

セントラルサーバーモデルの滞在時間の分布計算

防衛大学校 上岡 喜義 (Kiyoshi Kamioka)

川島 武 (Takeshi Kawashima)

§1 はじめに

ここでいうセントラルサーバーモデルとは、2ノードからなる2段巡回待ち行列網のことである。通常の電子計算機システムは端末機群とCPUからなり、これらのモデルとしてセントラルサーバーモデルが考えられている。

セントラルサーバーモデルの滞在時間分布は、ごく基本的なモデルを除いてはあまり知られていない。

そこで、本研究においては、サービス規律がそれぞれ先着順サービスとタイムシェアリングである2つのノードを持つ2段巡回待ち行列網の滞在時間分布とその特性値について考察した。(ここで、滞在時間とは巡回時間のことを言う)。

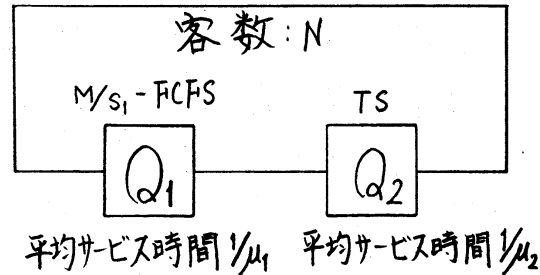
また、サービス規律が先着順サービスである2つのノードを持つ2段巡回待ち行列網の滞在時間分布とその特性値[1]との比較を、若干の数値例で示した。

§2. モデルの説明

モデルの概図を図1に示す。

図1で、左側のノードを Q_1 、
右側のノードを Q_2 とし、

以下の条件を満たすものとする。



- 1). N 人の客がこの系を反時計回りに巡回する。
- 2). Q_1 でのサービス規律は先着順サービス(FCFS)で、窓口数は s_1 ($1 \leq s_1 \leq N$)、各客はそれぞれ平均サービス時間 $1/\mu_1$ の独立な指数分布サービスを窓口から受ける。
- 3). Q_2 でのサービス規律はタイムシェアリング(TS)で、各客はそれぞれ平均サービス時間 $1/\mu_2$ の独立な指数分布サービスを受ける。
- 4). Q_1 と Q_2 はそれぞれ独立なサービスを行う。
- 5). 系は平衡状態である。

(なお、最後の数値例において、このモデルと比較するサービス規律が先着順サービスである2つのノードを持つ2段巡回待ち行列網は、上の条件3)を次の3)に換えたものである。

3). Q_2 でのサービス規律は先着順サービス(FCFS)で、窓口数は s_2 ($1 \leq s_2 \leq N$)、各客はそれぞれ平均サービス時間 $1/\mu_2$ の独立な指数分布サービスを窓口から受ける。)

§ 3. 記号と基本的事項

次のように記号を定義する.

$g_1(t), g_2(t)$; 時刻 t におけるそれぞれ Q_1 と Q_2 内の客数

$Q(t) = (g_1(t), g_2(t))$; 時刻 t での系の状態

$\{t_n\}_{n=-\infty}^{\infty} (\dots < t_{-1} < 0 \leq t_0 < t_1 < \dots)$; Q_1 での任意の到着時点列

$\{\tau_n\}_{n=-\infty}^{\infty} (\dots < \tau_{-1} < 0 \leq \tau_0 < \tau_1 < \dots)$; Q_1 での任意の退去時点列

W_n^1, W_n^2 ; 到着時点 t_n で Q_1 に入る客 C のそれぞれ Q_1 と Q_2 での滞在時間

w_n^1, w_n^2 ; 退去時点 τ_n で Q_1 を退去する客 C のそれぞれ Q_1 と Q_2 での滞在時間

$v(n)$; 時刻 t_n において Q_1 に到着した客が Q_1 を退去する時刻 τ_m につけられたインデックス m . すなわち, $W_n^1 = \tau_{v(n)} - t_n$.

