array}{c} k_1 x_1 \\ \vdots \\ k_1 x_1 \end{array} \\ \hline \end{array} \quad M_B
 \end{array}$$

$\underbrace{k_2 y_1 \dots k_2 y_1}_{m_3} \quad \underbrace{k_2 y_2 \dots k_2 y_2}_{m_4} \quad \underbrace{k_1 x_1 \dots k_1 x_1}_{m_3} \quad \underbrace{k_1 x_2 \dots k_1 x_2}_{m_4}$

$$(N4) \begin{cases} k_1 x_1 m_1 + k_1 x_2 m_2 = k_2 y_1 m_3 + k_2 y_2 m_4 = b_1 k_1 k_2 \\ k_2 y_1 m_1 + k_2 y_2 m_2 = k_1 x_1 m_3 + k_1 x_2 m_4 = b_2 k_1 k_2 \\ m_1 + m_2 = m_3 + m_4 = n \end{cases}$$

をみたすように, m_1, m_2, m_3, m_4 を決めた. $m_1 + m_2 = m_3 + m_4 = n$

をみたす m_1, m_2, m_3, m_4 に対し, 次の lemma が成り立つ.

Lemma 5.8 $k_1 x_1 m_1 + k_1 x_2 m_2, k_2 y_1 m_3 + k_2 y_2 m_4, k_2 y_1 m_1 + k_2 y_2 m_2, k_1 x_1 m_3 + k_1 x_2 m_4$

は, $k_1 k_2$ の倍数である.

Lemma 5.9 $(k_1 x_1 m_1 + k_1 x_2 m_2) + (k_2 y_1 m_1 + k_2 y_2 m_2) = n^2$

$(k_2 y_1 m_3 + k_2 y_2 m_4) + (k_1 x_1 m_3 + k_1 x_2 m_4) = n^2$ である.

$(k_1, k_2) = 1, k_1 k_2 \nmid n, 0 \leq x_1 < k_2, 0 \leq y_2 < k_1, n = k_1 k_2 + k_1 x_1 + k_2 y_2$ より, $x_1 =$

$y_2 = 0$ はありえない. 従って, $k_1 x_1 = k_2 y_2$ はありえない.

$m_3 = 0$ 又は $m_4 = 0$ とおいて (N4) をみたす m_1, m_2, m_3, m_4 は (4)

2, 次の lemma が成り立つ.

Lemma 5.10 (i) $k_1 x_1 < k_2 y_2$ のとき, $m_2 = \frac{(k_2 y_2 - k_1 x_1)n}{k_1 k_2}$, $m_1 = n - m_2$, $m_3 = 0$, $m_4 = n$ とおく. (ii) $k_1 x_1 > k_2 y_2$ のとき, $m_1 = \frac{(k_1 x_1 - k_2 y_2)n}{k_1 k_2}$, $m_2 = n - m_1$, $m_3 = n$, $m_4 = 0$ とおく. このとき, m_1, m_2, m_3, m_4 は (N4) をみたす $0 < m_1, m_2 < n$ の整数である.

隣接行列 M_A, M_B の存在に関して, 一般に, 次の定理が成り立つ.

[1; Corollary 1.3]
定理 5.11 総和の等しい行和ベクトル $(r_1, r_2, \dots, r_m)$ と列和ベクトル $(\rho, \rho, \dots, \rho)$ をもつ $m \times m$ の 0-1 行列が存在するための必要十分条件は,

$$r_i \leq n$$

である.

今, $k_1 x_1, k_1 x_2, k_2 y_1, k_2 y_2 \leq n$ であるから, 定理 5.11 より, 隣接行列 M_A, M_B が存在する.

M_A が b_1 個の A -行列に, M_B が b_2 個の B -行列に分解され, $M_A + M_B = M_G$ が成り立つような M_A, M_B を作る.

$k_1 k_2 \times n$ より, (i) $k_1 | n, k_2 \times n$, (ii) $k_1 \times n, k_2 | n$, (iii) $k_1 \times n, k_2 \times n$ の 3通りが考えられる.

(II.1) $k_1 | n, k_2 \times n$ の場合 このとき, $0 < x_1 < k_2, x_2 = x_1 + k_2, y_1 = k_1, y_2 = 0, n = k_1 k_2 + k_1 x_1$ である. よって, $k_1 x_1 = n - k_1 k_2, k_1 x_2 = n, k_2 y_1 = k_1 k_2, k_2 y_2 = 0$ である. $k_1 x_1 > k_2 y_2$ であるから, Lemma 5.10

より, $m_1 = \frac{(k_1 x_1 - k_2 y_2)n}{k_1 k_2} = \frac{(n - k_1 k_2)n}{k_1 k_2}$, $m_2 = n - m_1$, $m_3 = n$, $m_4 = 0$ とおく.

