

解析汎函数の偏微分方程式への応用

上智大 理工 青木一雄

コーシー・コワレフスカヤの定理の抽象化である, 山中-オブションニコフ-トレーブの定理と, トレーブが導入した超微分作用素を利用して, コーシー問題を考察する。特に, ここでは, 局所コーシー問題

$$(1) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)u(z, t) = \sum_{j=1}^m A_j \left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right)u(z, t) + A_0 u(z, t) + f(z, t)$$

$$(2) \quad u(z, 0) = u_0(z)$$

の原真における *distribution* 適切性を論じよう。但し, ここで方程式(1)の係数は $N \times N$ 複素行列とする。

定理 局所コーシー問題(1)~(2)が原真において *distribution* 適切であるための必要十分条件がゴールドディングの意味で双曲型である。

を [1] に 従って論じる。

山中-オブションニコフ-トレーブの定理は, 3 先生が独立に示した, 一般化されたコーシー・コワレフスカヤの定理であ

る。ここで紹介するのは、トレージの型で引用するが、それは本質的には、山中先生が発表されたものと同じである。この定理は、非常に簡潔でかつ応用範囲が広く、フックス型の偏微分方程式にも利用されている。

一方、定理を証明するにあたって、超微分作用素も導入されるが、これは convolution 作用素に過ぎない。超微分作用素はその核により決まるある一つの解析汎関数の空間から、もう一つの解析汎関数の空間への連続線型写像のことである。普通の微分作用素は勿論、適当な条件の下では、無限次の微分作用素と呼ばれているものも、超微分作用素と考えてよい。超微分作用素を知るには、その核を知ればよいが、その際、よく知られた線型位相同型

$$(3) \quad \mathcal{O}'(K) \cong \text{Exp}(\mathbb{C}_m; K)$$

を、フレシェ値の空間に拡張しておくと都合がよい。実際、それは [2] で示された。それにより [1] で取り扱われた議論をより簡潔にすることができる。

§1 抽象的コーシー問題

本節では、山中・オブシャニコフ・トレーブの定理を述べその応用として、通常のコーシー・コワレフスカヤの定理が導かれることを示そう。

定義 1-1 $\{X_s\}_{0 \leq s \leq 1}$ がスケールを持つバナッハ空間族であるとは、任意の $s' \leq s$ なる組 (s, s') に対して、 $X_s \subset X_{s'}$ で、しかも X_s から $X_{s'}$ への自然な一対一写像のノルムが 1 以下であるものをいう。

ここで、

$$(1) \quad \frac{d}{dt} X(t) = A(t) X(t) + f(t) \quad (|t| < \delta)$$

$$(2) \quad X(0) = x_0$$

なる X_s 値コーシー問題を考える。但し、方程式 (1) の係数 $A(t)$ は、

$$(c) \quad (t \mapsto A(t)) \in \mathcal{O}(\{|t| < \eta\}; L(X_s: X_{s'})) \llbracket C \rrbracket^{(1)}$$

とする。

この時、コーシー問題 (1) - (2) の存在と一意性を保証する次の定理 1-2 が成り立つ。

(注1) $\llbracket \cdot \rrbracket$ は $\{t: |t| < \eta\}$ を開区間 $[-\eta, \eta]$ で考えたものである。

定理 1-2 ((YOT 定理)) $0 \leq s' < s \leq 1$ なる任意の組 (s, s') に対し

$$(G) \quad \|A(t)\|_{L(X_s: X_{s'})} \leq \frac{C}{s-s'}$$

なる正数 $C > 0$ が存在すると仮定する。更にデータに対しては、次の条件

$$(D) \quad x_0 \in X_1, \quad (t \rightsquigarrow f(t)) \in \mathcal{O}(\{ |t| < \eta \}; X_1) \quad [C]$$

の下で考える。この時、 $0 < \delta_0 \leq \eta$ なる δ_0 が存在し、(D) を満たす任意のデータ $(x_0, f(t))$ に対し

$$(t \rightsquigarrow x(t)) \in \mathcal{O}(\{ |t| < \delta = \delta_0(1-s) \}; X_s) \quad [C']$$

