

S^1 作用の固定点集合の有理 ホモトピー

岡山大 理 吉田朋好

X を S^1 作用をもつ単連結有限 CW 複体とし、 F を固定点集合の一つの連結成分とする。 F も単連結有限 CW 複体であると仮定する。 $x_0 \in F$ とし、 X と F の有理ホモトピー $\pi_*(X, x_0) \otimes \mathbb{Q}$ と $\pi_*(F, x_0) \otimes \mathbb{Q}$ の次元の関係を調べるのが本稿の目的である。以下、 X は有理ホモトピー型有限 ($\sum_{k=1}^{\infty} \pi_k(X) \otimes \mathbb{Q}$ が有限次元 ($\mathbb{Q}$ 上)) と仮定する。このような空間は、球面、Lie 群の商空間等、通例、変換群のよく考えられる空間を大体含む。G. E. Bredon は [2] において、上のような条件のもとに、 $\pi_*(F) \otimes \mathbb{Q}$ の次元と $\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}$ の次元との関係及び、Whitehead 積の関係等を調べている。Bredon の議論は $\pi_*(F) \otimes \mathbb{Q}$ の元から幾何学的に $\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}$ の元を構成することにより、両者の比較をするもので、かなり巧妙なテクニックを用いる。一方 Allday は [1] に

おいて Sullivan の有理ホモトピー理論を用いて, Bredon と同様の結果を導いている。また, Allday の方法は、代数的に大変複雑な構成を行っているわけには、結果は Bredon の結果からあまり進んでいないと思われる。ここでは、 ΩX と ΩF のコホモロジーを局所化定理により比較することによって幾分見通しよく Bredon の結果の改良を行うことが出来ることを報告する。

ΩX と ΩF を $x_0(\in F)$ に基底をもつ X, F のループ空間とする。 ΩX は自然に S' 作用をもち、その固定点集合は ΩF となる。一般に S' -空間 Y に対し、 $Y_{S'} = ES' \times_{S'} Y$ 、 $H_q^*(Y) = H^*(ES' \times_{S'} Y)$ とおく (ES' は自由 S' -作用をもつ contractible space)。

BS' を S' の分類空間 $t \in H^2(BS', \mathbb{Q})$ を生成元とする。 $H^*(BS', \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[t]$ (多項式環) であり、 $H_q^*(Y) \otimes \mathbb{Q}$ は $H^*(BS', \mathbb{Q})$ -加群である。次の局所化定理が成り立つ。

定理 1. 包含写像により誘導される準同型写像

$$H_q^*(\Omega X, \mathbb{Q})[t^{-1}] \xrightarrow{\sim} H_q^*(\Omega F, \mathbb{Q})[t]$$

は同型写像である。

一般に ΩX は無限に多くの次元において、自明でない $\mathbb{Z}$ -モジュールをもつので、上の局所化定理は通常の局所化定理から直ちに得られない。この局所化定理により $\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}$ と $\pi_*(F) \otimes \mathbb{Q}$ の次元の比較ができて、次の結果を得る。

定理 2. X, F を上のような空間とする。このとき $j = 0, 1, 2, \dots$ に対し、

$$\sum_{k \geq 0} \dim_{\mathbb{Q}} \pi_{j+2k}(F) \otimes \mathbb{Q} \leq \sum_{k \geq 0} \dim_{\mathbb{Q}} \pi_{j+2k}(X) \otimes \mathbb{Q}$$

が成り立つ。

Bredon [2] では上の不等式の左辺から $\sum_{k \geq 1}$ を除いた形の不等式、Allday [1] では、上の不等式の $j = 0, 1$ の場合が証明されている。

定理 1 の証明。

PX を $x_0 \in F$ に基点をもつ X の path space とする。 PX は自然に S' -空間となり、 $\Omega X \rightarrow PX \rightarrow X$ は S' -equivariant な fibration となる。次の図式を考える。

$$(A) \quad \begin{array}{ccc} EG \times_G (\Omega X) & \longrightarrow & EG \times_G (PX) \\ \downarrow & & \downarrow \\ BS' = BG & \longrightarrow & EG \times_G X \end{array}$$

ここで $BG = EG \times_G \{x_0\}$ とみなす。この図式に Eilenberg-Moore の Spectral seq. を適用する。

$$\text{Tor}_{H_G^*(X)}(H^*(BG), H^*(BG)) \Rightarrow H_G^*(\Omega X)$$

(PX は equivariant に可縮だから $H_G^*(PX) = H^*(BG)$)。

同様に次の fibre square を考える。

$$(B) \quad \begin{array}{ccc} EG \times_G (\Omega F) & \longrightarrow & EG \times_G (PF) \\ \downarrow & & \downarrow \\ BG & \longrightarrow & EG \times_G F \end{array}$$