$$\begin{array}{c} n \\ \boxed{\begin{array}{c} k_1 \\ \text{---} \\ k_2 \end{array}} M_G \\ \boxed{\begin{array}{c} k_1 \\ \text{---} \\ k_2 \end{array}} \end{array} = \begin{array}{c} n \\ \boxed{\begin{array}{c} k_1 \\ \text{---} \\ k_2 \end{array}} M_A \\ \boxed{1} \end{array} + \begin{array}{c} n \\ \boxed{\begin{array}{c} k_2 \\ \text{---} \\ k_1 \end{array}} M_B \\ \boxed{0} \end{array}$$

$\begin{array}{l} k_1 x_1 = n - k_1 k_2 \\ \vdots \\ k_1 x_{k_1} = n - k_1 k_2 \\ k_2 x_1 = n \\ \vdots \\ k_2 x_{k_2} = n \end{array} \quad \begin{array}{l} k_2 y_1 = k_1 k_2 \\ \vdots \\ k_2 y_{k_1} = k_1 k_2 \\ k_2 y_{k_1+1} = 0 \\ \vdots \\ k_2 y_{k_2} = 0 \end{array}$

$M_A + M_B = M_G$ が成り立つような隣接行列 M_A , M_B を作るアルゴリズムに関して, 次の定理が成り立つ.

定理 5.12 [1; Theorem 1.1] 総和の等しい行和ベクトル $(r_1, r_2, \dots, r_m)$ と列和ベクトル $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$ ($\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_n$) をもつ $m \times n$ の 0-1 行列が存在するための必要十分条件は, 行和ベクトル $(r_2, r_3, \dots, r_m)$ と列和ベクトル $(\rho_1 - 1, \rho_2 - 1, \dots, \rho_{k-1} - 1, \rho_{k+1}, \dots, \rho_n)$ をもつ $(m-1) \times n$ の 0-1 行列が存在することである.

M_A に関しては, まず, 1 行において, 1 列から右へ $k_1 x_1$ 列までの $k_1 x_1$ 個の要素を 1 とする. 次に, 2 行において, $(k_1 x_1 + 1)$ 列から右へ $k_1 x_1$ 個の要素をとる. $k_1 x_1$ 個の要素をとり終るまでに n 列にぶつか, た場合は, 残りの個数は, 1 列から右へととる. これを n 行までつづける (1 行から $(m+1)$ 行からは, 各行で $k_2 x_1$ 個とる). このアルゴリズムを, 右方向の糸巻きアルゴリズム とよぶ.

M_B に関しては, まず, 1 行において, n 列から左へ $(n - k_1 x_1 + 1)$ 列までの $k_1 y_1$ 個の要素をとる. 次に, 2 行において,

σ ($n-k_1$) 列から左へ k_1 個の要素をとる. k_1 個の要素をとり終るまでに σ 1 列にぶつかった場合は, 残りの個数は, σ n 列から左へとる. これを σ n 行までつづける (σ ($m+n$) 行からは, 各行で k_2 個とる). このアルゴリズムを, 左方向の系巻きアルゴリズム とよぶ.

定理 5.11 及び定理 5.12 より, 右方向の系巻きアルゴリズムによつて作られた隣接行列 M_A と, 左方向の系巻きアルゴリズムによつて作られた隣接行列 M_B に対して,

$$M_A + M_B = M_G$$

が成り立つ.

M_A が b_1 個の A -行列に, M_B が b_2 個の B -行列に分解されることを証明する.

M_A において, 値 1 をもつ $b_1 k_1$ 個の要素を, 右方向の系巻きアルゴリズムによつてとつた要素の順に, 一列に並べる.

これを 要素列 とよぶ. $g = (k_1 x_1, k_1 x_2)$, $k_1 x_1 = g a$, $k_1 x_2 = g b$, $(a, b) = 1$ とおけば, m_1 は b の倍数となる. $\ell = m_1 / b$ とおく. $g b = k_1 x_2 = \eta$ であるから, 要素列のはじめの η 個を σ 1 行に, 次の η 個を σ 2 行に, ... と配置する. $\ell a + m_2 = \ell a + \eta - m_1 = k_1 k_2$ より, $k_1 k_2$ 行の配置となる. これを 要素配列 とよぶ. この要素配列の各列の要素は, M_A の同じ列番号をもっている. この要素配列を, k_1 列ずつ, k_2 行ずつに分割すれば, n 個の小配列が得られる. こ

の小配列の各々に対して, A -行列が対応する.

M_0 において, 左方向の系巻きアルゴリズムによる要素列を考へる. この要素列を $k_1 m$ 個ずつに分割して, k_1 行の要素配列が得られる. この要素配列を, k_2 列ずつに分割すれば, m_1 個の小配列が得られる. この小配列の各々に対して, B -行列が対応する. 従って, M_A は $b_1 = n$ 個の A -行列に, M_B は $b_2 = m_1$ 個の B -行列に分解される.

