

動的臨界現象と連分数展開

森 肇 (九大理)

動的臨界現象においても, ①長波長の臨界揺動が most dominant part として critical behavior をきめるか, ②その most dominant part の漸近的性質, ③その漸近的性質が実際に有効な領域, を明らかにすることが問題である。①の問題のポイントを端的にみるには磁性体における NMR の線巾の異常増大の機構を思い出せばよい。NMR の線巾は 1 個の電子スピン $\delta S_i \equiv S_i - \langle S_i \rangle$ の自己相関関数の時間積分に比例する;

$$\Delta\omega \sim \int_0^\infty \langle \delta S_i(t) \delta S_i^0 \rangle dt \sim \sum_q \frac{\langle S_q^0 S_q^0 \rangle}{r_q^0}, \quad (1)$$

ここに S_q^0 は波動ベクトル q のフーリエ成分であり, superscript 0 は Z 成分を表わす。 r_q^0 はその減衰常数である。臨界点の近傍ではスピンの対相関関数は波数 q の小さい所で異常に大きくなり

$$\langle S_q^0 S_q^0 \rangle \sim \kappa^{-2+\eta} Q(q/\kappa) \quad (2)$$

とおける。減衰常数 r_q^0 は q が小さいとき

$$r_q^0 \sim \kappa^\theta g(q/\kappa) \quad (3)$$

に従って critical slowing-down をおこす。従って(1)の q 和は波数の小さな項だけで近似でき,

$$\Delta\omega \sim \kappa^{-(\theta-1+\eta)} \quad (4)$$

がえられる。(1)の q 和において時間因子 $1/r_q^0$ かなければこの和は $\kappa \rightarrow 0$ においても発散しない。 $1/r_q^0$ が q の小さい所で異常に大きくなるために, この和は発散するのである。つまり, 波数が小さいときにおこる critical & kinematical slowing-down のために, (1)の和は波数の小さな項—臨界揺動—によってきまることになる。

このように, critical & kinematical slowing-down という時間放果のために, 長波長の臨界揺動が most dominant part として critical

behaviorをきめるということは動的臨界現象のかなり一般的な性質である。このような放果を的確に表現するものとして一般化された連分数展開を採用し、ハイゼンブルグ模型における order parameter のダイナックスおよび緩和・輸送現象の異常を論じた。

磁性体における線型レスポンスは、スピン演算子の緩和関数

$$\Xi_k^\alpha(t) = (S_k^\alpha(t), S_k^{\alpha*}) / (S_k^\alpha, S_k^{\alpha*}) \quad (5)$$

によって表現できる。ここに $\alpha = 0, \pm$ である。このラプラス変換は

$$\Xi_k^\alpha(Z) = \frac{1}{Z - i\omega_k + \varphi_k(Z)} \quad (6)$$

$$= \frac{1}{Z - i\omega_k^{(0)} + \sum_{q,q'} \frac{M^{(1)}(q, q'; k)}{Z - i\omega_{q,q'}^{(1)k} + \sum_{r,r'} \frac{M^{(2)}(r, r'; q, q'; k)}{Z - i\omega_{r,r'}^{(2)kq,q'} + \dots}} \quad (7)$$

と一般化された連分数の型にかける。係数 ω および M はすべてスピンの静的相関関数によってきまる。この連分数の各和において most dominant part は k, κ および $|Z|$ が非常に小さいとき、小さな波数の項によってきまるとか示せる。従って、(7)の各和の計算において、含まれている波数はすべて小さいとしてよい。かくて係数 ω および M に含まれているスピンの静的相関関数に対して static scaling law を使って、振動数 ω はすべて

$$\omega(\eta) = \kappa^\lambda g(\eta) (q\eta/\eta, \dots, q_1'/\kappa, k/\kappa), \quad (8)$$

$$\lambda \equiv (d+2-\eta)/2, \quad (9)$$

の形をもち、分子 M はすべて

$$M(\eta) = (N\kappa^d)^{-2} \kappa^{2\theta} \{f_1' + \delta_{q\eta, q'\eta} (N\kappa^d) f_2'\}, \quad (10)$$

$$\theta \equiv (d+2-\eta)/2 \quad (11)$$

の形をもつことか示せる。ここに d は次元数であり、 N はスピンの総数である。

臨界点 T_c の上では磁場がないとき振動数 ω はすべて 0 となり、連分数展開(7)は

$$\Xi_k^\alpha(Z) = \frac{1}{Z + \kappa^2 \theta \iint m^{(1)}(\tilde{q}, \tilde{q}'; k/\kappa) d\tilde{q} d\tilde{q}'} \quad (12)$$

$$\frac{Z + \kappa^2 \theta \iint m^{(2)}(\tilde{r}, \tilde{r}'; \tilde{q}, \tilde{q}'; k/\kappa) d\tilde{r} d\tilde{r}'}{Z +}$$

$$= \frac{1}{\kappa^\theta} F(Z/\kappa^\theta, k/\kappa) \quad (13)$$

とかける。ここに $F(X, Y)$ は k, κ, Z を含まないある関数である。ラプラス逆変換を行えば

$$\Xi_k^\alpha(t) = G(t\kappa^\theta, k/\kappa) \quad (14)$$

がえられる。スピンの集団運動は $\Xi_k^\alpha(Z)$ の極できるか、その複素振動数は

$$Z_k = \kappa^\theta g(k/\kappa) \quad (15)$$

を形をもたねばならないことがわかる。(3)は(15)の特別な場合に当る。(14)および(15)は dynamic scaling laws が成立つことを示している。