系は平衡状態であるので, $\forall t \in (-\infty, \infty)$ に対して, 次式が成り

立つ.

$$P(Q(t) = (g_1, g_2)) = \frac{G(N)}{\prod_{i=1}^{g_1} \mu_1(i) \cdot \prod_{i=1}^{g_2} \mu_2(i)} \stackrel{\text{def}}{=} P_N(g_1, g_2) \quad (1)$$

ただし, $g_1 + g_2 = N$, $\mu_j(i) = \min(i, s_j) \cdot \mu_j \quad (j=1, 2)$

$G(N)$; 正規化定数

また, $\{t_n\}_{n=-\infty}^{\infty}, \{\tau_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ において, それぞれ定常な確率測度 P_a, P_d に対して, 次式が成り立つ.

$$P_a(Q(t_n+0) = (g_1+1, g_2)) = P_{N-1}(g_1, g_2) \quad (2)$$

$$P_d(Q(\tau_n-0) = (g_1+1, g_2)) = P_{N-1}(g_1, g_2) \quad (3)$$

ここで, $P_a(\cdot) = P(\cdot | t_0=0)$, $P_d(\cdot) = P(\cdot | \tau_0=0)$ と考えられる。
 そして, $P_a(W_n^1 \leq x, W_n^2 \leq y)$ 及び $P_d(w_n^1 \leq x, w_n^2 \leq y)$ は n に依
 存しない。

次に, これらの値が等しいことが, $W_n^j (j=1, 2)$ は $w_{V(n)}^j$
 $(j=1, 2)$ として表現でき, $Q(t) (-\infty < t < \infty)$ はエルゴード的で
 あるという事実から証明される。すなわち,
 補助定理1. 任意の n に対して, 次式が成り立つ。

$$P_a(W_n^1 \leq x, W_n^2 \leq y) = P_d(w_n^1 \leq x, w_n^2 \leq y) \quad (4)$$

§4. 可逆性と滞在時間分布

この節では, $P_d(w_n^1 \leq x, w_n^2 \leq y)$ の表現を類推する。これは,
 n に依存せず, (4) より, $P_a(W_n^1 \leq x, W_n^2 \leq y)$ と一致する。
 そのために, まず, 次の補助定理を示す。

補助定理2.

$Q(t)$ は可逆なマルコフ過程である。

証明

一般に, 離散状態空間 S をともなうマルコフ過程 $X(t)$
 $(-\infty < t < \infty)$ は, 次式を満たすときのみ可逆である。

$$P(s) \cdot R(s, s') = P(s') \cdot R(s', s) \quad (\forall s, s' \in S) \quad (5)$$

ここで, $P(s)$ と $R(s, s')$ はそれぞれ $X(t)$ の平衡分布と推移割
 合である。

過程 $Q(t)$ に対して、次式を得る。

$$\begin{aligned} R((g_1+1, g_2), (g_1, g_2+1)) &= \mu_1(g_1+1) \\ R((g_1, g_2+1), (g_1+1, g_2)) &= \mu_2(g_2+1) \end{aligned} \quad (6)$$

これらのことと(1)から、(5)が保たれることを示せる。

Q.E.D.

この可逆性から、次の補助定理が導かれる。

補助定理3.

$$P_d(w'_n \leq x \mid Q(\tau_n-0) = (g_1+1, g_2)) = P_d(W'_n \leq x \mid Q(t_n+0) = (g_1+1, g_2)) \quad (7)$$

証明).

客Cが時刻 $t_0=0$ で、 Q_1 に到着したとし、 $Q(+0)=K(=(g_1+1, g_2))$ とする。この条件のもとで $[0, \infty)$ での前進過程における可能な到着及び退去時点列の組の全体を R とし、その要素を $\mathbb{R} = \{(t_i)_{i=0}^{\infty}, (\tau_i)_{i=0}^{\infty}\}$ とかく。この $\mathbb{R}$ によって、 $Q(t)$ は決まる。

同様にして、 $(-\infty, 0]$ での逆進過程において、客Cが $t_0=0$ で Q_1 に到着したとし、 $Q(-0)=K$ とする。この条件のもとでの可能な退去及び到着時点列の組の全体を $\bar{R}$ とかく。

$R \ni \mathbb{R}$ に対して、原点对称な $\bar{R}$ の要素を $\bar{\mathbb{R}} = \{(t_i)_{i=-1}^{-\infty}, (\tau_i)_{i=-1}^{-\infty}\}$ とかくと、 R と $\bar{R}$ は一対一対応であり、

$$Q(t) \text{ on } \mathbb{R} = Q(-t) \text{ on } \bar{\mathbb{R}} \quad (t \geq 0) \quad (8)$$