だから Spectral seq.

$$\text{Tor}_{H_G^*(F)}(H^*(BG), H^*(BG)) \Rightarrow H_G^*(\Omega F)$$

を得る。(B) の fibre square から (A) の fibre square への包含写像は Spectral seq. の間の

写像

$$\begin{array}{ccc} \text{Tor}_{H_G^*(X)}(H^*(B_G), H^*(B_G)) & \Rightarrow & H_G^*(\Omega X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Tor}_{H_G^*(F)}(H^*(B_G), H^*(B_G)) & \Rightarrow & H_G^*(\Omega F) \end{array}$$

を induce する。この s を ideal $(t) \subset H^*(B_G)$ で
局所化し、 $R_0 = H^*(B_G)[t^{-1}]$ とおけば

$$\begin{array}{ccc} \text{Tor}_{H_G^*(X)[t^{-1}]}(R_0, R_0) & \Rightarrow & H_G^*(\Omega X)[t^{-1}] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Tor}_{H_G^*(F)[t^{-1}]}(R_0, R_0) & \Rightarrow & H_G^*(\Omega F)[t^{-1}] \end{array}$$

となる。 $\mathcal{F} \subset X$ を X の固定点集合の全体とし、
 $\mathcal{F} = F \cup F_1' \cup \dots \cup F_k'$ と連結成分に分解
する。このとき通常の局所化定理から

$$H_G^*(X)[t^{-1}] \cong H^*(F) \otimes R_0 \oplus H^*(F_1') \otimes R_0 \oplus \dots \oplus H^*(F_k') \otimes R_0$$

となる。 $H^*(F_1') \otimes R_0 \oplus \dots \oplus H^*(F_k') \otimes R_0$ の部分は、
 $H_G^*(x_0) \otimes R_0$ ($x_0 \in F$) に trivial に働くから、

$$\text{Tor}_{H_G^*(X)[t^{-1}]}(R_0, R_0) \cong \text{Tor}_{H_G^*(F)[t^{-1}]}(R_0, R_0)$$

となる。これから上の2つの Spectral seq. の E_2 での同型が得られ、定理1が証明された。

定理2 の証明

$\mathcal{M}(\Omega X)$ を ΩX の minimal model とする。 ΩX は H -空間であるから

$$\mathcal{M}(\Omega X) \equiv \{S(x_1, x_2, \dots, x_k), d=0\}$$

とあらわされる。ここに $S(x_1, \dots, x_k)$ は $\deg$ が偶数の $\{x_i\}$ から生成される多項式環と、 $\deg$ が奇数の $\{x_i\}$ から生成される外積多元環のテンソル積とあらわす。 $\deg x_1 \leq \deg x_2 \leq \dots \leq \deg x_k$ と仮定しておく。各 x_i は $\deg x_i - 1$ 次元の X の有理ホモトピーの基底の元を与え、 $\sum \dim_{\mathbb{Q}} \pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} < \infty$ の仮定から、上の $\{x_i\}$ は有限個である。又、 $\mathcal{M}(\Omega X_G)$ を $\Omega X_G = EG \times_G \Omega X$ の minimal model とすると、それは、

$$\mathcal{M}(\Omega X_G) \equiv \left\{ \begin{array}{l} S(x_1, \dots, x_k) \otimes \mathbb{Q}[t], \\ dx_i = f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, t) \\ dt = 0 \end{array} \right\}$$

の形で与えられる。ここに $\deg t = 2$, f_i は $(\deg x_i + 1)$ 次

の多項式で $f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, 0) = 0$ となるものである。

fibration $\Omega X \longrightarrow (\Omega X)_G \longrightarrow BG$ には, minimal model の準同型写像

$$S(x_1, \dots, x_k) \xleftarrow{\text{projection}} S(x_1, \dots, x_k) \otimes Q[t] \xleftarrow{\text{inclusion}} Q[t]$$

が対応する。

同様に ΩF の minimal model は

$$M(\Omega F) = S(y_1, y_2, \dots), \quad d=0 \\ \deg y_1 \leq \deg y_2 \leq \dots$$

で与えられ,

$$M((\Omega F)_G) = S(y_1, y_2, \dots) \otimes Q[t], \quad d=0$$

となり, fibration $\Omega F \longrightarrow (\Omega F)_G \longrightarrow BG$ には minimal model の準同型写像

$$S(y_1, y_2, \dots) \xleftarrow{\text{projection}} S(y_1, y_2, \dots) \otimes Q[t] \xleftarrow{\text{inclusion}} Q[t]$$

