

モデルの合併について

筑波大数学研究科 若井 健太郎 (Kentaro Wakai)

濃度の等しい L_1 -構造 M_1 と L_2 -構造 M_2 があったとき, これらの構造を重ね合わせたもの (合併) として $L_1 \cup L_2$ -構造を考えることができる. M_1, M_2 が共に $\aleph_0$ -categorical という性質を持つとき, $\aleph_0$ -categorical な合併が存在するかを考える. この問題については, [Sc] で $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ の場合が, [PT] で M_1, M_2 が可算の場合が証明されている. 本文では [PT] と同様の方法を用いて, M_1, M_2 が非可算, saturated の場合の証明を示す.

Definition 1 M_1 は L_1 -構造, M_2 は L_2 -構造とする. $L_1 \cup L_2$ -構造 M は, 次の条件を満たすとき, M_1 と M_2 との合併である, という:

$$M|L_1 \simeq M_1, M|L_2 \simeq M_2.$$

$L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ のとき, 合併が存在するためには次の条件が必要である:

$$M_1|L_0 \simeq M_2|L_0 (L_0 = L_1 \cap L_2).$$

以後 $M_1|L_0$ と $M_2|L_0$ を同一視して M_0 と書く.

Definition 2 同じ理論を持つ可算構造が同型を除いて 1 つしかないとき, 構造 M は $\aleph_0$ -categorical であるという.

Example 3 $L_1 = \{E_1\}, L_2 = \{E_2\}$ とする. L_1 -構造 M_1 と L_2 -構造 M_2 において, E_1, E_2 はそれぞれ無限個の同値類を持つ同値関係で, E_1 の各同値類の濃度は 2, E_2 の同値類の濃度は 1 つだけ 1 で他は 2 とする. このとき M_1, M_2 は共に $\aleph_0$ -categorical であるが, $\aleph_0$ -categorical であるような合併はない.

Definition 4 構造 M は次の条件を満たすとき弱い仮想元消去ができるという:

任意の $a \in M^{eq}$ に対してある有限集合 $B \subset M$ が存在して, $a \in dcl(B)$ かつ $B \subset acl(a)$.

Fact 5 L -構造 M で弱い仮想元消去ができるとき, algebraic closed set $A \subset M$ 上の完全なタイプはすべて stationary である.

Theorem 6 $\aleph_0$ -categorical な構造 M_1, M_2 は, 次の条件 (1)-(3) を満たすとき, $\aleph_0$ -categorical な合併を持つ:

(1) M_1, M_2 は *saturated*,

(2) M_0 は *stable* で弱い仮想元消去ができる,

(3) 任意の $A \subset M_1$ に対して $\text{acl}_{L_1}(A) = \text{acl}_{L_0}(A)$ ただし acl_{L_i} は L_i での algebraic closure.

Proof. M_1 と M_2 との合併 M を作るには, M_1 と M_2 の間の L_0 -同型写像を作り, これによって M_1 の元と M_2 の元とを同一視すればよい.

$\kappa = |M_0|$, $M_1 = \{a_i : i < \kappa\}$, $M_2 = \{b_i : i < \kappa\}$ とする. M_1, M_2 の algebraic closed な有限部分集合上のタイプの組が κ 回ずつ現われるように並べたものを $\{(p_i, q_i) : i < \kappa\}$ とする. つまり p_i は L_1 -タイプ, q_i は L_2 -タイプである. 次の条件を満たすように L_0 -部分同型写像 $f_i : M_1 \rightarrow M_2 (i < \kappa)$ を作る:

(i) $i < j$ ならば $f_i \subset f_j$

(ii) $|\text{Dom}(f_i)|, |\text{Ran}(f_i)| < \kappa$,

(iii) $a_i \in \text{Dom}(f_{i+1}), b_i \in \text{Ran}(f_{i+1})$,

(iv) $\text{Dom}(p_i) \subset \text{Dom}(f_i)$, $\text{Dom}(q_i) \subset \text{Ran}(f_i)$, $f_i(p_i|_{L_0}) = q_i|_{L_0}$ ならば, p_i の解 $a \in \text{Dom}(f_{i+1})$ と q_i の解 $b \in \text{Ran}(f_{i+1})$ で, $f_{i+1}(a) = b$ となるものがある.