$\mathbb{R}$, $\bar{\mathbb{R}}$ に対する確率変数をそれぞれ R , $\bar{R}$ とすると、

$$\text{可逆性から,} \quad P(R = \mathbb{R}) = P(\bar{R} = \bar{\mathbb{R}}) \quad (9)$$

次に, $Q_{i|R} = P(C \text{ が } t_i \text{ で } Q_1 \text{ を退去する} | R = \mathbb{R})$

$\bar{Q}_{i|\bar{R}} = P(\bar{C} \text{ が } t_{-i-1} \text{ で } Q_1 \text{ を退去する} | \bar{R} = \bar{\mathbb{R}})$ とかくと,

指数分布の無記憶性から $Q_{i|R} = \bar{Q}_{i|\bar{R}}$ (10)

また, $T_{i|R} = t_i$, $\bar{T}_{i|\bar{R}} = -t_{-i-1}$ とおくと, $T_{i|R} = \bar{T}_{i|\bar{R}}$ (11)

以上のことから, 次式がいえろ.

$$P_a(W_0^1 \leq x | Q(+0) = K) \quad (12)$$

$$= \sum_{R \in \mathbb{R}} \sum_{i=0}^{\infty} Q_{i|R} \cdot 1_{[0,x]}(T_{i|R}) \cdot P(R = \mathbb{R})$$

$$= \sum_{\bar{R} \in \bar{\mathbb{R}}} \sum_{i=0}^{\infty} \bar{Q}_{i|\bar{R}} \cdot 1_{[0,x]}(\bar{T}_{i|\bar{R}}) \cdot P(\bar{R} = \bar{\mathbb{R}})$$

$$= P_d(w_0^1 \leq x | Q(-0) = K) \quad (13)$$

任意の n について, $P_a(W_n^1 \leq x | Q(t_n+0) = K) =$ (12)

$$P_d(w_n^1 \leq x | Q(\tau_n-0) = K) = (13)$$

が成り立つ

Q.E.D.

w_n^1 と w_n^2 は $Q(\tau_n-0) = (g_1+1, g_2)$ なる条件が与えられたときは, 互いに独立であるから, (7) より, 次式がいえろ.

$$P_d(w_n^1 \leq x, w_n^2 \leq y | Q(\tau_n-0) = (g_1+1, g_2))$$

$$= P_a(W_n^1 \leq x | Q(t_n+0) = (g_1+1, g_2)) \cdot P_d(w_n^2 \leq y | Q(\tau_n-0) = (g_1+1, g_2))$$

この積の右側の項は容易に求まる. 次節ではこの積の左側の項を求めろ.

§5. Q_2 での滞在時間分布.

1). ここでは, Q_2 での客の到着直後の状態が与えられた場合

の条件付滞在時間分布を求める。

記号を次のように定義する。

$\tilde{W}$; 任意の客 C の Q_2 での滞在時間

$\tilde{Q}_2$; 客 C が Q_2 に到着した直後の Q_2 内の客数

$\tilde{T}$; 客 C が Q_2 においてサービスを受ける時間

$$G_n(t, u) = P(\tilde{W} > u | \tilde{Q}_2 = n, \tilde{T} = t) \quad \text{とおく。}$$

充分小さな Δu と $n = 1, \dots, N$ に対して, 次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} G_n(t, u + \Delta u) &= \frac{n-1}{n} \cdot \Delta u \cdot \mu_2 \cdot G_{n-1}(t - \frac{\Delta u}{n}, u) + \Delta u \cdot \mu(n) \cdot G_{n+1}(t - \frac{\Delta u}{n}, u) \\ &+ \left\{ 1 - \Delta u \cdot \left(\frac{n-1}{n} \cdot \mu_2 + \mu(n) \right) \right\} \cdot G_n(t - \frac{\Delta u}{n}, u) + o(\Delta u) \end{aligned} \quad (14)$$

(ただし, $\mu(n) = \min(s_1, N-n) \cdot \mu_1$, $G_0(t, u) = G_{N+1}(t, u) = 0$ とおく。)

ここで, $\Delta u \rightarrow 0$ とすると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} G_n(t, u) + n \cdot \frac{\partial}{\partial u} G_n(t, u) &= (n-1) \cdot \mu_2 \cdot G_{n-1}(t, u) \\ &- \{ n \cdot \mu(n) + (n-1) \mu_2 \} \cdot G_n(t, u) + n \cdot \mu(n) \cdot G_{n+1}(t, u) \end{aligned} \quad (15)$$