転移点の下でも、 $\eta = 0$ のときには $\lambda = \theta$ となり(14)および(15)が成立つことがわかる。しかし、 $\eta \neq 0$ のときには、このような scaling laws は成立しない。 $k \ll \kappa$ では、縦成分の減衰常数は

$$\gamma_k^0 \sim k^{2\eta} (1+\kappa)/2 \quad (16)$$

となり、構成成分では振動数

$$\omega_k \sim k^{2\kappa} (1-\eta)/2 \quad (17)$$

をもった鋭いスピン波が存在することとなる。

E S R を論ずるときにはスピンを保存しない相互作用が存在する。一軸性異方性を考え、その常数を D とすれば、それが小さいときには、(14)を拡張し

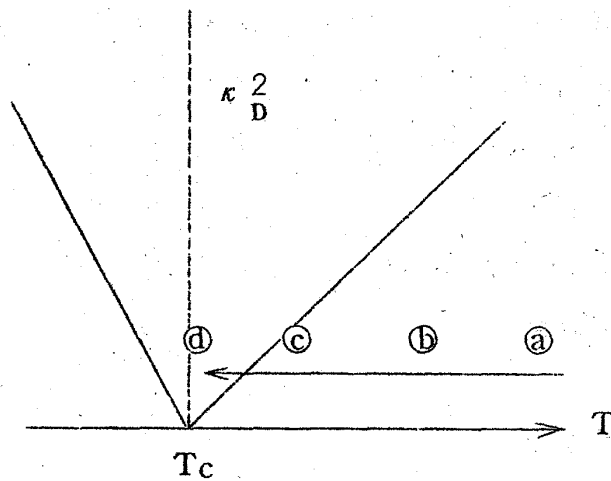
た形

$$\Xi_k^\alpha(t) = G(t\kappa^\theta, k/\kappa, \kappa_D/\kappa) \quad (18)$$

が成立つ。ここに κ_D は $\sqrt{D}$ に比例した波数の次元をもつ常数であり、また磁場を無視した。波数 κ が0のときには

$$\Xi^+(t) = G(t\kappa^\theta, \kappa_D/\kappa) \quad (19)$$

となり、これに基づいてESRの中の温度変化を論ずることかできる。いま下図のように高温側から T_c に近づくときを考える。④は十分高温でトルク



の運動は短波長の熱運動できまり、exchange narrowing のために巾は小さく $\Delta\omega \sim D^2 J$ の程度である。 T_c に近づくとき、強磁性体の場合、critical slowing-down のため巾はますます狭くなり、その温度変化はまず $\Delta\omega \sim \kappa^2$ でふえられる。さらに近づいて、トルクの運動

も臨界揺動できまるとき、図の⑥では、

$$\Delta\omega \sim \kappa_D^2 \kappa^{1/2} \quad (\text{weak narrowing}) \quad (20)$$

となる。ただしこのときline shapeはLorentzianでなくなり、多分gaussianとなる。③のところでは、このnarrowingは完全にとまり

$$\Delta\omega \sim \kappa_D^4 \kappa^{-3/2} \quad (21)$$

に従って巾は大きくなる傾向をもつ。しかし T_c の直上、⑥では、このbroadeningもとまり

$$\Xi^+(t) = G(t\kappa_D^\theta) \quad (22)$$

となる。この関数 G は未だ求まっていないが、岡本さんの所で論議されるように、line shapeが構造をもつようになると考えられる。

反強磁性体の場合にはcritical narrowingはおこらない。それは一様な磁化が臨界変数でないことによる。トルクのcritical slowing-downのためにexckange narrowingがきかなくなり、巾は広かる一方でcritical regime④に到達する。④のところでは $\Delta\omega \sim \kappa^{-2}$ に従って、⑥のところ

では $\Delta\omega \sim \kappa_D \kappa^{-q/2}$ に従って巾は広がり、㊟および㊤では (22) のようになる。

磁性体の場合には dynamic scaling laws の意味と有効性の限界がはっきりしたといってよい。従って、緩和・輸送現象の異常性を具体的に議論できる段階に達した。上記では ESR について定性的な話をしたわけであるが、定量的な話もある程度できる筈である。

臨界気体、臨界溶液、液体ヘリウムについての理論的研究が必要である。上述のように order parameter のダイナミクスおよび異常輸送現象を論ずるとき、臨界揺動による most dominant part を正しくとり出すことが最も重要であるか、モーメント法では critical & Kinematical slowing-down のような時間効果を正しくとり入れることができないので、ここでは一般化された連分数展開法を提案したわけである。われわれのグループはこの方法による組織的な研究を計画している。