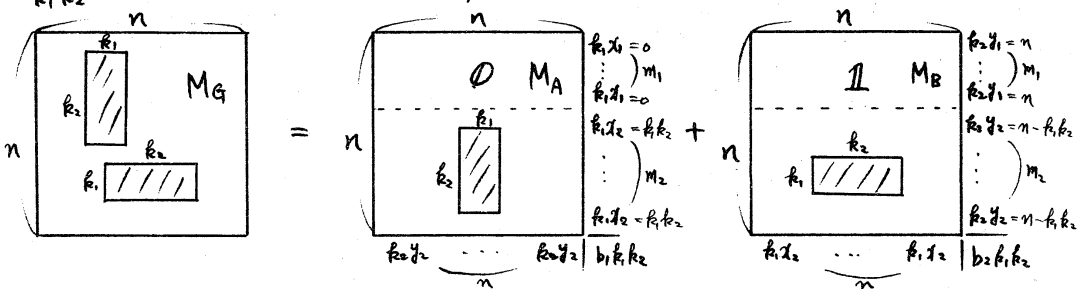
以上より, 次の定理が得られる.

定理 5.13 $1 \leq k_1 < k_2 < n$, $(k_1, k_2) = 1$, $k_1 | n$, $k_2 | n$, $k_1 k_2 | n^2$ の場合,

$$n = k_1 x + k_2 y \ (x, y \geq 0) \text{ を満たす } (x, y) \text{ が 2 個} \Rightarrow K_{n,n} \longrightarrow K_{k_1, k_2}.$$

(II.2) $k_1 | n$, $k_2 | n$ の場合. このとき, $x_1 = 0$, $x_2 = k_2$, $0 < y_2 < k_1$, $y_1 = y_2 + k_1$,

$n = k_1 k_2 + k_2 y_2$ である. よって, $k_1 x_1 = 0$, $k_1 x_2 = k_1 k_2$, $k_2 y_1 = n$, $k_2 y_2 = n - k_1 k_2$ である. $k_1 x_1 < k_2 y_2$ であるから, Lemma 5.10 より, $m_2 = \frac{(k_2 y_2 - k_1 x_1)n}{k_1 k_2}$
 $= \frac{(n - k_1 k_2)n}{k_1 k_2}$, $m_1 = n - m_2$, $m_3 = 0$, $m_4 = n$ とおく.



右方向の系巻きアルゴリズムによって, 行和ベクトル $(\overbrace{k_1 x_1}^{m_1}, \dots, k_1 x_1, k_1 x_2, \dots, \overbrace{k_1 x_2}^{m_2}, k_1 x_2)$ と列和ベクトル $(\overbrace{k_2 y_2}^n, \dots, k_2 y_2)$ をもつ隣接行列 M_A を作る. 左方向の系巻きアルゴリズムによって, 行和ベ

クトル $(k_2 y_1, \dots, k_2 y_1, k_2 y_2, \dots, k_2 y_2)$ と列和ベクトル $(k_2, \dots, k_2)$ をもつ隣接行列 M_B を作る. $M_A + M_B = M_G$ が成り立つ.

M_A において, 右方向の糸巻きアルゴリズムによる要素列を考える. $k_1 m_2 = y_2 n$ とおきから, この要素列を $k_1 m_2$ 個ずつに分割して, k_2 行の要素配列が得られる. これを k_1 列ずつに分割すれば, m_2 個の小配列が得られる. この小配列に A -行列が対応する.

M_B において, 左方向の糸巻きアルゴリズムによる要素列を考える. $g' = (k_2 y_1, k_2 y_2), k_2 y_1 = g' a', k_2 y_2 = g' b', (a', b') = 1$ とおけば, m_2 は a' の倍数とおく. $l' = m_2 / a'$ とおく. $g' a' = k_2 y_1 = n$ であるから, この要素列を n 個ずつに分割して, $m_1 + l' b' = n - m_2 + l' b' = k_1 k_2$ 行の要素配列が得られる. これを k_2 列ずつ, k_1 行ずつに分割すれば, n 個の小配列が得られる. この小配列に B -行列が対応する. 従って, M_A は $b_1 = m_2$ 個の A -行列に, M_B は $b_2 = n$ 個の B -行列に分解される.

以上より, 次の定理が得られる.