なる (1)-(2) の解が唯一存在する。

今、 $Y_s = L(X_1: X_s) \quad (0 \leq s \leq 1)$ とすると、 $\{Y_s\}_{0 \leq s \leq 1}$

は、スケールを持つバナッハ空間族になる。この空間族 $\{Y_s\}_{0 \leq s \leq 1}$ に対して、定理 1-2 を適用すると、 τ をパラメータとする時、

$$(3) \quad \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \right) R(t, \tau) = A(t) R(t, \tau) \quad (|t-\tau| < \delta, |t| < \eta)$$

$$(4) \quad R(\tau, \tau) = I_1$$

を満足する唯一の解

$$(t \rightsquigarrow R(t, \tau)) \in \mathcal{O}(\{ |t-\tau| < \delta_0(1-s), |t| < \eta \}; L(X_1: X_s))$$

が存在する。

(3)-(4) の解に対して、次の定理が成立する。

定理 1-3 (3)-(4) の解 $R(t, \tau)$ は、任意の (s, s') に
対して、ある $\delta(s, s') > 0$ が存在して、

$$\{(t, \tau); |t - \tau| < \delta(s, s'), |\tau| < \frac{\eta}{2}\}$$

で 2 変数 (t, τ) の函数とみて正則【こ'】である。

一方、(1)-(2) の解 $X(t)$ は、(3)-(4) の解 $R(t, \tau)$ を用いる
と積分表示することができる。

定理 1-4 (1)-(2) の解は、(3)-(4) の解 $R(t, \tau)$ を使
って

$$(5) \quad X(t) = R(t, 0)X_0 + \int_0^t R(t, \tau)f(\tau)d\tau$$

と積分表示できる。

本節の終わりに、YOT 定理の系として、コーシー・コワレ
フスキーの定理を導こう。

例 1-5 (Cauchy-Kowalevsky の定理)

$\mathbb{C}^{n+1}$ の 0 の近傍を Ω とし、 E を一つのバナッハ空間とする。

この時、

$$(6) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(z, t) = \sum_{j=1}^n A_j(z, t) \frac{\partial}{\partial z_j} u(z, t) \\ + A_0(z, t)u(z, t) + f(z, t) \quad (|t| < \eta)$$

$$(7) \quad u(z, 0) = u_0(z)$$

なるコーシー問題を考えよう。但し、係数は、

$$A_j(z, t) \in \mathcal{O}(\Omega; L(E; E))$$

とする。

$\mathbb{C}^n$ の 1-パラメータコンパクト族 $\{K(s)\}_{0 \leq s \leq 1}$ で、
次の性質をもつものを考えよう。

“ある正数 C_0 に対し

$$\{z \in \mathbb{C}^n; d(z, K(s')) \leq C_0^{-1}(s-s')\} \subset K(s) \quad (s' < s)$$

となり、 $\overset{\circ}{K}(s)$ が連結で、 $\overline{\overset{\circ}{K}(s)} = K(s)$ となる。”

更に、ある $\eta > 0$ に対して、

$$K_0 \equiv \{(z, t) \in \mathbb{C}^{n+1}; z \in K(1), |t| \leq \eta\} \subset \Omega$$

とする。

そして、スケールを持つバナッハ空間族として、

$\{\mathcal{O}_B(K(s); E)\}_{0 \leq s \leq 1}$ を考えよう。

この時、次の2つの事実

$$\left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial z_j} : \mathcal{O}_B(K(s); E) & \longrightarrow & \mathcal{O}_B(K(s'); E) \\ \downarrow f & \rightsquigarrow & \downarrow \frac{\partial f}{\partial z_j} \end{array} \right.$$

の作用素ノルムは、

$$\left\| \frac{\partial}{\partial z_j} \right\|_{L(\mathcal{O}_B(K(s); E); \mathcal{O}_B(K(s'); E))} \leq \sqrt{n} C_0 (s-s')^{-1}$$

