

円柱の周りの粘性流

大阪府大 工 航空 宮 城 敏 夫

低レイノルズ数の場合の円柱の周りの流れに対して，特に円柱背後に生ずる vortex pair に注目して計算を行つた。基礎式としては Oseen の運動方程式と連続の式とを採用する。即ち，流れ函数 ψ を用いて

$$\Delta (\Delta - 2k \partial/\partial x) \psi = 0, \quad k = U/2\nu, \quad (1)$$

境界条件は

$$\begin{aligned} u &\rightarrow U, & v &\rightarrow 0; & r &\rightarrow \infty, \\ u &= v = 0; & r &= a, \end{aligned} \quad (2)$$

である。この解は一般に次の如く与えられる：

$$\begin{aligned} \psi = & U r \sin \theta + A_0 \log r/a + B_0 \theta + \sum_{n=1}^{\infty} (a/r)^n (A_n \cos n \theta + B_n \sin n \theta) \\ & + b_0 \int_0^\theta k r [K_1(kr) + K_0(kr) \cos \theta] e^{kr \cos \theta} d\theta \\ & + e^{kr \cos \theta} \sum_{n=0}^{\infty} K_n(kr) (a_n \cos n \theta + b_n \sin n \theta). \end{aligned} \quad (3)$$

いま，複素速度を求めれば

$$\begin{aligned} u - i v = & e^{-i\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + i \frac{\partial}{\partial r} \right) \psi \\ = & U + \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(\frac{a}{r} e^{-i\theta} \right)^{n+1} + e^{kr \cos \theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n K_n(kr) e^{i n \theta}, \end{aligned} \quad (4)$$

となる。ただし，

$$C_{-n} = \overline{C_{n-1}}$$

$$C_0 = (B_0 + i A_0)/a, \quad C_n = n (B_n - i A_n)/a, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (5)$$

$$c_0 = k \left\{ b_0 - \frac{b_1}{2} + i \left(a_0 - \frac{a_1}{2} \right) \right\},$$

$$c_n = \frac{k}{2} \left\{ b_n - b_{n+1} + i (a_n - a_{n+1}) \right\}, \quad n=1, 2, 3, \dots,$$

である。ここで、円柱の場合には問題の対称性などにより $A_n = a_n = 0$ となり、 C_n, c_n の系列はすべて実数となる。(4) に境界条件を適用すれば、 C_n, c_n を決定する式は

$$\left. \begin{aligned} C_{s-1} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n I_{n+s}(ka) K_n(ka) &= 0, \quad s=1, 2, 3, \dots \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n I_{n-s}(ka) K_n(ka) &= \begin{cases} -U, & s=0 \\ 0, & s=1, 2, 3, \dots \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

となる。これらの式で決められた C_n, c_n を用いて B_n, b_n の系列は次のように決めることが出来る。

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= a C_0, \quad B_n = \frac{a}{n} C_n, \quad n=1, 2, 3, \dots \\ b_0 &= \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{\infty} c_j, \quad b_n = \frac{2}{k} \sum_{j=n}^{\infty} c_j, \quad n=1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

故に、(6) の計算を行えば場の量はすべて適当な桁数迄求めることが出来る。

一方、レイノルズ数が小さいということを利用して、レイノルズ数で展開する方法がある。一例をあげると

$$\left. \begin{aligned} \psi/Ua &= \left(r_1 - \frac{1}{r_1} \right) \sin \theta \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_m \left\{ \Phi_{m,n}(R_1) - \Phi_{m,n}(R_1 r_1) \right\} \frac{\sin n \theta}{n r_1^n}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ただし $\Phi_{m,n} = (K_{m-1} + K_{m+1})(I_{m-n} + I_{m+n})$

$$+ K_m (I_{m-n-1} + I_{m-n+1} + I_{m+n-1} + I_{m+n+1}),$$

$$r_1 = r/a, \quad R_1 = ka = R/4$$

で、 R はレイノルズ数である。

K_m , I_m などのベッセル函数も R が小さいものとして展開すれば, 未知定数 B_m を決定し得て, 場の量を求めることが出来る。例えば, R_1^4 迄を考慮すれば

$$B_0/4 = (1+2\Omega)^{-1} \left\{ 1 - 2^{-4} (1+2\Omega)^{-1} (1-16\Omega-16\Omega^2) R_1^2 \right. \\ \left. + (1+2\Omega)^{-1} \left\{ 2^{-7} \cdot 3^{-2} (271+288\Omega+48\Omega^2) \right. \right. \\ \left. \left. - 2^{-8} \cdot 3^{-1} (1+2\Omega)^{-1} (1-16\Omega-16\Omega^2) (11+76\Omega+48\Omega^2) \right\} R_1^4 + \dots \right\}, \quad (9)$$

ただし, $\Omega = \ln(8/R) - \gamma$,

などが得られるが, かなり厄介な式である。その上に, ここで注目している物体背後の vortex pair の大きさなどは, 特に充分高次の R 展開の項を必要とする。(物体背後では, 流体が殆んど静止しかけているので, 場の量, 例えば x 軸上の速度などは, R の低次の項が互に打ち消して非常に小さい値になるからである。)

他方, (6) 式は連立一次方程式であるから, 原理的には手廻しの計算機によつても, c_n を求めることは可能であるが, 例えば, 6元で有効数字8桁位を出そうとすれば, 単調な仕事のために役頭できなかつたせいもあつたにせよ, マル二日を要した経験があるので, これはやめた方が宜しい。というのは, 電子計算機を以てすれば, 16元であつても, 相当な桁数が非常に速く, しかも, 計算機屋? さんにお問い合わせするとしても, 非常に安価で求めて頂けるものであるからである。尤も, この研究はかなり以前のものであつて, 以上の事は既に旧聞に属するものであることは御容赦願いたい。

さて, この様にして, c_n についてその収斂性も確かめる意味に於て, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9 までを取つた近似計算を行つて貰つた。その値を掲げるのは省略するが, かなり収斂のよいことが分つた。これを基礎として, 場の量が計算される。すなわち, Oseenの運動方程式を基礎とした場合, レイノルズ数 4.0 の時に, 円柱背後に生ずる vortex pair の大きさは次のようになる。

$R=4.0$	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9
角 度	20,072	20,691	20,658	20,659	20,659
円柱中心からの後方距離		1.2057a	1.2051a	1.2052a	1.2052a

さらに, vortex pair の出現し始める Critical Reynolds 数の見当をつけるために,

$$\left[\psi / (r_1 - 1) \sin \theta \right]_{r_1=1, \theta=0} \quad (10)$$

なる量を (8) を用いて計算してみた。(10) が 0 となる曲線は vortex pair を表わしている筈であるが, R^4 まででは見出すことが出来なかつた。しかし, 大凡の見当はついたので, $R=3.2$ として再び (6) によつて c_9 までを求めて, vortex pair の大きさを調べた結果, 角度は 9.732° , 円柱中心からの距離は $1.044a$ となり, 非常に小さいものとなり, これより Critical Reynolds 数は 3.0 附近と推量し得る。実験では 5 附近と報告されているのとは比べて, 興味深いと思われる。

参 考 文 献

- S. Tomotika and T. Miyagi ; Memoirs Coll. Sci., Univ. of Kyoto, 30 (1962) 1.
S. Tomotika and T. Aoi ; Quart. J. Mech. & Appl. Math., 3 (1950) 140.
L. N. G. Filon ; Proc. Roy. Soc. A, 113 (1927) 7.
S. Taneda ; J. Phys. Soc. Japan, 11 (1956) 302.