定理 5.14 $1 < k_1 < k_2 < n, (k_1, k_2) = 1, k_1 | n, k_2 | n, k_1 k_2 | n^2$ の場合,

$$n = k_1 x + k_2 y \ (x, y \geq 0) \text{ をみたす } (x, y) \text{ が 2 個} \implies K_{n,n} \longrightarrow K_{k_1, k_2}.$$

(II.3) $k_1 | n, k_2 | n$ の場合 このとき, $0 < x_1 < k_2, x_2 = x_1 + k_2, 0 < y_2 < k_1, y_1 = y_2 + k_1, n = k_1 k_2 + k_1 x_1 + k_2 y_2$ である. Lemma 5.10 より, (i) $k_1 x_1 < k_2 y_2$ のとき, $m_2 = \frac{(k_2 y_2 - k_1 x_1) n}{k_1 k_2}, m_1 = n - m_2, m_3 = 0, m_4 = n$ とおく. (ii) $k_1 x_1 > k_2 y_2$ の

とき, $m_1 = \frac{(k_1 x_1 - k_2 y_2)n}{k_1 k_2}$, $m_2 = n - m_1$, $m_3 = m_1$, $m_4 = 0$ とおく.

右方向の系巻きアルゴリズムによつて, 行和ベクトル $(k_1 x_1, \dots, k_1 x_1, k_1 x_2, \dots, k_1 x_2)$ と列和ベクトル $(k_2 y_2, \dots, k_2 y_2)$ (又は, $(k_2 y_1, \dots, k_2 y_1)$) をもつ隣接行列 M_A を作る. 左方向の系巻きアルゴリズムによつて, 行和ベクトル $(k_2 y_1, \dots, k_2 y_1, k_2 y_2, \dots, k_2 y_2)$ と列和ベクトル $(k_1 x_2, \dots, k_1 x_2)$ (又は, $(k_1 x_1, \dots, k_1 x_1)$) をもつ隣接行列 M_B を作る.

$M_A + M_B = M_G$ が成り立つ.

$k_1 x_1 m_1, k_1 x_2 m_2, k_2 y_1 m_1, k_2 y_2 m_2$ は n の倍数である. $g = (k_1 x_1, k_1 x_2)$, $k_1 x_1 = g a$, $k_1 x_2 = g b$, $(a, b) = 1$, $g' = (k_2 y_1, k_2 y_2)$, $k_2 y_1 = g' a'$, $k_2 y_2 = g' b'$, $(a', b') = 1$ とおく. さらに, $e = (g, g')$, $g = e f$, $g' = e f'$, $(f, f') = 1$ とおけば, n は e の倍数である. $l = n/e$ とおけば, m_1, m_2 は l の倍数となる. $l_1 = m_1/l$, $l_2 = m_2/l$ とおく.

M_A において, 右方向の系巻きアルゴリズムによる要素列を考へる. $g l = f n$ であるから, この要素列を $g l$ 個ずつに分割して, $l_1 a + l_2 b$ 行の要素配列が得られる. $g l$ は k_1 の倍数であり, $l_1 a + l_2 b$ は k_2 の倍数であるから, これを k_1 列ずつ, k_2 行ずつに分割すれば, $\frac{g l}{k_1} \times \frac{l_1 a + l_2 b}{k_2}$ 個の小配列が得られる. この小配列に

A-行列が対応する。

M_B において, 左方向の糸巻きアルゴリズムによる要素列を考へる. $gl = f'n$ であるから, この要素列を gl 個ずつに分割して, $la' + lb'$ 行の要素配列が得られる. gl は k_2 の倍数であり, $la' + lb'$ は k_1 の倍数であるから, これを k_2 列ずつ, k_1 行ずつに分割すれば, $\frac{gl}{k_2} \times \frac{la' + lb'}{k_1}$ 個の小配列が得られる. この小配列に B-行列が対応する. 従って, M_A は $b_1 = \frac{gl}{k_1} \times \frac{la + lb}{k_2}$ 個の A-行列に, M_B は $b_2 = \frac{gl}{k_2} \times \frac{la' + lb'}{k_1}$ 個の B-行列に分解された.

以上より, 次の定理が得られる.

定理 5.15 $1 < k_1 < k_2 < m$, $(k_1, k_2) = 1$, $k_1 | n$, $k_2 | n$, $k_1 k_2 | n^2$ の場合,

$$n = k_1 x + k_2 y \ (x, y \geq 0) \text{ をみたす } (x, y) \text{ が 2 個} \iff K_{n,n} \longrightarrow K_{k_1, k_2}$$

Lemma 5.3 — 定理 5.15 より, $1 < k_1 < k_2 < m$, $1 \leq d < k_1$ の場合, 次の定理が得られる.

定理 5.16 $1 < k_1 < k_2 < m$, $1 \leq d < k_1$ の場合,

$$K_{n,n} \longrightarrow K_{k_1, k_2} \iff \text{(i) } k_1 k_2 | n^2, \text{ (ii) } n = k_1 x + k_2 y \ (x, y \geq 0) \text{ をみたす } (x, y) \text{ が 2 個以上存在する.}$$

注意 $n = k_1 x + k_2 y \ (x, y \geq 0)$ をみたす (x, y) が 2 個以上存在するとは, 必要条件 (N4) は余分である.

§ 6. bipartite 分解 ($n_1 < n_2$, $1 < k_1 < k_2$ の場合)

(i) $n_1 \leq k_2$, (ii) $n_1 > k_2$ の 2 通りを考へる.