この N 個の連立微分方程式をベクトル表示すると, 次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t, u) + B \cdot \frac{\partial}{\partial u} G(t, u) = A \cdot G(t, u) \quad (16)$$

ただし

$$G(t, u) = \begin{bmatrix} G_1(t, u) \\ \vdots \\ G_N(t, u) \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1, & & 0 \\ & 2, & \\ & & \ddots \\ 0 & & & N \end{bmatrix}$$

$$A_{i,i+1} = i \cdot \mu(i), \quad A_{i,i-1} = (i-1) \cdot \mu_2, \quad A_{i,i} = -(A_{i,i-1} + A_{i,i+1})$$

その他の $A_{i,j} = 0$

次に, $H_n(u) = P(\tilde{W} > u | \tilde{Q}_2 = n)$, $H(u) = (H_1(u), \dots, H_N(u))'$ とおく.

$\tilde{\tau}$ と $\tilde{Q}_2$ は独立だから,

$$H(u) = \mu_2 \cdot \int_0^\infty e^{-\mu_2 t} G(t, u) dt \quad (17)$$

この式を u で微分し, (16) 式を用いると,

$$\frac{d}{du} H(u) = M \cdot H(u) \quad (\text{ただし, } M = B^{-1}(A - \mu_2 E)) \quad (18)$$

初期条件として, $H(0) = \mathbf{1}$ がいえるから, この微分方程式の一意解が求まり, 次式を得る.

$$H(u) = \exp(M \cdot u) \cdot \mathbf{1} \quad (19)$$

2), (19) 式を計算容易な式に変形するため, M をスペクトル分解する.

ここで, $\Pi = \begin{bmatrix} \pi_N & & 0 \\ & \pi_{N-1} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \pi_1 \end{bmatrix}$ ただし

$$\pi_i = P_d(Q(\tau_n=0) = (i, N-i))$$

$$\Gamma = \Pi^{1/2} B^{1/2}, \quad \hat{M} = \Gamma \cdot M \cdot \Gamma^{-1} \text{ とおく.}$$

$$(\hat{M})_{i,i} = -(\mu(i) + \mu_2)$$

$$(\hat{M})_{i,i-1} = \sqrt{\min(N-i+1, S_2) \cdot \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot (i-1) / i} \quad (20)$$

$$(\hat{M})_{i,i+1} = \sqrt{\min(N-i, S_2) \cdot \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot i / (i+1)}$$

その他の $(\hat{M})_{i,j} = 0$

となる.

よって, $\hat{M}$ は対称行列になり, $\hat{M}$ の固有値は実数.

次に, $\hat{M}$ の固有値を $\{\lambda_i\}_{i=1}^N$ とし, これらに対応する正規直交固有ベクトルを $\{\gamma_i\}_{i=1}^N$ とすると, $\hat{M}$ はスペクトル分解可能であり,

$$\hat{M} = \sum_{i=1}^N \lambda_i \gamma_i \gamma_i', \quad E = \sum_{i=1}^N \gamma_i \gamma_i' \quad \text{となる.}$$

$$\therefore M = \sum_{i=1}^N \lambda_i \Gamma^{-1} \gamma_i \gamma_i' \Gamma, \quad E = \sum_{i=1}^N \Gamma^{-1} \gamma_i \gamma_i' \Gamma$$

これを (9) 式に代入すると,

$$H(u) = \sum_{j=1}^N (\Gamma^{-1} \gamma_j \gamma_j' \Gamma) \cdot \mathbf{1} \cdot e^{\lambda_j u} \quad (21)$$

ゆえに, 次の補助定理が導ける.

補助定理 4.

$$\Gamma^{-1} \gamma_j \gamma_j' \Gamma \cdot \mathbf{1} = \begin{bmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{N,j} \end{bmatrix} \quad \text{とおくと, } H(u) = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N a_{1,j} e^{\lambda_j u} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^N a_{N,j} e^{\lambda_j u} \end{bmatrix} \quad (22)$$

§ 6. w_n^1 と w_n^2 の同時滞在時間分布の L.S.T.

この節では, 主定理となる w_n^1 と w_n^2 の同時滞在時間分布の L.S.T を求める.