である。”

$$\left[\begin{array}{ccc} A_j(z, t) : \mathcal{O}_B(K(s); E) & \longrightarrow & \mathcal{O}_B(K(s); E) \\ \downarrow f & \rightsquigarrow & \downarrow A_j(z, t)f \end{array} \right.$$

は、連続線型写像である。”

が成立する。

よって、

$$A(t) = \sum_{j=1}^n A_j(z, t) \frac{\partial}{\partial z_j} + A_0(z, t)$$

と置くと、ある定数 $C > 0$ が存在して、

$$\|A(t)\|_{L(X_S; X_{S'})} \leq C(S-S')^{-1}$$

である。ユーシー問題(6)-(7)を

$$u_0(z) \in X_1 = \mathcal{O}_B(K(1); E)$$

$$(t \mapsto f(z, t)) \in \mathcal{O}(\{t: |t| < \eta\}; X_1)$$

なるデータの下で考えると、定理1-2より、ある $0 < \delta_0 \leq \eta$ なる δ_0 が存在し、任意の $0 \leq s < 1$ なる s に対して、(6)-(7) の唯一の解

$$(t \mapsto u(z, t)) \in \mathcal{O}(\{t: |t| < \delta_0(1-s)\}; X_s)$$

が存在する。これは、ユーシー・コワレフスキーの定理に他ならない。

§.2. 解析汎函数と超微分作用素

本節では、解析汎函数の一般的性質と、超微分作用素の定義を述べる。

Ω を $\mathbb{C}^n$ の開部分集合、 K を $\mathbb{C}^n$ のコンパクト部分集合とする。この時、通常之位相を入れることにより、 $\mathcal{O}(\Omega)$ は FS-

空間、 $\mathcal{O}(K)$ は DFS-空間となる。

今、 F での一つのフレシェ空間を表わそう。 $L(\mathcal{O}(\Omega); F)^{(2)}$ の元 μ を Ω 上の F-値解析汎函数、 $L(\mathcal{O}(K); F)$ の元を K 上の F-値局所解析汎函数 と呼ぼう。

定義 2-1 $\mu \in L(\mathcal{O}(\Omega); F)$ が、 Ω の開部分集合 U で支えられているとは、ある $\mu_1 \in L(\mathcal{O}(U); F)$ が存在して、 $\mu = \mu_1 \circ \rho_U^\Omega$ となることである。また、 μ が Ω のコンパクト集合 K で支えられているとは、 K の任意の開近傍 U に対して、 μ が U で支えられていることと定義する。

K 上の局所解析汎函数と K で支えられた $\mathbb{C}^m$ 上の解析汎函数に関して、次の定理がある。

定理 2-2 K を $\mathbb{C}^m$ のルンゲ・コンパクト集合とする。
この時、写像

$$T: L(\mathcal{O}(K); F) \longrightarrow \{\mu \in L(\mathcal{O}(\mathbb{C}^m); F) : \mu \text{ は } K \text{ で支えられている}\}$$

は、連続線型全単射である。即ち、 K 上の局所解析汎函数と K で支えられた解析汎函数とを同一視することができる。

次にいくつかの函数空間を定義しよう。

(注2) E, F を線型位相空間とすると、 $L(E; F)$ で E から F の中への連続線型写像全体を表わす。

$$\text{Exp}(\mathbb{C}_n) = \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}_n) : \exists c > 0, \exists r \in \mathbb{R}_+^n, |f(z)| \leq c \exp \sum_{j=1}^n r_j |z_j|\}$$

$$\text{Exp}^b(\mathbb{C}_n; K) = \{f \in \text{Exp}(\mathbb{C}_n) : \|f\|_K < \infty\}$$

と置く。但し、ノルム $\|\cdot\|_K$ は、

$$\|f\|_K = \sup_{z \in \mathbb{C}_n} \{f(z) \exp(-I_K(z))\} \quad (f \in \text{Exp}(\mathbb{C}_n))$$

と定義する。この時、タイプ K 以下の指数型整函数の空間を

$$\text{Exp}(\mathbb{C}_n; K) = \varprojlim_{K_1 \supset K} \text{Exp}^b(\mathbb{C}_n; K_1)$$