6.1 bipartite 分解 ($n_1 < n_2$, $1 < k_1 < k_2$, $n_1 \leq k_2$ の場合)

必要条件 (N1) より, k_1, k_2, n_1, n_2 の関係は, (i) $k_1 < k_2 = n_1 < n_2$,
 (ii) $k_1 < n_1 < k_2 < n_2$, (iii) $k_1 < n_1 < k_2 = n_2$, (iv) $k_1 = n_1 < k_2 \leq n_2$ の 4通り が考
 えらる.

(I) $k_1 < k_2 = n_1 < n_2$ の場合 $\Rightarrow$ 9 場合, 次の定理が成り立つ.

定理 6.1 $K_{n_1, n_2} \longrightarrow K_{k_1, k_2} \iff k_1 | n_2$

(II) $k_1 < n_1 < k_2 < n_2$ の場合 $\Rightarrow$ 9 場合, 次の定理が成り立つ.

定理 6.2 $K_{n_1, n_2} \longrightarrow K_{k_1, k_2} \iff k_1 | n_1, k_2 | n_2$

(III) $k_1 < n_1 < k_2 = n_2$ の場合 $\Rightarrow$ 9 場合, 次の定理が成り立つ.

定理 6.3 $K_{n_1, n_2} \longrightarrow K_{k_1, k_2} \iff k_1 | n_1$

(IV) $k_1 = n_1 < k_2 < n_2$ の場合 $\Rightarrow$ 9 場合, 次の定理が成り立つ.

定理 6.4 $K_{n_1, n_2} \longrightarrow K_{k_1, k_2} \iff k_2 | n_2$

6.2 bipartite 分解 ($1 < k_1 < k_2 < n_1 < n_2$ の場合)

$(k_1, k_2) = d$ とおく. (i) $d = k_1$, (ii) $1 \leq d < k_1$ の 2通り が考えら
 る.

6.2.1 bipartite 分解 ($1 < k_1 < k_2 < n_1 < n_2, d = k_1$ の場合)

$1 < k_1 < k_2 < n_1 < n_2, d = k_1$ の場合, 次の定理が成り立つ.

定理 6.5 $K_{n_1, n_2} \longrightarrow K_{k_1, k_2} \iff \begin{cases} \text{(i) } k_1, k_2 | n_1, n_2, \\ \text{(ii) } n_1 = k_1 x + k_2 y \ (x, y \geq 0), \\ \text{(iii) } n_2 = k_1 x' + k_2 y' \ (x', y' \geq 0) \end{cases}$

6.2.2 bipartite 分解 ($1 < k_1 < k_2 < n_1 < n_2, 1 \leq d < k_1$ の場合)

$k_1 = d k_1', k_2 = d k_2', (k_1', k_2') = 1$ とおく. 必要条件 (N3) より, $n_1 = k_1 x + k_2 y$
 $= d(k_1' x + k_2' y), n_2 = k_1 x' + k_2 y' = d(k_1' x' + k_2' y'). \therefore d | n_1, d | n_2. n_1 = d n_1', n_2 = d n_2'$

とおく. 必要条件 (N2) より $k_1 k_2 | n_1 n_2$. $\therefore k_1 k_2 | n_1' n_2'$. k_1', k_2', n_1', n_2' は必要条件 (N1) - (N4) をみたす. k_1', k_2', n_1', n_2' に関して, 次の lemma が成り立つ.

$$\text{Lemma 6.6} \quad K_{n_1', n_2'} \longrightarrow K_{k_1', k_2'} \iff K_{d n_1', d n_2'} \longrightarrow K_{d k_1', d k_2'}$$

Lemma 6.6 より, $(k_1, k_2) = 1$, $1 < k_1 < k_2 < n_1 < n_2$ をみたす k_1, k_2, n_1, n_2 を用いて, 必要条件 (N1) - (N4) の十分性を考えよう. k_1, k_2, n_1, n_2 に関して,

$$(i) k_1 k_2 | n_1, (ii) k_1 k_2 | n_2, (iii) k_1 k_2 \nmid n_1, k_1 k_2 \nmid n_2$$

の 3通りが考えられる.