既に述べた様に, w_n^1 と w_n^2 は $Q(\tau_n - 0) = (g_1 + 1, g_2)$ という条件が与えられれば, 互いに独立であるから, 補助定理 3, 4 より

$$\begin{aligned} & P_d(w_n^1 \leq x, w_n^2 \leq y \mid Q(\tau_n - 0) = (g_1 + 1, g_2)) \\ &= P_a(w_n^1 \leq x \mid Q(t_n + 0) = (g_1 + 1, g_2)) \cdot P_d(w_n^2 \leq y \mid Q(\tau_n - 0) = (g_1 + 1, g_2)) \\ &= [1 - e^{-\mu_1 x}] * [1 - e^{-s_1 \mu_1 x}]^{*n'} \cdot [1 - H_{N-n+1}(y)] \end{aligned} \quad (23)$$

ただし, $n' = \max(g_1 + 1 - s_1, 0)$

この式から，次式が導かれる。

定理

$$E(\exp(-w_n^1 \cdot \theta_1 - w_n^2 \cdot \theta_2)) = \sum_{n=1}^N \pi_n \cdot \frac{\mu_1}{\theta_1 + \mu_1} \cdot \left(\frac{s_1 \mu_1}{\theta_1 + s_1 \mu_1} \right)^{n'} \cdot \left(\sum_{i=1}^N \frac{a_{N-n+1,i} \cdot \lambda_i}{\lambda_i - \theta_2} \right) \quad (24)$$

ただし， $n' = \max(n - s_1, 0)$ とおく

系

$$\begin{aligned} E(w_n^1) &= \sum_{n=1}^N \pi_n \cdot (1 + n'/s_1) / \mu_1 \\ E(w_n^2) &= - \sum_{n=1}^N \pi_n \cdot \left(\sum_{i=1}^N a_{N-n+1,i} / \lambda_i \right) \\ E(w_n^1 \cdot w_n^2) &= - \sum_{n=1}^N \pi_n \cdot (1 + n'/s_1) \cdot \left(\sum_{i=1}^N a_{N-n+1,i} / \lambda_i \right) / \mu_1 \\ E((w_n^1)^2) &= \sum_{n=1}^N \pi_n \cdot ((1 + n'/s_1)^2 + n'/s_1^2 + 1) / \mu_1^2 \\ E((w_n^2)^2) &= 2 \cdot \sum_{n=1}^N \pi_n \cdot \left(\sum_{i=1}^N a_{N-n+1,i} / \lambda_i^2 \right) \end{aligned} \quad (25)$$

§ 7 滞在時間分布とその特性値の数値例.

サービス規律が FCFS と TS の 2 つのノードをもつ 2 段巡回待ち行列網モデルをモデル (I)，サービス規律が FCFS の 2 つのノードをもつモデルをモデル (II) とし，最後に数値例を示した。この際，左側にモデル (I) を，右側にモデル (II) を並べ，対応するサーバー数，トラフィック密度，サービス率等を一致させたものを密度関数，分布関数，平均，分散，相関係数，変動係数について対比させたものである。

ノードのサービス規律が TS の場合、客の到着以後、状態が変化するごとに、ノード内の各客のサービスを受ける割合が変動するため、分散は一般に単一サーバー FCFS に比し大きくなっている。これは、密度関数、分散のグラフに現われている。

また、相関係数については、サーバー数が増加するに従い負の相関は弱まり、モデル(II)よりモデル(I)の方が負の相関は弱まる。

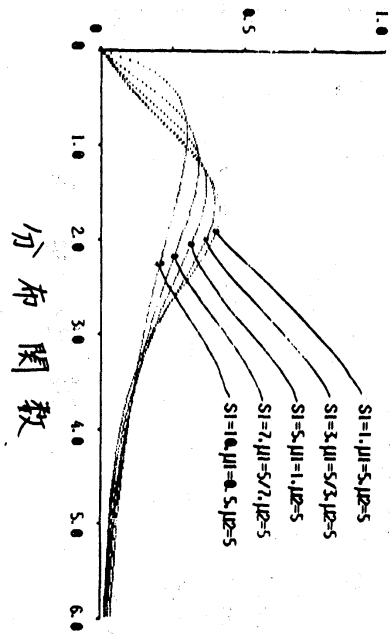
§8. おわりに.