が対応する。

$\overline{S(x_1, \dots, x_n)} = \{ a \in S(x_1, \dots, x_n) \mid \deg a > 0 \}$ と
 し、 $\overline{\mathcal{M}}_X = \overline{S(x_1, \dots, x_n)} \otimes \mathbb{Q}[t]$ とする。又、 $\overline{S(y_1, \dots)} = \{ b \in S(y_1, \dots) \mid \deg b > 0 \}$ とし、 $\overline{\mathcal{M}}_F = \overline{S(y_1, \dots)} \otimes \mathbb{Q}[t]$ とおく。 $\overline{\mathcal{M}}_X \subset \mathcal{M}(\Omega X)_\mathbb{Q}$,
 $\overline{\mathcal{M}}_F \subset \mathcal{M}(\Omega F)_\mathbb{Q}$ であることを $\mathbb{Q}[t]$ -submodule
 であり、包含写像から induce される準同型写像
 $\overline{\mathcal{M}}_X \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_F$ がある。 $(\Omega X$ は固定点を $t=0$ と
 仮定し $a \in \overline{\mathcal{M}}_X$ に対し $da \in \overline{\mathcal{M}}_X$ とする)。ここで
 $Q_X = \overline{\mathcal{M}}_X / \overline{\mathcal{M}}_X \cdot \overline{\mathcal{M}}_X$
 $Q_F = \overline{\mathcal{M}}_F / \overline{\mathcal{M}}_F \cdot \overline{\mathcal{M}}_F$

とおけば、 Q_X, Q_F はともに $\mathbb{Q}[t]$ -module であり、
 包含写像から induce される準同型写像 $i^*:$
 $Q_X \rightarrow Q_F$ がある。又、 $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ に対応する
 元 $\langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \rangle$ が Q_X の $\mathbb{Q}[t]$ 上の生成元とな
 り、 $\langle y_1, \dots \rangle$ に対応する元 $\langle \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots \rangle$ が Q_F
 の $\mathbb{Q}[t]$ 上の生成元となる。

補題 i^* の (t) による局所化

$$i_{t^{-1}}^*: Q_X[t^{-1}] \rightarrow Q_F[t^{-1}]$$

は上への写像となる。

♯

この補題は *minimal model* の定義と、定理1から得られる。

この補題により $\mathcal{L} = \{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots\}$ の位数 $\leq k$ は直ちにわかる。

$$i_*(\bar{x}_1) = \lambda_1' \bar{y}_1 + \dots + \lambda_e' \bar{y}_e$$

$$\vdots$$

$$i_*(\bar{x}_k) = \lambda_1^k \bar{y}_1 + \dots + \lambda_e^k \bar{y}_e$$

$$\lambda_j^i \in \mathbb{Q}[\tau]$$

とすれば、行列 $A_1 = (\lambda_j^i)$ の階数 = ℓ となる。

A_1 の ℓ 次小行列 A_1' で $A_1' \neq 0$ となるもの

をとり、 $A_1' = \begin{bmatrix} \lambda_1^{i_1} & \dots & \lambda_e^{i_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{i_\ell} & \dots & \lambda_e^{i_\ell} \end{bmatrix}$ とする。

$\lambda_i^{r_i} \ (i \leq r_i \leq i_\ell)$ で $\lambda_i^{r_i} \neq 0$, $(\widetilde{A_1'})_{i_1}^{r_i}$ (A_1' の $\lambda_i^{r_i}$ の余因子) の行列式 $\neq 0$ となるものをとり

$$\bar{y}_1 \longmapsto \bar{x}_{r_1}$$

と対応づける。

$$(\widetilde{A_1'})_{i_1}^{r_1} = \begin{bmatrix} \lambda_2^{i_1} & \dots & \lambda_e^{i_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_2^{i_{\ell-1}} & \dots & \lambda_e^{i_{\ell-1}} \end{bmatrix}$$

とおい、同様のことを行い $\bar{y}_2 \longmapsto \bar{x}_{r_2}$ と対応

させる。これをくり返して、一対一対応 $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_e) \mapsto (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_e)$ をつくる。このとき $i^* \bar{x}_r$ は $t^s \bar{y}_r$ $(s, 20)$ という項を含むから $\deg \bar{x}_r - \deg \bar{y}_r =$ 偶数 (≥ 0) となる。この対応から定理2の不等式が得られる。

References

- [1] C. Allday, On the rational homotopy of fixed point sets of torus actions, *Topology* 17.
- [2] G.F. Bredon, Homotopical properties of fixed point sets of circle group actions, I. *Am. J. Math.* 91