(I) $k_1 k_2 | n_1$ の場合 $=$ 9 場合, 次の定理が成り立つ.

$$\text{定理 6.7} \quad K_{n_1, n_2} \longrightarrow K_{k_1, k_2} \iff n_2 = k_1 x' + k_2 y' \quad (x', y' \geq 0)$$

(II) $k_1 k_2 | n_2$ の場合 $=$ 9 場合, 次の定理が成り立つ.

$$\text{定理 6.8} \quad K_{n_1, n_2} \longrightarrow K_{k_1, k_2} \iff n_1 = k_1 x + k_2 y \quad (x, y \geq 0)$$

(III) $k_1 k_2 \nmid n_1, k_1 k_2 \nmid n_2$ の場合

必要条件 (N3) より, $n_1 = k_1 x + k_2 y$ ($x, y \geq 0$) をみたす (x, y) が α 個, $n_2 = k_1 x' + k_2 y'$ ($x', y' \geq 0$) をみたす (x', y') が α' 個とある. $n_1 = k_1 x_i + k_2 y_i$ ($i = 1, 2, \dots, \alpha$) ($x_1 < x_2 < \dots < x_\alpha$), $n_2 = k_1 x'_j + k_2 y'_j$ ($j = 1, 2, \dots, \alpha'$) ($x'_1 < x'_2 < \dots < x'_{\alpha'}$) とおく. $(k_1, k_2) = 1$ より, $x_i = x_1 + (i-1)k_2$, $y_i = y_\alpha + (\alpha-i)k_1$, $x'_j = x'_1 + (j-1)k_2$, $y'_j = y'_{\alpha'} + (\alpha'-j)k_1$, $n_1 = (\alpha-1)k_1 k_2 + k_1 x_1 + k_2 y_\alpha$, $n_2 = (\alpha'-1)k_1 k_2 + k_1 x'_1 + k_2 y'_{\alpha'}$ ($0 \leq x_1, x'_1 < k_2$, $0 \leq y_\alpha, y'_{\alpha'} < k_1$) である.

$k_1 k_2 \nmid n_1, (k_1, k_2) = 1$ より, k_1, k_2, n_1 に関して,

(i) $b_1 | n_1, b_2 \nmid n_1$, (ii) $b_1 \nmid n_1, b_2 | n_1$, (iii) $b_1 \nmid n_1, b_2 \nmid n_1$

の3通りが考えられる。

$b_1, b_2 \nmid n_2, (b_1, b_2) = 1$ より, b_1, b_2, n_2 に 1 2,

(i') $b_1 | n_2, b_2 \nmid n_2$, (ii') $b_1 \nmid n_2, b_2 | n_2$, (iii') $b_1 \nmid n_2, b_2 \nmid n_2$

の3通りが考えられる。

従って, b_1, b_2, n_1, n_2 に 1 2, (ii)-(ii'), (ii)-(iii'), (ii)-(iii'), (ii)-(iv'), (ii)-(v'), (iii)-(iii'), (iii)-(iv'), (iii)-(v'), (iii)-(vi') の9通りが考えられる。この9通りの場合の各々について, 必要条件 (N1)-(N4) の十分性を考えよう。

(III.1) (ii)-(iii'): $b_1 | n_1, b_2 \nmid n_1, b_1 \nmid n_2, b_2 | n_2$ の場合 一般に, $b_1 | n_1, b_2 | n_2$

の場合に, 次の定理が成り立つ。

定理 6.9 $b_1 | n_1, b_2 | n_2 \Rightarrow K_{n_1, n_2} \longrightarrow K_{b_1, b_2}$

(III.2) (ii)-(iv'): $b_1 \nmid n_1, b_2 | n_1, b_1 | n_2, b_2 \nmid n_2$ の場合 一般に, $b_2 | n_1, b_1 | n_2$

の場合に, 次の定理が成り立つ。

定理 6.10 $b_2 | n_1, b_1 | n_2 \Rightarrow K_{n_1, n_2} \longrightarrow K_{b_1, b_2}$

(III.3) (ii)-(v'): $b_1 | n_1, b_2 \nmid n_1, b_1 | n_2, b_2 \nmid n_2$ の場合

$n_1 = b_1 x + b_2 y$ ($x, y \geq 0$) を満たす (x, y) が α 個, $n_2 = b_1 x' + b_2 y'$ ($x', y' \geq 0$) を満たす (x', y') が α' 個とす。 $n_1 < n_2$ より, $\alpha \leq \alpha'$ である。次の定理が成り立つ。

定理 6.11 $\alpha = 1, \alpha' \geq 1 \Rightarrow K_{n_1, n_2} \dashrightarrow K_{b_1, b_2}$

定理 6.12 $\alpha = \alpha' = 2 \Rightarrow K_{n_1, n_2} \longrightarrow K_{b_1, b_2}$

定理 6.13 $2 \leq \alpha \leq \alpha' \Rightarrow K_{n_1, n_2} \longrightarrow K_{k_1, k_2}$

以上より, 次の定理が得られる.

定理 6.14 $1 < k_1 < k_2 < n_1 < n_2, (k_1, k_2) = 1, k_1 | n_1, k_2 | n_1, k_1 | n_2, k_2 | n_2$ のとき,

$$K_{n_1, n_2} \longrightarrow K_{k_1, k_2} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i) } k_1 k_2 | n_1 n_2 & \text{(ii) } \eta_1 = k_1 x + k_2 y (x, y \geq 0) \text{ が } \alpha \text{ 個以上} \\ \text{(iii) } \eta_2 = k_1 x' + k_2 y' (x', y' \geq 0) \text{ が } \alpha' \text{ 個以上} \end{cases}$$

注意 $2 \leq \alpha \leq \alpha'$ のとき, 必要条件 (N4) は余分である.