以上、FCFS と TS の 2 つのノードをもつ 2 段巡回待ち行列網の滞在時間分布を求めたが、今後の課題としては、他のサービス規律(割込形後着順サービス、無作為サービス等)をもつモデルについての滞在時間分布の考察がある。

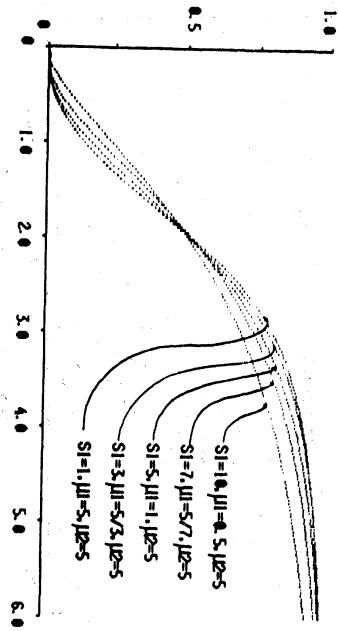
参考文献

- [1] 鳥越, 川島 Cyclic Queues における Cycle time の分布計算
数理解析研究所講究録 490, 待ち行列理論とその応用 '83
- [2] D. MITRA Performance '81 North Holland PP.113~131
- [3] P. J. BURKE Ann. Math. Statist vol 39. PP.1144~1152 (1968)

モデルⅢ 密度関数

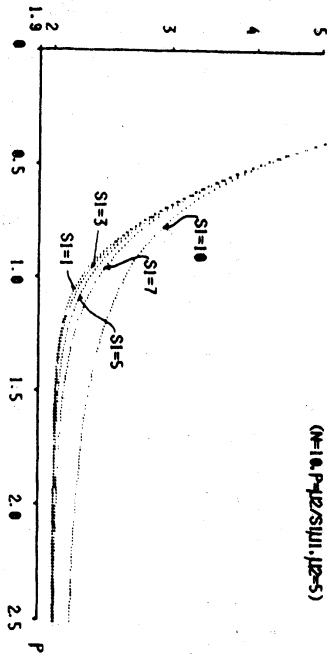


分布関数

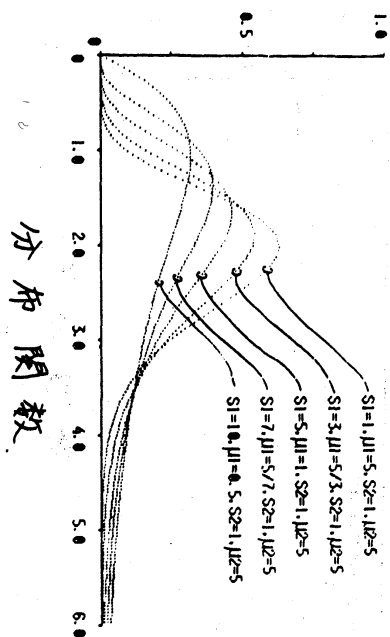


平均

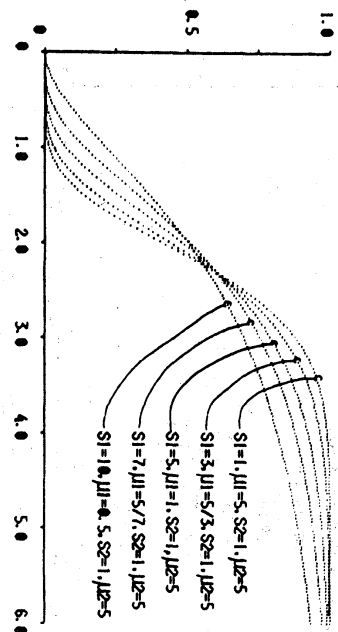
($N=10, P=1/2, SI, \mu_1, \mu_2=5$)