と定義する。 $\text{Exp}(\mathbb{C}_n; K)$ は、FS 空間になる。

K が、コンパクト凸集合の時、

$$\mathcal{O}'(K) \stackrel{\text{FB}}{\cong} \text{Exp}(\mathbb{C}_n; K)$$

なる線型位相同型が成立する。ここで、 $\mu \in \mathcal{O}'(K)$ に対して FB-変換 $\hat{\mu}$ を

$$\hat{\mu}(\lambda) = \langle \mu_z, e^{\langle z, \lambda \rangle} \rangle$$

と定める。

線型位相同型 $\mathcal{O}'(K) \cong \text{Exp}(\mathbb{C}_n; K)$ を、次の様に拡張することが出来る。

定理 2-3 K がコンパクト凸集合の時、

$$L(\mathcal{O}(K); F) \cong^F \text{Exp}(\mathbb{C}_n; K)$$

なる線型位相同型が成立する。

ここで、 ${}^F\text{Exp}(\mathbb{C}_n; K)$ は、 $\mathbb{C}_n$ 上のタイプ K 以下の F -値整函数全体の空間である。

また、 $\mathbb{C}^n$ 上の解析汎函数 μ, ν に対して、 μ と ν の convo-

lution を $\langle \mu * \nu, h \rangle = \langle \mu, \check{\nu} * h \rangle$ ($h \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$) と定義する。但し、

$$(\mu * h)(z) = \langle \mu_{\check{z}}, h(z - \check{z}) \rangle, \quad \langle \check{\mu}, h \rangle = \langle \mu, \check{h} \rangle$$

$$\check{h}(z) = h(-z)$$

と約束する。

双線型写像

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{O}'(K) \times \mathcal{O}(\Omega^2) & \longrightarrow & L_b(\mathcal{O}'(\Omega^1); \mathcal{O}'(\Omega^2)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mu, \varphi) & \rightsquigarrow & (\nu \rightsquigarrow \varphi(z)(\mu * \nu)) \end{array}$$

は、連続写像である。ここで $L_b(\mathcal{O}'(\Omega^1); \mathcal{O}'(\Omega^2))$ は、 $L(\mathcal{O}'(\Omega^1); \mathcal{O}'(\Omega^2))$ に、 $\mathcal{O}'(\Omega^1)$ の有界集合上の一様収束位相を入れたものである。この時、テンソル積の transversality より、連続線型写像

$$d_0: \mathcal{O}'(K) \hat{\otimes}_{\pi} \mathcal{O}(\Omega^2) \longrightarrow L_b(\mathcal{O}'(\Omega^2); \mathcal{O}'(\Omega^2))$$

が存在する。

定義 2-4 $L(\mathcal{O}'(\Omega^1); \mathcal{O}'(\Omega^2))$ の元 G が Ω^1 から Ω^2 への超微分作用素であるとは、 $\Omega^1 + K \subset \Omega^2$ なる $\mathbb{C}^n$ のコンパクト集合 K があって、 $G \in d_0(\mathcal{O}'(K) \hat{\otimes}_{\pi} \mathcal{O}(\Omega^2))$ となることと定義する。

《注意》 d_0 が、単射になるかどうか一般にはわからない。

しかし、例えば、 Ω^i ($i=1,2$)、 K が直積型で、 Ω_j^i 、 K_j がすべてが連結かつ単連結であり、更に、各 j に対して、 $K_j \subset \Omega_j^1$

Ω_j^1 なる $\Omega_j^2 \in \Omega^2$ が存在すれば, d_0 は単射であることは、知られている。

今、 G を超微分作用素としよう。即ち、ある $G_t(z) \in \mathcal{O}'(K) \hat{\otimes}_\pi \mathcal{O}(\Omega^2)$ が存在して、 $d_0(G_t(z)) = G$ とする。一方 $\mathcal{O}'(K) \hat{\otimes}_\pi \mathcal{O}(\Omega^2)$ の元 $G_t(z)$ は、グロタンディークの定理により

$$G_t(z) = \sum_{i=0}^{\infty} (\mu_i)_t \otimes \varphi_i(z)$$

と書き表わすことができる。従って、(1) を考慮すれば、

$$G\nu = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(z) (\mu_i * \nu) \quad (\nu \in \mathcal{O}'(\Omega^1))$$