(III.4) (ii)-(iii)': $k_1 | n_1, k_2 | n_1, k_1 | n_2, k_2 | n_2$ の場合

$\eta_1 = k_1 x + k_2 y (x, y \geq 0)$ が α 個, $\eta_2 = k_1 x' + k_2 y' (x', y' \geq 0)$ が α' 個とす. $n_1 < n_2$ より, $\alpha \leq \alpha'$ である. 次の定理が成り立つ.

定理 6.15 $\alpha = 1, \alpha' \geq 1 \Rightarrow K_{n_1, n_2} \dashrightarrow K_{k_1, k_2}$

定理 6.16 $\alpha = \alpha' = 2 \Rightarrow K_{n_1, n_2} \longrightarrow K_{k_1, k_2}$

定理 6.17 $2 \leq \alpha \leq \alpha' \Rightarrow K_{n_1, n_2} \longrightarrow K_{k_1, k_2}$

以上より, 次の定理が得られる.

定理 6.18 $1 < k_1 < k_2 < n_1 < n_2, (k_1, k_2) = 1, k_1 | n_1, k_2 | n_1, k_1 | n_2, k_2 | n_2$ のとき,

$$K_{n_1, n_2} \longrightarrow K_{k_1, k_2} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i) } k_1 k_2 | n_1 n_2, & \text{(ii) } \eta_1 = k_1 x + k_2 y (x, y \geq 0) \text{ が } \alpha \text{ 個以上} \\ \text{(iii) } \eta_2 = k_1 x' + k_2 y' (x', y' \geq 0) \text{ が } \alpha' \text{ 個以上} \end{cases}$$

注意 $2 \leq \alpha \leq \alpha'$ のとき, 必要条件 (N4) は余分である.

(III.5) (ii)-(iii)': $k_1 | n_1, k_2 | n_1, k_1 | n_2, k_2 | n_2$ の場合

$\eta_1 = k_1x + k_2y$ ($x, y \geq 0$) を満たす (x, y) が α 個, $\eta_2 = k_1x' + k_2y'$ ($x', y' \geq 0$) を満たす (x', y') が α' 個とす。 $\eta_1 < \eta_2$ より, $\alpha \leq \alpha' + 1$ である。次の定理が成り立つ。

定理 6.19 $\alpha = 1, \alpha' \geq 1 \Rightarrow K_{\eta_1, \eta_2} \dashrightarrow K_{k_1, k_2}$

定理 6.20 $\alpha = 2, \alpha' = 1 \Rightarrow K_{\eta_1, \eta_2} \longrightarrow K_{k_1, k_2}$

定理 6.21 $\alpha \leq \alpha' + 1$ ($\alpha \geq 2, \alpha' \geq 2$) $\Rightarrow K_{\eta_1, \eta_2} \longrightarrow K_{k_1, k_2}$

以上より, 次の定理が得られる。

定理 6.22 $1 < k_1 < k_2 < \eta_1 < \eta_2, (k_1, k_2) = 1, k_1 | \eta_1, k_2 | \eta_1, k_1 | \eta_2, k_2 | \eta_2$ のとき,

$$K_{\eta_1, \eta_2} \longrightarrow K_{k_1, k_2} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i) } k_1 k_2 | \eta_1 \eta_2, \text{ (ii) } \eta_1 = k_1 x + k_2 y \text{ } (x, y \geq 0) \text{ を満たす } (x, y) \\ \text{が 2 個以上, (iii) } \eta_2 = k_1 x' + k_2 y' \text{ } (x', y' \geq 0) \text{ を満たす } (x', y') \\ \text{が 1 個以上} \end{cases}$$

注意 $\alpha \leq \alpha' + 1$ ($\alpha \geq 2, \alpha' \geq 1$) のとき, 必要条件 (N4) は余分である。

(Ⅲ.6) (ii)-(iii)': $k_1 | \eta_1, k_2 | \eta_1, k_1 | \eta_2, k_2 | \eta_2$ の場合

$\eta_1 = k_1x + k_2y$ ($x, y \geq 0$) を満たす (x, y) が α 個, $\eta_2 = k_1x' + k_2y'$ ($x', y' \geq 0$) を満たす (x', y') が α' 個とす。 $\eta_1 < \eta_2$ より, $\alpha \leq \alpha' + 1$ である。次の定理が成り立つ。

定理 6.23 $\alpha = 1, \alpha' \geq 1 \Rightarrow K_{\eta_1, \eta_2} \dashrightarrow K_{k_1, k_2}$