モデルⅣ 密度関数

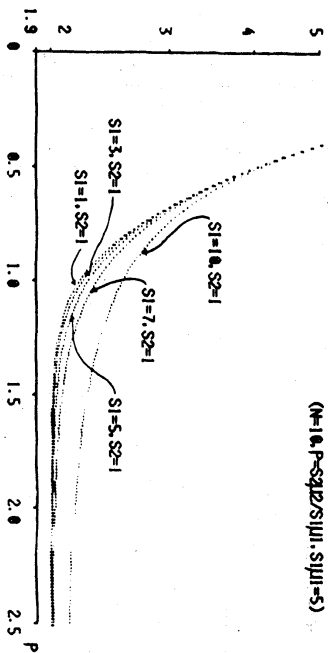


分布関数

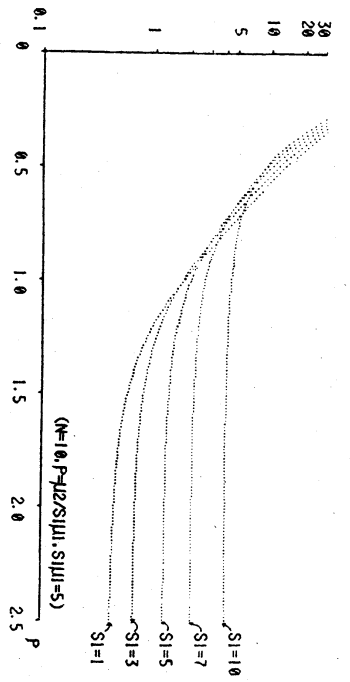


平均

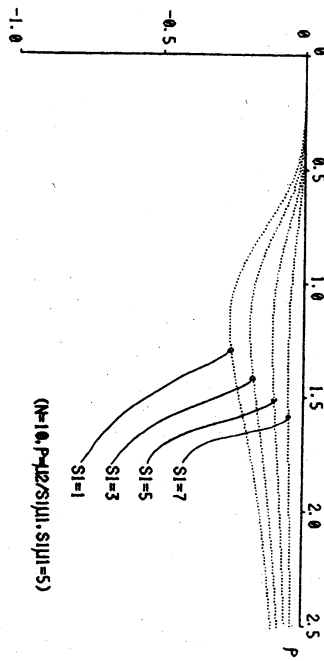
($N=10, P=5/12, SI, \mu_1, \mu_2=5$)



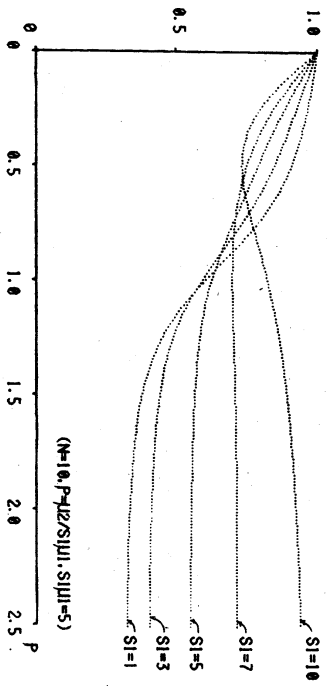
モデル(I) 分散



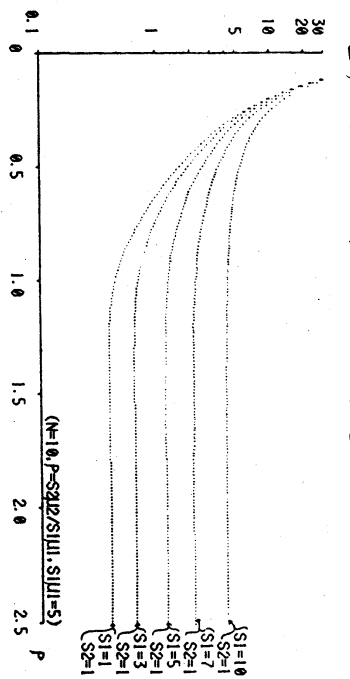
相関係数



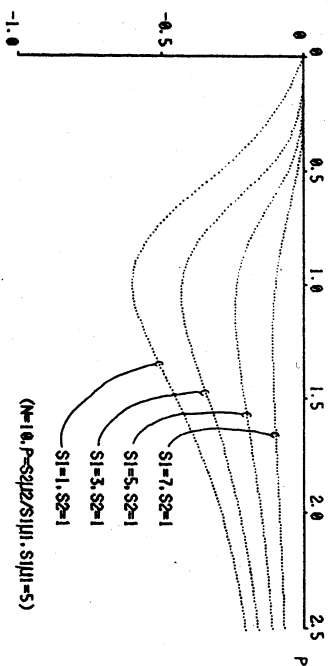
変動係数



モデル(II) 分散



相関係数



変動係数