である。

本節の最後に超微分作用素の例を紹介しておこう。 K が原点を含んでいるとする時、 $G_t(z) = \delta_t \otimes 1_z$ で定義される超微分作用素は、 $\mathcal{O}'(\Omega^1)$ から $\mathcal{O}'(\Omega^2)$ への恒等写像である。また、 $G_t(z) = \delta_t \otimes \varphi(z)$ で定義される超微分作用素は、解析汎函数と正則函数 $\varphi(z)$ との積となる。より進んだ例は、[1], [2] を参照されたい。

§3 超微分作用素の一つの応用

$$(1) \quad \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) u(z, t) = \sum_{j=1}^n A_j \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\right) u(z, t) + A_0 u(z, t) + f(z) \\ \equiv Lu + f$$

$$(2) \quad u(0) = u_0(z)$$

なるユーシー問題を考える。但し、 $A_j \in M_N(\mathbb{C})$ とする。

Ω_j を $\mathbb{C}$ の有界開凸部分集合とする。そして、

$$\Omega_j(d) = \{z_j \in \mathbb{C} : d(z_j, \Omega_j) < d\} \quad (d > 0)$$

$$\Omega_j(0) = \Omega_j$$

$$\Omega(d) = \Omega_1(d) \times \cdots \times \Omega_n(d)$$

と置く。

今、 X_S として、 $\mathcal{O}_B(\Omega(sd_0); L(\mathbb{C}^N; \mathbb{C}^N))$ ($d_0 > 0$) を取ろう。ユーシー問題(1)-(2)のリゾルベント $R(t, \tau)$ 、即ち、

$$(3) \quad \left(\frac{\partial}{\partial \bar{t}}\right) R(t, \tau) = Lu$$

$$(4) \quad R(t, \tau) = I$$

の解は、

$$(5) \quad (t \rightsquigarrow R(t, \tau)) \in \mathcal{O}(\{t : |t - \tau| < \delta_0(1-s)\} : L(X_i; X_S))$$

となる。

t をとめた時、 $R(t, \tau)$ の FB-表象を $\Psi(z, t, \tau, \lambda)$ としよう。この時、 $\Psi(z, t, \tau, \lambda)$ は、

$$(6) \quad (\lambda \rightsquigarrow \Psi(z, t, \tau, \lambda)) \in \begin{matrix} M_N(\mathbb{C}) \\ \text{Exp}(\mathbb{C}_m) \end{matrix}$$

となる。

(6)と定理2-3より、ある $p \in L(\mathcal{O}(\mathbb{C}^n); L(\mathbb{C}^N; \mathbb{C}^N))$ が存在して、 $x(t, \tau, \lambda) = FB(p)(\lambda)$ である。

一方、 $A(\lambda) = A_0 - \sum_{j=1}^m A_j \lambda_j$ と置く時、 $R(t, 0)$ の表象 $x(z, t, 0, \lambda)$ は、ユーシー問題

$$(7) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)x(t, \lambda) = \sum_{j=1}^m A_j \left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right)x(t, \lambda) + A(\lambda)x(t, \lambda)$$

$$(8) \quad x(0, \lambda) = 1_N$$

の唯一つの解である。

実際、その解は、

$$(9) \quad x(z, t, 0, \lambda) = \exp(A(\lambda)t)$$

で与えられる。

また、 $\mathcal{U}^1 = \mathcal{U}(0)$, $\mathcal{U}^2 = \mathcal{U}(d_0)$ と置くと、 $R(t, \tau)$ の値は、 $L(\mathcal{O}(\mathcal{U}^1)^N; \mathcal{O}(\mathcal{U}^2)^N) \cong L(\mathcal{O}'(\mathcal{U}^1); \mathcal{O}'(\mathcal{U}^2))^{N^2}$ である。