$f_0 = \emptyset$, δ : limit のときは $f_\delta = \bigcup_{i < \delta} f_i$ とする. f_i までできていて, p_i と q_i

が (iv) の前提条件を満たしているとする. M_0 が stable であることより, p_i と q_i の non-forking extension $p' \in S_{L_0}(\text{Dom}(f_i))$ と $q' \in S_{L_0}(\text{Ran}(f_i))$ がとれる. M_0 で弱い仮想元消去ができることより, $p_i|L_0$ と $q_i|L_0$ が stationary になるので $f_i(p') = q'$ である. M_1 と M_2 が saturated であることより, $p_i \cup p'$ の解 $a \in M_1$ と $q_i \cup q'$ の解 $b \in M_2$ がとれる. $\text{Dom}(f_i) \cup a \cup a_i \subset \text{Dom}(f_{i+1})$, $\text{Ran}(f_i) \cup b \cup b_i \subset \text{Ran}(f_{i+1})$, $f_{i+1}(a) = b$ となるように f_{i+1} をとる. (iv) の前提条件を満たさないときは, $\text{Dom}(f_i) \cup a_i \subset \text{Dom}(f_{i+1})$, $\text{Ran}(f_i) \cup b_i \subset \text{Ran}(f_{i+1})$ となるように f_{i+1} をとる.

$f = \cup_{i < \kappa} f_i$ とし, この L_0 -同型写像で M_1 と M_2 を同一視した合併を M とすると, M は次の性質を持つ:

(*) A は M の有限部分集合で algebraic closed, $p \in S_{L_1}(A)$, $q \in S_{L_2}(A)$, $p|L_0 = q|L_0$ ならば, p と q は共通解を M に持つ.

この性質を用いて M が $\aleph_0$ -categorical であることを示す. N_1, N_2 は M と同じ理論を持つ可算構造とする. (*) は一階述語で書けるので, N_1 と N_2 も性質 (*) を持つ. $N_1 = \{c_i : i < \omega\}$, $N_2 = \{d_i : i < \omega\}$ とし, 次の条件 (a), (b) を満たすように $L_1 \cup L_2$ -部分同型写像 $g_i : N_1 \rightarrow N_2 (i < \omega)$ を作る:

(a) $\text{Dom}(g_i), \text{Ran}(g_i)$ は algebraic closed,

(b) $c_i \in \text{Dom}(g_{i+1}), d_i \in \text{Ran}(g_{i+1})$.

g_i までできたとする. $A = \text{Dom}(g_i)$, $B = \text{Ran}(g_i)$ とする. (*) より

$g_i(tp_{L_1}(c_i/A))$ と $g_i(tp_{L_2}(c_i/A))$ は共通解 $d \in N_2$ を持つ. $B \cup d \cup d_i \subset D$ となるように L_2 で algebraic closed な $D \subset N_2$ をとると, (3) より D は L_1 でも algebraic closed である. (*) より $g_i^{-1}(tp_{L_1}(D/B))$ と $g_i^{-1}(tp_{L_2}(D/B))$ は共通解 $D \subset N_1$ を持つ. $g_{i+1}(C) = D$ となるように $g_{i+1} : C \rightarrow D$ をとればよい. $g = \cup_{i < \omega} g_i$ は N_1 と N_2 の間の $L_1 \cup L_2$ -同型写像になる. よって M は $\aleph_0$ -categorical であることが示せた. $\square$

Question 7 M_1, M_2 が *saturated* でない場合にも合併は作れるか?

$acl_{L_1}(A) = acl_{L_2}(A)$ という条件をもっと弱くできないか?

References

- [PT] A. Pillay and A. Tsuboi, Amalgamations preserving $\aleph_0$ -category, preprint.
- [Sc] J. H. Schmerl, Decidability and $\aleph_0$ -categoricity of theories of partially ordered sets, The Journal of Symbolic Logic, 45 (1980), 585–611.
- [Sh] S. Shelah, Classification Theory, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1990.
- [Ts] 坪井 明人, モデル論概説, 1995.