定理 6.24 $\alpha = 2, \alpha' = 1 \Rightarrow K_{\eta_1, \eta_2} \longrightarrow K_{k_1, k_2}$

定理 6.25 $\alpha \leq \alpha' + 1$ ($\alpha \geq 2, \alpha' \geq 2$) $\Rightarrow K_{\eta_1, \eta_2} \longrightarrow K_{k_1, k_2}$

以上より, 次の定理が得られる。

定理 6.26 $1 < k_1 < k_2 < \eta_1 < \eta_2, (k_1, k_2) = 1, k_1 | \eta_1, k_2 | \eta_1, k_1 | \eta_2, k_2 | \eta_2$ のとき,

$$K_{n_1, n_2} \longrightarrow K_{k_1, k_2} \iff \begin{cases} \text{(i) } k_1, k_2 \mid n_1, n_2, \text{ (ii) } \eta_1 = k_1 x + k_2 y \ (x, y \geq 0) \text{ を満たす } (x, y) \\ \text{が } 2 \text{ 個以上, (iii) } \eta_2 = k_1 x' + k_2 y' \ (x', y' \geq 0) \text{ を満たす } (x', y') \\ \text{が } 1 \text{ 個以上.} \end{cases}$$

注意 $\alpha \leq \alpha' + 1$ ($\alpha \geq 2, \alpha' \geq 1$) のとき, 必要条件 (N4) は余分である.

(III.7) (iii)-(ii)': $k_1 \nmid n_1, k_2 \nmid n_1, k_1 \mid n_2, k_2 \nmid n_2$ の場合

$\eta_1 = k_1 x + k_2 y \ (x, y \geq 0)$ を満たす (x, y) が α 個, $\eta_2 = k_1 x' + k_2 y' \ (x', y' \geq 0)$ を満たす (x', y') が α' 個とす. $n_1 < n_2$ より, $\alpha \leq \alpha' + 1$ である. 次の定理が成り立つ.

定理 6.27 $\alpha = \alpha' = 1 \Rightarrow K_{n_1, n_2} \nrightarrow K_{k_1, k_2}$

定理 6.28 $2 \leq \alpha \leq \alpha' \Rightarrow K_{n_1, n_2} \longrightarrow K_{k_1, k_2}$

(III.8) (iii)-(ii)': $k_1 \nmid n_1, k_2 \nmid n_1, k_1 \nmid n_2, k_2 \mid n_2$ の場合

$\eta_1 = k_1 x + k_2 y \ (x, y \geq 0)$ を満たす (x, y) が α 個, $\eta_2 = k_1 x' + k_2 y' \ (x', y' \geq 0)$ を満たす (x', y') が α' 個とす. $n_1 < n_2$ より, $\alpha \leq \alpha' + 1$ である. 次の定理が成り立つ.

定理 6.29 $\alpha = \alpha' = 1 \Rightarrow K_{n_1, n_2} \nrightarrow K_{k_1, k_2}$

定理 6.30 $2 \leq \alpha \leq \alpha' \Rightarrow K_{n_1, n_2} \longrightarrow K_{k_1, k_2}$

(III.9) (iii)-(iii)': $k_1 \nmid n_1, k_2 \nmid n_1, k_1 \nmid n_2, k_2 \nmid n_2$ の場合

$\eta_1 = k_1 x + k_2 y \ (x, y \geq 0)$ を満たす (x, y) が α 個, $\eta_2 = k_1 x' + k_2 y' \ (x', y' \geq 0)$ を満たす (x', y') が α' 個とす. $n_1 < n_2$ より, $\alpha \leq \alpha' + 1$ である. 次の定理が成り立つ.

定理 6.31 $\alpha = \alpha' = 1 \Rightarrow K_{n_1, n_2} \nrightarrow K_{k_1, k_2}$

定理 6.32 $d=3, d'=2 \Rightarrow K_{n_1, n_2} \longrightarrow K_{k_1, k_2}$

定理 6.33 $d \leq d'+1 (d \geq 2, d' \geq 3) \Rightarrow K_{n_1, n_2} \longrightarrow K_{k_1, k_2}$

§ 7. おわりに

§ 6 において, (Ⅲ.7) $d=1, d' \geq 2$, (Ⅲ.8) $d=1, d' \geq 2$, (Ⅲ.9) $d=1, d' \geq 2$ および $d=2, d'=1, 2$ の場合の十分性に関する証明が残されている。これらの場合を除けば, 必要条件 (N1) - (N4) はまた, 十分条件でもある。

参考文献

- [1] S. Yamamoto, H. Ikeda, S. Shige-eda, K. Ushio and N. Hamada,
On claw-decomposition of complete graphs and complete
bigraphs, Hiroshima Math. J. 5 (1975), 33-42.
- [2] 潮 和彦, Bipartite decomposition of complete bipartite
graphs, 日本数学会・昭和 55 年度年会・応用数学分科会講演予
稿集 (1980), 44-50.