従って、 $\mu \in \mathcal{O}'(\mathcal{U}^1)^N$ に対して、

$$(10) \quad FB(R(t, \tau)\mu) = x(t, \tau, \lambda) \hat{\mu}(\lambda)$$

であることと、FB-変換の単射性より

$$(11) \quad R(t, \tau)\mu = p(t, \tau) * \mu$$

が成立する。

さらに、 $R(t, \tau)\mu$ の支台について、 μ があるコンパクト集合 K で支えられている時、 $R(t, \tau)\mu$ の支台は

$$(12) \quad \{z: d(z, K) \leq \left(\sum_{j=1}^m \|A_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}} |t - \tau|\}$$

に含まれる。

以上の準備の下で、 $\mathbb{C}^n$ の原典の開近傍 Ω と $\mathbb{R}^1$ の原典を含む開区間 $(-\eta, \eta)$ で、

$$(1) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) u(z, t) = \sum_{j=1}^m A_j \left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right) u(z, t) + A_0 u(z, t)$$

$$(2) \quad u(z, 0) = u_0(z)$$

の原典における可解性を論じる。

定義 3-1 局所コーシー問題 (1) ~ (2) が原典において、 D -適切であるとは、原典を含む $\mathbb{R}^n$ の開近傍 Ω_0 に対して、ある正数 η_0 が存在して、任意に $u_0 \in \mathcal{E}'_x(\Omega_0; \mathbb{C}^N)$, $(t \rightsquigarrow f(t)) \in \mathcal{C}(\{ |t| < \eta \}; \mathcal{E}'_x(\Omega_0; \mathbb{C}^N))$ が、それぞれ与えられた時、(1) - (2) の解 $u(t)$ が、

$$(t \rightsquigarrow u(t)) \in \mathcal{C}'(\{ |t| < \eta_0 \}; \mathcal{E}'_x(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^N))$$

である時をいう。

簡単のため、一つの記号を導入しておこう。 $M \in M_N(\mathbb{C})$ に対して、 $\chi(M) = \sup_{\lambda \in \text{Spec } M} (\text{Re } \lambda)$ と置く。ここで、 $\text{Spec } M$ は、 M のスペクトル全体の集合である。今の場合、 M は行列だから、その固有値全体の集合である。

定理 3-2 局所コーシー問題 (1) - (2) が原典において D -適切であるための必要十分条件は、 $\exp(\chi(A(i\xi)))$ が、

$\xi \in \mathbb{R}^n$ の緩増加関数であることである。

(略証) 今、(1)-(2)が原点において、 D -適切であるとしてよう。ここで、特にデータ (u_0, f) として、 $f \equiv 0, u_0 = \delta \vec{e}$ を取ろう。但し、 $\vec{e}$ は $\mathbb{C}^N$ の任意のベクトルとする。この時、解は、リゾルベント $R(t, 0)$ により、

$$u(t) = R(t, 0) u_0 = p(t, 0) * \delta \vec{e} = p(t, 0) \vec{e}$$

と表わされる。 $\vec{e}$ が任意であることと、 D -適切であることより、

$$(t \rightsquigarrow p(t, 0)) \in \mathcal{C}'(\{t: |t| < \eta_0\}; \mathcal{E}_x'(\mathbb{R}^n; M_N(\mathbb{C})))$$

である。ここで、 $0 < \eta_1 < \eta_0$ なる η_1 を取ると $\{p(t, 0)\}_{t \in [-\eta_1, \eta_1]}$ は、 $\mathcal{E}_x'(\mathbb{R}^n; M_N(\mathbb{C}))$ のコンパクト部分集合になる。従って、パーリー・ウィーナー・シュワルツの定理により、ある定数

$C > 0, m \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\|\mathcal{F} p(t, 0)(-i\xi)\|^{(\text{注3})} \leq C(1+|\xi|)^m \quad (t \in [-\eta_1, \eta_1])$$

である。

一方、 $\mathcal{F} p(t, 0)(-i\xi) = \hat{p}(t, 0)(\xi)$ より

$$\mathcal{F}[p(t, 0)](\xi) = \hat{p}(t, 0)(i\xi) = r(t, 0, i\xi) = \exp(tA(i\xi))$$

である。

$$\text{故に、(*) } \|\exp(tA(i\xi))\| \leq C(1+|\xi|)^m$$

である。

(注3) $\mathcal{F}$ は、フーリエ変換を表わすことにする。

逆に、(*)が成立していれば、

$$\begin{aligned} & \| \exp(tA(i\xi)) - \exp(t'A(i\xi)) \| \\ & \leq \| A(i\xi) \| \cdot C(1+|\xi|)^m \cdot |t-t'| \\ & \leq C'(1+|\xi|) \cdot C(1+|\xi|)^m \cdot |t-t'| \end{aligned}$$

なる不等式が成立している。

一方、(*)より、 $(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))^N$ の元 $\rho(t, 0)$, $\rho(t', 0)$ は、共にコンパクト台を持つ distribution である。

以上のことより、

$$(t \mapsto \rho(t, 0)) \in \mathcal{C}(\{t: |t| < \eta, \}; \mathcal{E}'_x(\mathbb{R}^n; M_N(\mathbb{C})))$$

が従う。

実際、任意の $\varphi \in \mathcal{S} \otimes \mathbb{C}^N$ に対して、

$$\begin{aligned} & | \langle \rho(t, 0) - \rho(t', 0), \varphi(x) \rangle | \\ & = | \langle \mathcal{F}[\rho(t, 0) - \rho(t', 0)](\xi), \mathcal{F}^{-1}\varphi(\xi) \rangle | \\ & \leq \int \| [\hat{\rho}(t, 0) - \hat{\rho}(t', 0)](-i\xi) \| \cdot \| \mathcal{F}^{-1}\varphi(\xi) \| d\xi \\ & \leq C'' \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^{m+1} \| \mathcal{F}^{-1}\varphi(\xi) \| d\xi \cdot |t-t'| \end{aligned}$$

となる。よって $\int_{\xi \in \mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^{m+1} \| \mathcal{F}^{-1}\varphi(\xi) \| d\xi < \infty$ より、

$(t \mapsto \rho(t, 0))$ の連続性が従う。

更に、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k e^{tA(i\xi)} = A(i\xi)^k e^{tA(i\xi)}$$

より、

$$(t \mapsto \rho(t, 0)) \in \mathcal{C}^\infty(\{t: |t| < \eta, \}; \mathcal{E}'_x(\mathbb{R}^n; M_N(\mathbb{C})))$$

が従う。このことより、

$$(t \mapsto u(t)) \in C^1(\{ |t| < r \}; E'_x(\mathbb{R}^n; M_N(\mathbb{C})))$$

が成立する。

実際、それは、

$$\begin{aligned} u(t) &= R(t, 0)u_0 + \int_0^t R(t, \tau) f(\tau) d\tau \\ &= \rho(t, 0) * u_0 + \int_0^t \rho(t, 0) * f(\tau) d\tau \end{aligned}$$

より従う。

故に、D-適切性と、不等式(*)は同値である。

不等式(*)と $\exp(\chi(A(i\xi)))$ の緩増加性が同値であることを見るのは容易である。

(3.e.d)

タルスキー・ザイデンベルグの定理を使うことより、次の補題が成立する。

補題3-3 $\exp(\chi(A(i\xi)))$ が $\xi \in \mathbb{R}^n$ の緩増加関数であることと、 $\chi(A(i\xi))$ が有界であることは同値である。

この補題3-3より、次のゴールディングの定理を得る。

定理3-4 局所ユーシー問題が、D-適切であるための必要十分条件は、 $\chi(A(i\xi))$ が有界、即ち、方程式(1)が ゴールディングの意味で双曲型 であることである。

Reference

- [1] F.Treves: Ovcynnikov theorem and hyper-differential operators, Notas de Mathematica No.46, IMPA, Brazil, 1968.
- [2] K.Aoki : Analytic Functionals and Cauchy Problems, Master Thesis of Sophia Univ, 1978.